ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

ОБ ЭРГОДИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ И О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ. I

1.1. Пусть Γ — спрямляемая, замкнутая жорданова кривая, а T — сохраняющий ориентацию автоморфизм этой кривой.

Множество точек $E \subset \Gamma$ называется инвариантным относительно автоморфизма T, если $TE = E$.

Автоморфизм T называется эргодическим, если любое, инвариантное относительно T, измеримое по Лебегу множество $E \subset \Gamma$ имеет либо меру нуль, либо полную меру, т. е. меру, равную длине Γ.

В настоящей заметке даются некоторые необходимые и некоторые достаточные условия эргодичности автоморфизма T. Из них, в частности, вытекает существование неэргодических автоморфизмов с иррациональным числом вращения.

Полученные результаты применяются к специальным автоморфизмам замкнутых кривых, тесно связанным с задачей Дирихле для уравнения струны, для исследования единственности решения этой задачи в классе измеримых функций.

В первой части мы будем рассматривать только непрерывные и сохраняющие ориентацию отображения замкнутой кривой на себя, для краткости их будем называть просто автоморфизмами.

1.2. Пусть θ — некоторая точка, принадлежащая Γ. Множество точек $\mathfrak{M}(\theta) = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} T^n \theta$ называется циклом точки θ, порожденным автоморфизмом T (T^{-k} означает k-ую итерацию обратного отображения T^{-1}).

Лемма 1. *Для эргодичности автоморфизма T замкнутой кривой Γ необходимо, чтобы цикл каждой точки $\theta \in \Gamma$, порожденный автоморфизмом T, был всюду плотен на Γ, или иначе, необходимо, чтобы число вращения* [1] *автоморфизма T было иррациональным.*

Доказательство. Пусть для некоторой точки $\theta \in \Gamma$ множество $\mathfrak{M}(\theta)$ не является всюду плотным на Γ. Очевидно, что $T\mathfrak{M}(\theta) = \mathfrak{M}(\theta)$, т. е. $\mathfrak{M}(\theta)$ инвариантно относительно T. Легко показать, что замыкание $\overline{\mathfrak{M}(\theta)}$ этого множества также является инвариантным относительно T. Действительно, пусть $\theta^* \in \overline{\mathfrak{M}(\theta)}$ и $\theta^* \overline{\in} \mathfrak{M}(\theta)$. Тогда существует последовательность точек $\theta_n \in \mathfrak{M}(\theta)$ такая, что $\theta_n \to \theta^*$. В силу непрерывности автоморфизма T $T\theta_n \to T\theta^*$ и, поскольку $T\theta_n \in \mathfrak{M}(\theta)$, то $T\theta^* \in \overline{\mathfrak{M}(\theta)}$. Таким образом, $T\overline{\mathfrak{M}(\theta)} \subset \overline{\mathfrak{M}(\theta)}$. Аналогичным образом, учитывая инвариантность множества $\mathfrak{M}(\theta)$ относительно T^{-1}, получаем $T^{-1}\overline{\mathfrak{M}(\theta)} \subset \overline{\mathfrak{M}(\theta)}$, т. е. $T\overline{\mathfrak{M}(\theta)} = \overline{\mathfrak{M}(\theta)}$.

Рассмотрим дополнение множества $\overline{\mathfrak{M}(\theta)}$. Оно также инвариантно относительно T и состоит из не более, чем счетного числа интервалов $C\overline{\mathfrak{M}(\theta)} = \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i)$. Образ каждого из этих интервалов при отображении T, очевидно, совпадает с некоторым из этих интервалов. Поэтому, если (α, β) — некоторый из этих интервалов, то возможны два случая.

1. Существует такое целое число r, что $T^r(\alpha, \beta)$ совпадает с (α, β), т. е. (α, β) является периодическим интервалом автоморфизма T, при этом $T^r\alpha = \alpha$ и $T^r\beta = \beta$, в силу сохранения ориентации автоморфизмом T.

2. Пересечение интервала $T^n(\alpha, \beta)$ с интервалом (α, β) пусто при любом, отличном от нуля, целом n, т. е. (α, β) — непериодический интервал автоморфизма T.

Рассмотрим случай 1. Пусть p — некоторая точка из интервала (α, β). Тогда при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$ точки $p_k = T^{kr}p$ принадлежат интервалу (α, β). Возможны два случая:

а) при всех k $p_k = p$;

б) точки $p_k k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ образуют монотонную последовательность на интервале (α, β) (поскольку T сохраняет ориентацию).

В случае а) очевидно $T^{kr}(\alpha, p) = (\alpha, p)$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, и пересечение $T^n(\alpha, p)$ с (α, β) пусто при $n \neq kr$. Образуем множество $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(\alpha, p)$, которое, очевидно, инвариантно относительно T и имеет положительную меру. Однако мера этого множества не может совпадать с мерой Γ, поскольку это множество не имеет точек из интервала (p, β).

В случае б) возьмем некоторую точку q между p и p_1. Интервалы $T^n(p, q)$ при любом n, в силу сохранения ориентации автоморфизмом T, лежат вне интервала (q, p_1). Следовательно, множество $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(p, q)$, которое инвариантно относительно T, имеет положительную меру, отличную от полной меры.

В случае 2 пересечение интервала $T^n(\alpha, p)$ с интервалом (p, β) пусто при любом n, поэтому мера инвариантного относительно T множества $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(\alpha, p)$ положительна и отлична от полной меры, т. е. T не является эргодическим автоморфизмом.

Если T имеет рациональное число вращения, равное $\frac{m}{n}$, то, как показал Пуанкаре [2], T^n имеет неподвижную точку: $T^n\theta = \theta$, т. е цикл точки θ состоит из конечного числа точек и, согласно доказанному, T не является эргодическим.

Замечание. Если цикл некоторой точки $\theta \in \Gamma$, порожденный автоморфизмом T, не является всюду плотным на Γ, то из доказательства леммы 1 видно, что всю кривую Γ можно разделить на два непересекающихся, инвариантных относительно T множества, каждое из которых содержит некоторый интервал. Поскольку вместе с каждой точкой θ инвариантное относительно T множество обязано содержать и весь цикл точки θ, то цикл любой другой точки $\theta^* \in \Gamma$, порожденный автоморфизмом T, не является всюду плотным на Γ. Таким образом, для сохраняющих ориентацию непрерывных автоморфизмов T замкнутой кривой Γ, либо цикл любой точки, порожденный автоморфизом T, всюду плотен на Γ, либо этим свойством не обладает цикл ни одной точки.

1.3. Пусть T такой автоморфизм на Γ, что цикл некоторой точки (следовательно каждой точки), порожденный автоморфизмом T, всюду плотен на Γ. Известно, что число вращения таких автоморфизмов иррационально [1]. По теореме Данжуа [1] T топологически эквивалентен повороту окружности, т. е. существует единственное, с точностью до аддитивной постоянной, сохраняющее ориентацию взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение Φ кривой Γ на единичную окружность C, такое, что если

$$\Phi\theta = \varphi, \text{ то } \Phi(T\theta) = \varphi + 2\pi\xi,$$

где ξ — число вращения автоморфизма T.

Если на Γ ввести в качестве параметра длину дуги s, то Φ становится непрерывной обратимой функцией, периодической в том смысле, что

$$\Phi(s + l) = \Phi(s) + 2\pi,$$

где l — длина кривой Γ. Обратную Φ функцию будем обозначать через Φ^{-1}.

Теорема 1. *Для эргодичности автоморфизма T с иррациональным числом вращения ξ достаточно, чтобы Φ^{-1} была абсолютно непрерывной, а если производная этой функции отлична от нуля на некотором множестве положительной меры, то это условие является также и необходимым.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $E \subset \Gamma$ — некоторое множество положительной меры, инвариантное относительно автоморфизма T. Надо показать, что E имеет полную меру (т. е. $mE = m\Gamma$).

Пусть F — некоторое замкнутое множество положительной меры, принадлежащее множеству E. Образуем множество $\bar{F} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n F$. Очевидно, $\bar{F}$ инвариантво относительно T, имеет положительную меру и принадлежит множеству E. Кроме того, $\bar{F}$ является множеством типа

F_σ и, в силу непрерывности Φ, множество $\Phi(\tilde{F})$ измеримо. Учитывая абсолютную непрерывность Φ^{-1} и то, что $m\tilde{F} > 0$, по теореме Банаха-Зарецкого заключаем, что $m\Phi(\tilde{F}) > 0$. По теореме Данжуа множество $\Phi(\tilde{F})$ является инвариантным относительно поворота на угол $2\pi\xi$, где ξ—число вращения T. Известно, что если множество положительной меры на единичной окружности инвариантно относительно поворота на угол $2\pi\xi$, где ξ—иррациональное число, то мера этого множества равна 2π. Таким образом, $m\Phi(\tilde{F}) = 2\pi$ и, поскольку $\Phi(\tilde{F}) \subset \Phi(E)$, то $m\Phi(E) = 2\pi$. Отсюда легко заключить, что множество E имеет полную меру. В самом деле, допустим обратное, пусть $mE < m\Gamma$, тогда дополнение CE этого множества, которое также инвариантно относительно T, имеет положительную меру. Согласно доказанному $m\Phi(CE) = 2\pi$, т. е. $m\Phi(\Gamma) = 4\pi$. Противоречие показывает, что E имеет полную меру.

Необходимость. Пусть T — эргодический автоморфизм и пусть $(\Phi^{-1})' \neq 0$ на некотором множестве положительной меры. Надо показать, что Φ^{-1} является абсолютно непрерывной функцией.

Поскольку Φ^{-1} монотонна, то по теореме Банаха-Зарецкого достаточно показать, что она обладает свойством N.

Пусть e — некоторое множество на единичной окружности C и $me = 0$. Образуем множество $\tilde{e} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} R_\xi^n e$, где R_ξ — преобразование поворота на угол $2\pi\xi$. Множество $\tilde{e}$ инвариантно относительно R_ξ и имеет меру нуль. Из условий теоремы следует, что существуют такое число $\sigma > 0$ и такое множество $\gamma \subset C\tilde{e}$, что $m\gamma > 0$ и на этом множестве $(\Phi^{-1})' \geqslant \sigma$. Пусть F — замкнутое множество, принадлежащее $C\tilde{e}$, такое, что $mF > 2\pi - m\gamma$. Образуем множество $\tilde{F} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} R_\xi^n F$, которое, очевидно, принадлежит множеству $C\tilde{e}$, является множеством типа F_σ, инвариантно относительно R_ξ и имеет меру большую, чем $2\pi - m\gamma$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — пересечение множеств γ и $\tilde{F}$. Оно, очевидно, имеет положительную меру и на нем $(\Phi^{-1})' \geqslant \sigma$. Отсюда следует [3], что внешняя мера $m^*\Phi^{-1}(\tilde{\gamma}) \geqslant \sigma \cdot m\tilde{\gamma} > 0$, и, поскольку $\Phi^{-1}(\tilde{\gamma})$ есть часть множества $\Phi^{-1}(\tilde{F})$, то внешняя мера множества $\Phi^{-1}(\tilde{F})$ также положительна. Но множество $\Phi^{-1}(\tilde{F})$, будучи образом множества типа F_σ при непрерывном отображении Φ^{-1}, само является множеством типа F_σ, т. е. измеримо, и поэтому $m\Phi^{-1}(\tilde{F}) > 0$. Кроме того, множество $\Phi^{-1}(\tilde{F})$ инвариантно относительно автоморфизма T, и поскольку он эргодичен, то $m\Phi^{-1}(\tilde{F}) = m\Gamma$. Отсюда, так как $\Phi^{-1}(C\tilde{e})$ содержит в себе $\Phi^{-1}(\widetilde{F})$, следует, что множество $\Phi^{-1}(\widetilde{Ge})$ измеримо и имеет полную меру. Таким образом, мера множества $\Phi^{-1}(\widetilde{e})$, а следовательно, и ее части $\Phi^{-1}(e)$ равны нулю, и теорема доказана.

1.4. *Следствие* 1. *Для произвольного иррационального числа ξ между нулем и единицей существует непрерывный, неэргодический автоморфизм окружности с числом вращения ξ.*

Действительно, пусть f — определенная на всей оси строго возрастающая, непрерывная, но не абсолютно непрерывная функция, производная которой больше нуля на некотором множестве положительной меры, и такая, что

$$f(x+2\pi)=f(x)+2\pi. \tag{1}$$

Такая функция f естественным образом порождает некоторое непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение единичной окружности C на единичную окружность C_1.

Определим отображение T окружности C_1 на себя следующим образом:

$$T\theta=fR_\xi f^{-1}\theta,$$

где R_ξ — отображение поворота окружности C на угол $2\pi\xi$.

Очевидно, T — сохраняющий ориентацию, непрерывный автоморфизм окружности C_1, поскольку такими свойствами обладают отображения f, R_ξ и f^{-1}.

Имеем

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n\theta=f\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} R_\xi^n f^{-1}\theta.$$

Учитывая непрерывность отображения f и то, что цикл каждой точки $f^{-1}\theta\in C$, порожденный отображением R_ξ, всюду плотен на окружности C, заключаем, что цикл каждой точки $\theta\in C_1$, порожденный автоморфизмом T, всюду плотен на C_1.

Функцией Данжуа для автоморфизма T, очевидно, служит f^{-1}, которая автоморфизму T окружности C_1 сопоставляет отображение поворота на угол $2\pi\xi$ на окружности C, т. е. число вращения автоморфизма T равно ξ, и остается убедиться, что T не является эргодическим автоморфизмом. Допустим обратное, пусть T является эргодическим автоморфизмом окружности C_1. Тогда из теоремы 1, в силу того, что $\Phi^{-1}=f$ имеет отличную от нуля производную на множестве положительной меры, будет следовать, что f является абсолютно непрерывной функцией. Это противоречит предположению и, следовательно, T не является эргодическим автоморфизмом.

Замечание. Повторяя доказательство необходимости условия теоремы 1, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть T — эргодический автоморфизм замкнутой кривой Γ, а f — некоторое обратимое, непрерывное отображение Γ на Γ_1, которое автоморфизму T сопоставляет автоморфизм $T_1=fTf^{-1}$ замкнутой кривой Γ_1*

Если T_1 обладает свойством N и $(f^{-1})' \neq 0$ на некотором множестве положительной меры, то f^{-1} абсолютно непрерывна.

Следствие 2. Если автоморфизм T замкнутой кривой Г обладает свойством N и имеет иррациональное число вращения ξ, то из абсолютной непрерывности Φ^{-1} следует абсолютная непрерывность Φ.

Действительно, по теореме Зарецкого производная функции Φ отлична от нуля почти всюду, так как Φ^{-1} абсолютно непрерывна, и остается применить лемму 2 к отображению R_ξ окружности на себя, которое, как уже было замечено, является эргодическим отображением.

Следствие 3. Если эргодический автоморфизм T с иррациональным числом вращения ξ обладает свойством N, то Φ и Φ^{-1} для этого автоморфизма одновременно либо абсолютно непрерывны, либо не являются абсолютно непрерывными, причем в последнем случае почти всюду $\Phi' = (\Phi^{-1})' = 0$.

В самом деле, рассуждая так же, как и при доказательстве следствия 2, из абсолютной непрерывности Φ заключаем абсолютную непрерывность Φ^{-1}, и наоборот. Поэтому, если Φ не является абсолютно непрерывной, то Φ^{-1} тоже не является абсолютно непрерывной и, в силу леммы 2, учитывая эргодичность автоморфизма T и то, что R_ξ обладает свойством N, заключаем, что производная функции Φ^{-1} не может быть отличной от нуля на множестве положительной меры. Аналогичным образом, поскольку T обладает свойством N, применяя лемму 2 к эргодическому отображению R_ξ, убеждаемся, что производная функции Φ также равна нулю почти всюду.

Следствие 4. Существуют эргодические автоморфизмы окружности, не обладающие свойством N.

Действительно, пусть f — удовлетворяющая условию (1) строго возрастающая и абсолютно непрерывная функция, обратная f^{-1} которой не является абсолютно непрерывной функцией. Рассмотрим, как и при доказательстве следствия 1, отображение $T = fR_\xi f^{-1}$ окружности на себя. Из достаточного условия теоремы 1, в силу абсолютной непрерывности $f = \Phi^{-1}$, следует, что T — эргодический автоморфизм. Если предположить, что T обладает свойством N, то из следствия 3 будет вытекать, что обе функции f и f^{-1} абсолютно непрерывны, что противоречит предположению, и следовательно T не обладает свойством N.

1.5. Введем в качестве параметра на Г длину дуги s, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки так, чтобы возрастанию s соответствовал обход области D слева. При этом будем считать, что параметр s, изменяясь непрерывно, принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$ так, однако, что разность значений, соответствующих одной и той же точке, кратна l, где l — длина кривой Г.

Каждой упорядоченной паре точек θ_1, θ_2 кривой Г мы будем относить ту из двух образуемых ими дуг, для всех точек θ которой обход θ_1, θ, θ_2 является положительным.

В терминах упомянутого выше параметра любой сохраняющий ориентацию непрерывный автоморфизм описывается заданной на всей оси вещественной функцией $g(s)$, которая определяется следующим образом: для каждого s $g(s) = s +$ длина дуги $(\theta, T\theta)$, где θ—та единственная на Г точка, параметр которой равен s. Очевидно, что определенная таким образом функция $g(s)$ является непрерывной, строго возрастающей и периодической в том смысле, что удовлетворяет условию

$$g(s+l) = g(s) + l.$$

Обратно, каждая обладающая этими свойствами функция $g(s)$ порождает, естественным образом, непрерывный и сохраняющий ориентацию автоморфизм кривой Г.

1.6. Пусть

$$\frac{m_k}{n_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

—k-ая подходящая дробь иррационального числа ξ, и пусть существует такое положительное число $\lambda < 1$, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{n_k^{\lambda}} = 0. \tag{2}$$

Теорема 2. Если вторая производная функции $g(s)$, соответствующей автоморфизму T, удовлетворяет условию Липшица, а число вращения ξ автоморфизма T удовлетворяет условию (2), то автоморфизм T—эргодический.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из сопоставления достаточного условия теоремы 1 с результатами работы [4], из которой следует, что в условиях теоремы 2 функция Φ^{-1}, соответствующая автоморфизму T, непрерывно дифференцируема.

Замечание. Из следствия 1 вытекает, что теорема 2 станет неверной, если снять условие гладкости автоморфизма T.

1.7. В работе [5] В. И. Арнольдом построен пример аналитического отображения A окружности на себя с иррациональным числом вращения ξ, для которого функция Φ не является абсолютно непрерывной. Так как A обладает свойством N, то из следствия 2 вытекает, что и Φ^{-1} не является абсолютно непрерывной. Кроме того, применяя лемму 2 к эргодическому отображению R_ξ, убеждаемся, что производная функции Φ почти всюду равна нулю. С другой стороны, легко доказать, что таким свойством обладает и обратная функция Φ^{-1}.

В самом деле, в силу периодичности функции $\Phi(s)$ в указанном выше смысле, достаточно показать, что производная функции Φ^{-1} равна нулю почти всюду на отрезке $[a, b]$, где $[a, b]$—область значений функции $\Phi(s)$, когда s меняется на отрезке $[0, l]$. Пусть M—множество всех $s \in [0, l]$, для которых $\Phi'(s) = 0$. Имеем $mM = l$. В силу монотонности Φ^{-1} мера множества точек из $[a, b]$, где производные числа этой функции бесконечны, равна нулю, т. е. $m\Phi(M)=0$, следовательно, $mC\Phi(M)=b-a$. Покажем, что производная функции Φ^{-1} почти всюду на $C\Phi(M)$ равна нулю. Допустим обратное, пусть $(\Phi^{-1})' \neq 0$ на некотором множестве положительной меры. Тогда существуют такое число $\sigma > 0$ и такое множество γ положительной меры, что на этом множестве $(\Phi^{-1})' \geqslant \sigma$. Пусть F — замкнутое множество положительной меры, принадлежащее множеству γ, тогда $\Phi^{-1}(F)$ измеримо, принадлежит множеству CM, следовательно $m\Phi^{-1}(F)=0$. С другой стороны [3], $m\Phi^{-1}(F) \geqslant \sigma \cdot mF > 0$. Противоречие показывает, что $(\Phi^{-1})'=0$ почти всюду на $[a, b]$.

Таким образом, почти всюду $\Phi' = (\Phi^{-1})'=0$.

Является ли A эргодическим или нет—нам не удалось выяснить, но тем не менее из этого примера можно вывести следующее заключение: либо условие на производную функции Φ^{-1} в теореме 1 не является излишним (случай эргодичности A), либо оправдано ограничение на число вращения ξ в теореме 2 (случай неэргодичности A).

Отметим также, что совокупность иррациональных чисел из (0,1), удовлетворяющих условию (2), образует множество полной лебеговской меры.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 11,II.1967

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԻ ԷՐԳՈԴԻԿՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԼԱՐԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵՅԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ: I

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները՝

1. Որպեսզի փակ կորի վրա որոշված անընդհատ և ուղղությունը պահպանող T *ավտոմորֆիզմը լինի էրգոդիկ, բավարար է, որ նրան համապատասխանող Դանժուայի ֆունկցիայի հակադարձը՝* Φ^{-1}*-ը լինի բացարձակ անընդհատ, իսկ եթե* Φ^{-1}*-ի ածանցյալը զրոյից տարբեր է մի որևէ դրական չափի բազմության վրա, ապա այդ պայմանը նաև անհրաժեշտ է։*

2. Եթե T *ավտոմորֆիզմի պտտման թիվը իռացիոնալ է և բավարարում է (2) պայմանին, իսկ նրանով ծնված* $g(s)$ *ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, ապա* T*-ն էրգոդիկ է։*

Ցույց է տրվում նաև, որ էրգոդիկության համար անհրաժեշտ է որպեսզի T*-ի պտտման թիվը լինի իռացիոնալ։*

S. G. HOVSEPIAN

ON THE ERGODICITY OF CONTINEOUS AUTOMORPHISMS AND THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM FOR THE VIBRATING STRING EQUATION. I

Summary

Following two theorems are proved in the paper:

1. Let T be contineous and direction preserving automorphism, defined on a closed curve. In order T be ergodic, it is sufficient, that the corresponding Denjoy's function's inversion Φ^{-1} be absolute contineous. If the derivative of Φ^{-1} on some set of positive measure is not equal to zero, then this condition is also necessary.

2. If the rotation number of T is irrational and satisfies condition (2), and the second derivative of $g(s)$ function generated by T satisfies Lipshitz condition, then it follows that T is ergodic.

Also it is shown, that ergodicity implies the rotation numbers of T to be irrational.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Denjoy.* Sur les courbes définies par les équations différentielles à al surface du tore, Journ. de Math., XI, Fasc. IV (1932), 333—375.
2. *H. Poincaré.* Sur les courbes définies par les équations différentiales, Journ. Math. pures et appl., 1 (1885), 167—244.
3. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М. (1957).
4. *A. Finzi.* Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 67 (3) (1950), 243—305.
5. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели. 1, Об отображениях окружности на себя, Известия АН СССР, сер. матем., 25 (1961), 21—86.