ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 3, 1967 Математика

Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВ

О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

Будем обозначать буквами $x, y, \cdots$ точки $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\cdots$ евклидова пространства E_n, $n\geqslant 2$, $|x|=(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2)^{1/2}$. В случае плоскости E_2 будем пользоваться комплексным переменным $z=x_1+ix_2$. Через $s_n(r)=\{x; |x|=r\}$, $r>0$ обозначаем сферу радиуса r с центром в начале координат O, $\sigma_n(r)=\frac{\pi^{n/2} n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^{n-1}$ — площадь этой сферы, $\sigma_n(1)=\sigma_n$.

Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в окрестности начала координат O. Хорошо известна теорема Ф. Рисса о том, что среднее значение этой функции по площади сферы

$$I(r; u)=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)} u(x)\, d\sigma_n \tag{1}$$

является неубывающей функцией от r, выпуклой относительно $\log r$ при $n=2$ или относительно $1/r^{n-2}$ при $n>2$ (см. [1], стр. 40). В работах Дингхаса (см. [2], где указана дальнейшая литература) изучались свойства выпуклости средних значений вида

$$F(r; u^p)=\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)} u^p(x)\, d\sigma_n\right\}^{1/p}, \quad p>1 \tag{2}$$

и аналогичных средних, для составления которых вместо степенной функции $\lambda(t)=t^p$, $p>1$, используется функция $\lambda(t)=e^{at}$, $a>0$. Для случая функций $u(x)$, субгармонических в полупространстве $E_n^+=\{x; x_1>0\}$, братьями Ф. и Р. Неванлинна [3] и Л. Альфорсом [4] были введены в рассмотрение средние специального вида, взятые по полусфере и также обладающие некоторыми свойствами выпуклости. Эти результаты также были обобщены Дингхасом [2].

В настоящей работе мы рассматриваем для субгармонических функций $u(x)$ средние значения более общего вида

$$F(r; \lambda(u))=\lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n^{(r)}} \lambda(u(x))\, d\sigma_n\right\}, \tag{3}$$

где $\lambda(t)$ —некоторая возрастающая выпуклая функция от t, λ^{-1}—ей обратная. При этом свойства средних для функций $\lambda(t)=t^p$, $p>1$ и $\lambda(t)=e^{at}$, $a>0$ получаются как частные случаи общих теорем.

Применяемые методы позволяют не только изучить средние общего вида с использованием выпуклой функции $\lambda(t)$ для случая субгармонических функций в полупространстве E_n^+, но и в случае угловых областей при $n=2$ или конических областей при $n>2$.

§ 1. Средние значения функций, субгармонических в шаре

Пусть $u(x)$—субгармоническая функция в шаре $D=\{x;\ |x|<1\}$ пространства E_n. В этом параграфе рассматриваются средние значения вида

$$F(r;\lambda(u))=\lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n^{(r)}}\lambda(u((x))\,d\sigma_n\right\} \tag{1.1}$$

как функции от радиуса сферы $S_n(r)$, составленные при помощи некоторой функции $\lambda=\lambda(t)$. Естественно считать функцию $\lambda(t)$ определенной для всех t из области значений $u(x)$, (строго) возрастающей и выпуклой относительно t. Для выпуклых функций $\lambda(t)$ сложная функция $\lambda(u(x))$ также является субгармонической и, следовательно, как уже упоминалось во введении, среднее значение

$$m(r;\lambda(u))=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n^{(r)}}\lambda(u(x))\,d\sigma_n \tag{1.2}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\log r$ при $n=2$ или $1/r^{n-2}$ при $n>2$, (см. [1], стр. 40).

Здесь и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать эти условия на $\lambda(t)$ выполненными. Кроме того, мы ограничиваемся случаем, когда $\lambda(t)$ необходимое число раз непрерывно дифференцируема.

Поскольку в практически интересных случаях функции $\lambda(t)$ выпуклы чаще всего только при $t>0$, целесообразно ограничиться рассмотрением средних для субгармонической функции $u^+(x)$ ($u^+=u$, если $u\geqslant 0$ и $u^+=0$, если $u<0$). В этом случае мы всегда предполагаем функцию $\lambda(t)$ неотрицательной при $t\geqslant 0$, $\lambda'(t)>0$ и $\lambda''(t)>0$ при $t>0$. Подобно тому, как это делается при выводе обобщенного неравенства Минковского (см. [5], стр. 107—110), мы вынуждены потребовать, кроме того, чтобы выражение $\varphi(\tau)=\dfrac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))}$ было вогнутой функцией от τ для всех $\tau=\lambda(t)$, $t>0$. Если функция $\lambda(t)$ имеет непрерывную производную $\lambda^{IV}(t)$, то из тождества $\dfrac{d\varphi}{d\tau}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\lambda'(t)}{\lambda''(t)}+1$ видно, что равносильными требованиями являются вогнутость функции $\dfrac{\lambda'(t)}{\lambda''(t)}$ относительно t или возрастание функции $\dfrac{\lambda'(t)\,\lambda'''(t)}{[\lambda''(t)]^2}$. Выпуклые функции, удовлетворяющие условиям, перечисленным в этом абзаце, мы будем называть *допустимыми* при $t \geqslant 0$. Например, допустимыми выпуклыми функциями при $t \geqslant 0$ являются: $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$; $\lambda(t) = e^{at}$, $a > 0$; $\lambda(t) = \operatorname{ch} at$, $a > 0$. Напротив, выпуклые при $t \geqslant 0$ функции $\lambda(t) = \operatorname{sh} at$, $a > 0$ и $\lambda(t) = (1+t)\log(1+t)$ не являются допустимыми.

Теорема 1.1. *Пусть функция $u(x)$ субгармоническая в D, $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t \geqslant 0$. Тогда среднее значение*

$$F(r;\, \lambda(u^+)) = \lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)} \lambda(u^+(x))\, d\sigma_n\right\},\quad 0 \leqslant r < 1, \tag{1.3}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\xi = \log r$ при $n=2$ или $\xi = 1/r^{n-2}$ при $n > 2$.

Доказательство. Как известно (см. [1], стр. 154), во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри шара D, субгармоническая функция $u^+(x)$ может быть представлена как предел невозрастающей последовательности дважды непрерывно дифференцируемых субгармонических функций $u_n(x)$. Так как при этом переход к пределу в неравенствах, характеризующих возрастание и выпуклость, возможен, теорему достаточно доказать для дважды непрерывно дифференцируемых неотрицательных субгармонических функций $u(x)$.

Если обозначить $F(r) = F(e^\xi) = \Psi(\xi)$ при $n=2$ и $F(r) = F\left(\xi^{-\frac{1}{n-2}}\right) = \Psi(\xi)$ при $n > 2$, то для таких функций $u(x)$ по правилам дифференцирования и в силу (1.1) получаем:
при

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = r^2\cdot\Delta F = \frac{r^2}{\lambda'(F)}\left\{\Delta m - \frac{\lambda''(F)}{[\lambda'(F)]^2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2\right\} \tag{1.4}$$

и при $n > 2$

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \frac{1}{(n-2)^2}\, r^{2(n-1)}\cdot\Delta F =$$

$$= \frac{1}{(n-2)^2}\,\frac{r^{2(n-1)}}{\lambda'(F)}\left\{\Delta m - \frac{\lambda''(F)}{[\lambda'(F)]^2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2\right\}, \tag{1.5}$$

где ΔF и Δm обозначают оператор Лапласа, примененный соответственно к функциям $F = F(r) = F(r;\, \lambda(u))$ и $m = m(r) = m(r;\, \lambda(u))$, зависящим только от r.

Из выражения (1.2) имеем

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)} \lambda'(u)\frac{\partial u}{\partial r}\, d\sigma_n. \tag{1.6}$$

Далее, обозначая

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta u,$$

где $\Delta_\theta u$ — сферическая часть оператора Лапласа, получаем

$$\Delta m = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\left[\frac{\partial^2\lambda(u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda(u)}{\partial r}\right]d\sigma_n =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\left[\Delta\lambda(u) - \frac{1}{r^2}\Delta_\theta\lambda(u)\right]d\sigma_n = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\Delta\lambda(u)\,d\sigma_n, \qquad (1.7)$$

так как интеграл от $\Delta_\theta\lambda(u)$ по сфере равен нулю.

Кроме того

$$\Delta\lambda(u) = \lambda'(u)\cdot\Delta u + \lambda''(u)\cdot\mathrm{grad}^2 u. \qquad (1.8)$$

Поскольку $\mathrm{grad}^2 u \geqslant \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ и для субгармонических функций $\Delta u \geqslant 0$, из (1.7) и (1.8) получаем

$$\Delta m \geqslant \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\lambda''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n. \qquad (1.9)$$

С другой стороны, применяя неравенство Буняковского, из (1.6) находим

$$\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\frac{[\lambda'(u(x))]^2}{\lambda''(u(x)}d\sigma_n\cdot\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\lambda''(u(x)\left(\frac{\partial u(x)}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n. \qquad (1.10)$$

Комбинируя (1.5), (1.9) и (1.10), видим, что производная $\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}$ будет неотрицательна при условии, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\frac{[\lambda'(u(x))]^2}{\lambda''(u(x))}\,d\sigma_n \leqslant \frac{[\lambda'(F)]^2}{\lambda''(F)}. \qquad (1.11)$$

По условию теоремы $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция, т. е. функция $\varphi(\tau) = \frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))}$ — вогнутая. Следовательно, к левой части неравенства (1.11) применимо неравенство Иенсена (см. [5], стр. 182), и мы находим

$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\frac{[\lambda'(u(x))]^2}{\lambda''(u(x))}\,d\sigma_n \leqslant \frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(m))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(m))} = \frac{[\lambda'(F)]^2}{\lambda''(F)},$$

что доказывает (1.11), а вместе с этим и выпуклость функции $F(r)$ относительно переменной ξ.

В силу субгармоничности функции $\lambda(u(x))$ функция $m(r)$, согласно цитированной во введении теореме Ф. Рисса, неубывающая. Так как обратная функция $\lambda^{-1}(\tau)$ также возрастающая, заключаем, что функция $F(r)$—неубывающая.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. *В условиях теоремы 1.1 выражение $r^{n-2}F(r; \lambda(u^+))$ есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно переменной $\eta = r^{n-2}$ при $n > 2$.*

Доказательство. Эта теорема немедленно вытекает из теоремы 1.1, если учесть, что (можно предполагать, что $0 \leqslant u(x) \in C^2(D)$)

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[r^{n-2}F(r)] = \frac{1}{(n-2)^2} r^{4-n} \cdot \Delta F(r).$$

Замечания. 1. Как видно из доказательства, утверждения теорем 1.1 и 1.2 относительно выпуклости функций $F(r; \lambda(u^+))$ и $r^{n-2}F(r; \lambda(u^+))$ остаются в силе и для функций $u(x)$, субгармонических в кольцевой области вида $\{x;\ 0 \leqslant r_1 < |x| < r_2\}$.

2. Допустим, что выпуклая функция $\lambda(t)$ является допустимой для всех t, $-\infty < t < +\infty$, т. е. $\lambda'(t) > 0$, $\lambda''(t) > 0$ всюду и функция

$$\varphi(\tau) = \frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))},\quad \tau = \lambda(t),$$

является вогнутой для всех t, $-\infty < t < +\infty$. Так обстоит дело для функции $\lambda(t) = e^{at}$, $a > 0$. Тогда, как видно из доказательства, утверждения теорем 1.1 и 1.2 справедливы не только для функций $F(r; \lambda(u^+))$ и $r^{n-2}F(r; \lambda(u^+))$, но и для функций $F(r; \lambda(u))$ и $r^{n-2}F(r; \lambda(u))$.

3. Пусть функция $f(z)$, $z = re^{i\theta}$ голоморфна в круге $D = \{z;\ |z| < 1\}$. Применяя теорему 1.1 к субгармонической функции $\log|f(z)|$, получаем следующее предложение: *если функция $f(z)$ голоморфна в круге D и $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t \geqslant 0$, то среднее значение*

$$F(r; \lambda(\log^+|f(z)|)) = \lambda^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lambda(\log^+|f(re^{i\theta})|)\,d\theta\right\}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\log r$.

Применяя теорему 1.1 и замечание 2 для случая $u(z) = \log|f(z)|$ и $\lambda(t) = e^{\alpha t}$, $a > 0$, получаем классическую теорему Харди о том, что среднее значение

$$M_a(r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^a\,d\theta\right\}^{1/a},\quad a > 0,$$

для голоморфной функции $f(z)$ есть неубывающая функция от r, логарифмически-выпуклая относительно $\log r$.

4. Теоремы 1.1, 1.2 вместе с замечаниями *1* и *2* обобщают результаты Дингхаса, который рассматривал случай функций $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$ и $\lambda(t) = e^{at}$, $a > 0$ (см. [2], теоремы 6—11).

5. Для функций $u(x)$, супергармонических или гармонических в шаре D можно рассматривать другие комбинации знаков $\lambda'>0$, $\lambda''<0$ или $\lambda'<0$, $\lambda''<0$, соответственно модифицируя класс допустимых функций $\lambda(t)$. Пусть, например, $u(x)$ — супергармоническая неотрицательная функция в D. В качестве допустимых при $t\geqslant 0$ примем положительные возрастающие вогнутые функции $\lambda(t)$ такие, что $\lambda'(t)>0$, $\lambda''(t)<0$ и, кроме того,

$$\varphi(\tau)=\frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))},\ \tau=\lambda(t)$$

является выпуклой функцией при $t>0$. При этом справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.1'. *Пусть $u(x)$—неотрицательная супергармоническая функция в D и $\lambda(t)$—допустимая вогнутая функция при $t\geqslant 0$. Тогда среднее значение $F(r;\lambda(u))$ вида (1.1) есть вогнутая функция относительно $\xi=\log r$ при $n=2$ или $\xi=1/r^{n-2}$ при $n>2$.*

Теорема 1.2'. *В условиях теоремы 1.1' выражение $r^{n-2}F(r;\lambda(u))$ есть вогнутая функция относительно $\eta=r^{n-2}$ при $n>2$.*

§ 2. Средние значения функций, субгармонических в угловой области

Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в угловой области $D_\alpha=\left\{z=re^{i\theta};\ |\theta|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<r<1\right\}$, $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<+\infty$. На лучах $\zeta=\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, входящих в границу области D_α, предполагается выполненным следующее условие:

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z)\leqslant 0,\ \zeta=\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}},\ 0\leqslant\rho\leqslant 1\ . \tag{2.1}$$

Мы рассмотрим в этом параграфе средние значения

$$\mu(r;\lambda(u^+))=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda\left(\frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta d\theta, \tag{2.2}$$

$$\Phi(r;\lambda(u^+))=\lambda^{-1}(\mu(r;\lambda(u^+)))=$$
$$=\lambda^{-1}\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda\left(\frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta d\theta\right\}, \tag{2.3}$$

где $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t\geqslant 0$ в смысле § 1, стр. 141.

Нетрудно показать, что для субгармонических функций $u(z)$ в области D_α, удовлетворяющих условию (2.1), средние значения (2.2) и (2.3) конечны при всех r, $0\leqslant r<1$.

В самом деле, если $z = re^{i\theta}$, $\zeta = Re^{i\varphi}$, $0 < r < R < 1$, то для $u(z)$ имеем неравенство

$$u^+(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} u^+(Re^{i\varphi})\, h(z, \zeta)\, d\varphi, \tag{2.4}$$

где

$$h(z, \zeta) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\zeta^\alpha + z^\alpha}{\zeta^\alpha - z^\alpha} - \frac{\overline{\zeta}^\alpha - z^\alpha}{\overline{\zeta}^\alpha + z^\alpha}\right\} =$$

$$= 4R^\alpha r^\alpha \cos\alpha\theta \cos\alpha\varphi \frac{R^{2\alpha} - r^{2\alpha}}{|\zeta^\alpha - z^\alpha|^2 \cdot |\overline{\zeta}^\alpha + z^\alpha|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4R^\alpha r^\alpha \cos\alpha\theta \cos\alpha\varphi \frac{R^\alpha + r^\alpha}{(R^\alpha - r^\alpha)^3}, \quad 0 < r < R < 1. \tag{2.5}$$

Подставляя оценку (2.5) в (2.4), а затем (2.4) в (2.2), убеждаемся, что интегралы (2.2) и (2.3) конечны при любом r, $0 < r < 1$.

Теорема 2.1. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (2.1), $\lambda(t)$ — *допустимая выпуклая функция при $t > 0$, причем $\lambda(0) = 0$. Тогда среднее значение $\mu(r) = \mu(r; \lambda(u^+))$ есть неубывающая функция от r, и график $y = \mu(r)$ представляет собой выпуклую кривую относительно семейства $y = C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha}$.*

Доказательство. Пусть $D = \{z;\ |z| < 1\}$ обозначает единичный круг плоскости z. Функция

$$w(z) = \begin{cases} u^+(z), & z \in D_\alpha, \\ 0, & z \in D - D_\alpha, \end{cases}$$

в силу условия (2.1) субгармоническая и неотрицательная в D. Пусть ε — произвольное достаточно малое положительное число. Тогда неотрицательная функция $w_\varepsilon(z) = [w(z) - \varepsilon]^+$ также субгармоническая в D, причем $w(z) - \varepsilon \leqslant w_\varepsilon(z) \leqslant w(z)$. Кроме того, при любом r_0, $0 < r_0 < 1$, в некоторой окрестности лучей $\arg z = \pm\dfrac{\pi}{2\alpha}$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$, функция $w_\varepsilon(z)$ тождественно равна нулю. Применяя итерированные средние функции $w_\varepsilon(z)$ по площади кружков достаточно малого радиуса (см. [1], стр. 154), можно построить невозрастающую последовательность дважды непрерывно дифференцируемых субгармонических функций $w_\varepsilon^{(k)}(z)$ таких, что $w_\varepsilon^{(k)}(z) \downarrow w_\varepsilon(z)$ внутри D, причем $w_\varepsilon^{(k)}(z) \equiv 0$ в $(D - D_\alpha) \cap \{|z| \leqslant r_0\}$.

Отсюда вытекает, что теорему достаточно доказать для дважды непрерывно дифференцируемых неотрицательных в D субгармонических функций $u(z)$, тождественно равных нулю в $D - D_\alpha$. В самом деле, если теорема верна для функций $w_\varepsilon^{(k)}(z)$, то, в силу возможности предельного перехода под знаком интеграла, она верна для $w_1(z)$, а затем и для $w(z)$.

Обозначим

$$v(z)=\frac{u(z)}{\cos\alpha\theta},\ u(z)>0,\ z\in D_0;$$

$$\mu(r)=\mu(r;\lambda(u))=\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda(v)\cos^2\alpha\theta d\theta. \tag{2.6}$$

Как и в (1.6), имеем

$$\frac{d\mu}{dr}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda'(v)\frac{\partial u}{\partial r}\cos\alpha\theta d\theta. \tag{2.7}$$

Далее, дифференцируя еще раз и учитывая, что $u(z)\equiv 0$ в $D-D_0$ и $\Delta u\geqslant 0$, получаем

$$\Delta\mu=\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta+\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda'(v)\cdot\Delta u\cdot\cos\alpha\theta d\theta-$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda'(v)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cos\alpha\theta d\theta\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta-\frac{1}{r^2}\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda'(v)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cos\alpha\theta d\theta. \tag{2.8}$$

После преобразований находим

$$\Delta\mu\geqslant\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta+\frac{1}{r^2}\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda''(v)\left[\frac{\partial u}{\partial\theta}+\alpha u\operatorname{tg}\alpha\theta\right]^2 d\theta+$$

$$+\frac{\alpha^2}{r^2}\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda'(v)\,u\cos\alpha\theta d\theta\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2\alpha}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta+\frac{\alpha^2}{r^2}\mu\geqslant\frac{\alpha^2}{r^2}\mu. \tag{2.9}$$

Последнее неравенство в (2.9) получается в силу условия $\lambda(0)=0$, так как при этом для допустимой выпуклой функции $\lambda'(v)\,v > \lambda(v)$.

Если $\xi = \log r$ и $\mu(r) = \mu(e^{\xi}) = \varphi(\xi)$, то $\dfrac{d^2\varphi}{d\xi^2} = r^2\Delta\mu$. Из (2.9) теперь получаем

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} \geqslant \alpha^2\varphi \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Неравенство (2.10) как раз и означает, что график $y = \varphi(\xi)$ выпуклый относительно семейства $y = C_1e^{\alpha\xi} + C_2e^{-\alpha\xi}$, т. е. график $y = \mu(r)$ выпуклый относительно семейства $y = {}_1rC^{\alpha} + C_2r^{-\alpha}$.

Из (2.9) видно, что $\mu(r)$, как функция от r, $0 \leqslant r < 1$, является субгармонической. Следовательно, в силу теоремы Ф. Рисса она является неубывающей функцией от r. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (2.1), $\lambda(t)$ — *допустимая выпуклая функция при* $t \geqslant 0$. *Тогда среднее значение* $\Phi(r) = \Phi(e^{\xi}) = \Psi(\xi)$ *есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно* $\xi = \log r$.

Доказательство. Как в (1.4), имеем [можно предполагать, что $0 \leqslant u(z) \in C^2(D)$]

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \frac{r^2}{\lambda'\Phi}\left\{\Delta\mu - \frac{\lambda''(\Phi)}{[\lambda'(\Phi)]^2}\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2\right\}. \tag{2.11}$$

Применяя неравенство Буняковского, из (2.7) получаем

$$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \leqslant \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{[\lambda'(v)]^2}{\lambda''(v)}\cos^2\alpha\theta d\theta \cdot \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta. \tag{2.12}$$

Подставляя оценку (2.12) в (2.11) и пользуясь свойствами $\lambda(t)$ так же, как при доказательстве теоремы 1.1, получаем неравенство

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} \geqslant \alpha^2\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v)\,u\cos\alpha\theta\, d\theta \geqslant 0, \tag{2.13}$$

доказывающее теорему.

Очевидно, что при конкретном выборе функции $\lambda(t)$ из полученных соотношений можно извлечь более полную информацию о поведении средних $\mu(r)$ и $\Phi(r)$. Выбирая $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$, получаем следующее утверждение:

Теорема 2.3. *Если $u(z)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (2.1), *то выражение*

$$L_p(r) = r^{\alpha}\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\left(\frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right)^p\cos^2\alpha\theta d\theta\right\}^{1/p},\ p \geqslant 1, \tag{2.14}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно перемен
ной $\eta = r^{2\alpha}$.

Доказательство. В данном случае $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$, и из (2.9
имеем (можно предполагать, что $0 \leqslant u(z) \in C^2(D)$)

$$\Delta\mu \geqslant \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta + \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v)\, u \cos\alpha\theta d\theta =$$

$$= p(p-1)\frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} v^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta + \frac{\alpha^2}{r^2} p\mu. \qquad (2.15$$

С другой стороны, из (2.7) при помощи неравенства Буняковско
го находим

$$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \leqslant p^2\mu \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} v^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta. \qquad (2.16$$

Сопоставляя (2.15) и (2.16), приходим к неравенству

$$\frac{1}{\mu}\frac{d^2\mu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr} - \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \geqslant \frac{\alpha^2}{r^2} p. \qquad (2.17$$

Теперь простыми преобразованиями нетрудно показать, что (2.17
равносильно неравенству

$$\frac{d^2}{d\eta^2} L(\eta^{\frac{1}{2\alpha}}) \geqslant 0, \qquad (2.18$$

которое и доказывает теорему.

Замечания. 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в D_z и $\lim_{z\to}$

$\sup|f(z)| \leqslant 1$, $\zeta = \rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Тогда из теоремы 2.2 получае
для любой допустимой выпуклой функции $\lambda(t)$ предложение. *Средне*
значение

$$\Phi(r; \lambda(\log^+|f(z)|)) = \lambda^{-1}\left\{\frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda\left(\frac{\log^+|f(z)|}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta d\theta\right\}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\xi = \log r$
Теорема 2.3 в этом случае дает: *выражение*

$$r^{\alpha}\left\{\frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \left(\frac{\log^+|f(z)|}{\cos\alpha\theta}\right)^p \cos^2\alpha\theta d\theta\right\}^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\eta=r^{2\alpha}$.

2. Переходя к пределу в теореме 2.3 при $p\to+\infty$, получаем предложение. *Выражение*

$$L_\infty(r)=r^\alpha\left\{\max_{|\theta|<\frac{\pi}{2\alpha}}\frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right\}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\eta=r^{2\alpha}$.

Для случая голоморфных функций $f(z)$ в D_α

$$\limsup_{z\to\zeta}|f(z)|\leqslant 1,\quad \zeta=\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}},\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1$$

имеем предложение. *Выражение*

$$L_\infty(r)=r^\alpha\left\{\max_{|\theta|<\frac{\pi}{2\alpha}}\frac{\log^+|f(re^{i\theta})|}{\cos\alpha\theta}\right\}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\eta=r^{2\alpha}$.

3. В случае супергармонических функций $u(z)$ в D_α и допустимых вогнутых функций $\lambda(t)$ можно установить аналоги теорем 2.1—2.3, как это было сделано в замечании 5 из § 1, стр. 144. Мы опускаем здесь эти формулировки.

В случае гармонических функций возможны и другие варианты. Пусть, например, $u(z)$ — положительная гармоническая функция в D_α такая, что $\lim\limits_{z\to\zeta}u(z)=0$, $\zeta=\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$. Тогда выражение

$$r^\alpha\mu\left(r;u^{-\frac{1}{p}}\right)=r^\alpha\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\left(\frac{u(z)}{\cos\alpha\theta}\right)^{-\frac{1}{p}}\cos^2\alpha\theta\, d\theta\right\}^{-p},\quad p\geqslant 1$$

является вогнутой функцией относительно $\eta=r^{2\alpha}$. При этом среднее $\mu\left(r;u^{-\frac{1}{p}}\right)$ есть невозрастающая функция от r. В пределе при $p\to+\infty$ здесь получаем. *Выражение*

$$r^\alpha\left\{\min_{|\theta|<\frac{\pi}{2\alpha}}\frac{u(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right\}$$

является вогнутой функцией относительно $\eta=r^{2\alpha}$.

4. В работе [4] Л. Альфорс изучил случай $\alpha=1$, $\lambda(t)=t$ (при $n=2$ и $n>2$). Теоремы 2.1—2.3 обобщают также (при $n=2$) результаты Дингхаса, который рассматривал случай $\alpha=1$, $\lambda(t)=t^p$, $\lambda(t)=t^{-\frac{1}{p}}$, $p\geqslant 1$ (см. [2], теоремы 1.2).

§ 3. Средние значения функций, субгармонических в конической области

Пусть $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ — точка пространства E_n, $n > 2$, $x_1 = r\cos\theta$, $r = |x|$. Будем предполагать функцию $u(x)$ субгармонической в конической области

$$D_\alpha = \left\{x;\ 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2\alpha},\ |x| < 1\right\},\ 1 \leqslant \alpha < +\infty,$$

и на части границы Γ_1 области D_α,

$$\Gamma_1 = \left\{y;\ y_1 = |y|\cos\frac{\pi}{2\alpha},\ 0 \leqslant |y| \leqslant 1\right\},$$

удовлетворяющей условию

$$\limsup_{x \to y} u(x) \leqslant 0,\ y \in \Gamma_1. \tag{3.1}$$

Этот случай является пространственным аналогом рассуждений § 2, и мы рассматриваем средние значения

$$\mu(r; \lambda(u^+)) = \frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)} \int\limits_{S_n(r;\alpha)} \lambda\left(\frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta\, d\sigma_n, \tag{3.2}$$

$$\Phi(r; \lambda(u^+)) = \lambda^{-1}(\mu(r; \lambda(u^+))) =$$
$$= \lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)} \int\limits_{S_n(r;\alpha)} \lambda\left(\frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta\, d\sigma_n, \right. \tag{3.3}$$

где $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t \geqslant 0$ в смысле § 1, стр. 141; $S_n(r;\alpha)$ — часть сферы $|x| = r$, определяемая условием $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$;

$$\sigma_n(1;\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos^2\alpha\theta\,\sigma_{n-1}(\sin\theta)\, d\theta.$$

Конечность интегралов (3.2), (3.3) устанавливается таким же путем, как в § 2, но здесь необходимо привлечь оценки нормальной производной функции Грина для области $\left\{x;\ 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2\alpha},\ 0 < |x| < R < 1\right\}$. Мы опускаем здесь это рассуждение.

Теорема 3.1. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (3.1), *$\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t > 0$, причем $\lambda(0) = 0$. Тогда среднее $\mu(r) = \mu(r; \lambda(u^+))$ есть неубывающая функция от r и график $y = r^{\frac{n}{2}-1}\mu(r)$ является выпуклой кривой относительно семейства $y = C_1 r^\gamma + C_2 r^{-\gamma}$, где $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + 4(\alpha^2 - 1)(n-1)}$.*

Доказательство. Методом аппроксимации легко убедиться, как в § 2 при доказательстве теоремы 2.1, что теорему достаточно доказать для дважды непрерывно дифференцируемых неотрицательных субгармонических функций $u(x)$ в $D=\{x;\ |x|<1\}$, тождественно равных нулю в $D-D_\alpha$.

Обозначим

$$v(x)=\frac{u(x)}{\cos\alpha\theta},\quad u(x)>0,\ x\in D_\alpha; \tag{3.4}$$

$$\mu(r)=\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda(v)\cos^2\alpha\theta\,d\sigma_n.$$

Как и в (2.7), имеем

$$\frac{d\mu}{dr}=\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)\frac{\partial u}{\partial r}\cos\alpha\theta d\sigma_n. \tag{3.5}$$

Далее необходимо дифференцировать еще раз и учитывать, что $u(x)\equiv 0$ в $D-D_\alpha$ и

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_\theta u\geqslant 0,$$

где $\Delta_\theta u$ — сферическая часть оператора Лапаса. Выполнив эти вычисления, приходим к неравенству

$$\Delta\mu\geqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\lambda)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\alpha u\operatorname{tg}\alpha\theta\right)^2 d\sigma_n+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)\,u\cos\alpha\theta\left[2\alpha(n-2)\frac{\operatorname{tg}\alpha\theta}{\operatorname{tg}\theta}-\alpha^2(n-3)\right]d\sigma_n. \tag{3.6}$$

Так как при $1\leqslant\alpha<+\infty$

$$2\alpha(n-2)\frac{\operatorname{tg}\alpha\theta}{\operatorname{tg}\theta}-\alpha^2(n-3)\geqslant\alpha^2(n-1)$$

в силу условия теоремы $\lambda'(v)\,v\geqslant\lambda(v)$, из (3.6) получаем

$$\Delta\mu\geqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+$$

$$+\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)\,u\cos\alpha\theta\,d\sigma_n\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\mu\geqslant\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\mu \tag{3.7}$$

или

$$\frac{d^2\mu}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{d\mu}{dr}\geqslant\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\mu. \quad (3.8)$$

Из (3.7) видно, что $\mu(r)$, как функция от r, является субгармонической. Следовательно, в силу теоремы Ф. Рисса, $\mu(r)$ есть неубывающая функция от r, $0\leqslant r<1$.

Введя функцию $L(r)=r^{\frac{n}{2}-1}\mu(r)$ и составляя производные от $L(r)=L(e^{\xi})$ по $\xi=\log r$, из (3.8) получаем

$$\frac{d^2L}{d\xi^2}-\gamma^2L\geqslant 0, \quad (3.9)$$

где $\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4(\alpha^2-1)(n-1)}$. Неравенство (3.9) как раз и доказывает утверждение теоремы о выпуклости $L(r)$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (3.1), *$\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t>0$. Тогда среднее значение $\Phi(r)=\Phi(r;\lambda(u^+))=\Phi(\xi^{-\frac{1}{n-2}})=\Psi(\xi)$ есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно переменной $\xi=1/r^{n-2}$.*

Доказательство. Как в (2.11), имеем (можно предполагать, что $0<u(x)\in C^2(D)$)

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}=\frac{1}{(n-2)^2}r^{2(n-1)}\cdot\Delta\Phi=\frac{1}{(n-2)^2}\frac{r^{2(n-1)}}{\lambda'(\Phi)}\left\{\Delta\mu-\frac{\lambda''(\Phi)}{[\lambda'(\Phi)]^2}\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2\right\}. \quad (3.10)$$

Применяя неравенство Буняковского, из (3.5) получаем

$$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2\leqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\frac{[\lambda'(v)]^2}{\lambda''(v)}\cos^2\alpha\theta\,d\sigma_n\cdot\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2d\sigma_n. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.10) и учитывая (3.7), как и раньше, находим

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}=\frac{1}{(n-2)^2}r^{2(n-1)}\cdot\Delta\Phi\geqslant\frac{1}{(n-2)^2}\frac{r^{2(n-2)}}{\lambda'(\Phi)}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)u\cos\alpha\theta d\sigma_n \quad (3.12)$$

Из неравенства (3.12) вытекает, во-первых, как при доказательстве теоремы 3.1, что $\Phi(r)$ — неубывающая функция от r. Во-вторых, $\Psi(\xi)$ есть выпуклая функция относительно $\xi=1/r^{n-2}$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Если $u(x)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (3.1), *то выражение*

$$L_p(r) = r^\beta \left\{ \frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)} \int\limits_{S_n(r;\alpha)} \left(\frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta} \right)^p \cos^2\alpha\theta d\sigma_n \right\}^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$

где $\beta = \frac{n}{2} - 1 + \gamma$, $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + 4(\alpha^2 - 1)(n-1)}$, *есть неубывающая функция от* r, *выпуклая относительно переменной* $\eta = r^{2\gamma}$.

Доказательство. В данном случае $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$, и из (3.7) имеем (можно предполагать, что $0 \leqslant u(x) \in C^2(D)$)

$$\Delta\mu \geqslant \frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)} \int\limits_{S_n(r;\alpha)} \lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n +$$

$$+ \frac{\alpha^2(n-1)}{r^2} \frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)} \int\limits_{S_n(r;\alpha)} \lambda'(v)\, u \cos\alpha\theta d\sigma_n =$$

$$= p(p-1)\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)} \int\limits_{S_n(r;\alpha)} v^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n + \frac{\alpha^2(n-1)}{r^2} p\mu. \tag{3.13}$$

Отсюда, как при доказательстве теоремы 2.3, применяя неравенство Буняковского к (3,5), получаем неравенство

$$\frac{1}{\mu}\frac{d^2\mu}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr} - \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \geqslant \frac{\alpha^2(n-1)}{r^2} p, \tag{3.14}$$

аналогичное (2.17). Преобразуя это неравенство, получаем

$$\frac{d^2}{d\eta^2} L\left(\eta^{\frac{1}{2\gamma}}\right) \geqslant 0,$$

что и доказывает теорему.

Замечания. 1. Переходя к пределу в теореме 3.3 при $p \to +\infty$, получаем предложение. *Выражение*

$$L_\infty(r) = r^\beta \left\{ \max_{|\theta| < \frac{\pi}{2\alpha}} \frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta} \right\}$$

есть неубывающая функция от r, *выпуклая относительно* $\eta = r^{2\gamma}$.

2. Как в замечании 3 из § 2 имеем следующее предложение.

Пусть $u(x)$ — *положительная гармоническая функция в области* D_α *такая, что* $\lim\limits_{x \to y} u(x) = 0$, $y \in \Gamma_1$. *Тогда среднее значение*

$$\Phi\left(r; u^{-\frac{1}{p}}\right) = \left\{ \frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)} \int\limits_{S_n(r;\alpha)} \left(\frac{u(x)}{\cos\alpha\theta} \right)^{-\frac{1}{p}} \cos^2\alpha\theta d\sigma_n \right\}^{-p}, \quad p > 1,$$

есть невозрастающая функция от r, *а* $L(r) = r^\beta \Phi\left(r; u^{-\frac{1}{p}}\right)$ — *вогнутая функция относительно* $\eta = r^{2\gamma}$. *В частности, выражение*

$$r^{\gamma} \left(\min_{|\theta| < \frac{\pi}{2\alpha}} \frac{u(x)}{\cos \alpha\theta} \right)$$

является вогнутой функцией относительно $\eta = r^{2\gamma}$.

3. В работе Л. Альфорса [4] изучен случай $\alpha = 1$, $n > 2$, $\lambda(t) = t$, который является предельным в теоремах 3.1, 3.2 и включается в теорему 3.3. Теоремы 3.1—3.3 обобщают также при $n > 2$ результаты Дингхаса, который рассматривал случай $\alpha = 1$, $\lambda(t) = t^p$, $\lambda(t) = t^{-\frac{1}{p}}$, $p > 1$ (см. [2], теоремы 3—5).

Московский энергетический институт

Поступило 13.II 1967

Ե. Դ. ՍՈԼՈՄԵՆՑԵՎ

ՍՈՒԲՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների միջին արժեքները, որոնք կառուցված են ուռուցիկ ֆունկցիաների օգնությամբ (տես օրինակ (3) բանաձևը)

Ուսումնասիրվում է այդ միջին արժեքների կախվածությունը սֆերայի շառավղից, երբ սուբհարմոնիկ ֆունկցիաները որոշված են $E_n, n > 2$ *տարածության գնդում, և անկյունային կամ կոնական տիրույթներում։*

E. D. SOLOMENTSEV

ON THE MEAN VALUES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

Summary

The paper considers the mean values (such as (3)) of subharmonic functions, constructed with the use of convex functions. The dependence of the mean values on the radius of the sphere is investigated, the subharmonic functions being defined in the sphere in E_n, $n > 2$, or in angular or conic domians.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Субгармонические функции, М., ГТТП, 1937.
2. *A. Dinghas*, Über einige Konvexitätssätze für die Mittelwerte von subharmonischen Funktionen, J. math. pures appl., 44, 3, 1965. 223—247.
3. *F.* und *R. Nevanlinna.* Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. sci. fenn., 50, 5, 1922.
4. *L. V. Ahlfors.* On Phragmén—Lindelof's principle, Trans. Amer. Math. Soc., 41, 1, 1937, 1—8.
5. *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИЛ, 1948.