ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

С. А. АКОПЯН

ТЕОРЕМА О ДВУХ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА H_p

Хорошо известно, что ограниченная в правой полуплоскости аналитическая функция, непрерывная вплоть до границы, обладает следующим свойством: если

$$|f(iy)| \leqslant M_1 < +\infty, \quad |f(-iy)| \leqslant M_2 < +\infty \quad (y > 0),$$

то в каждой точке $z = re^{i\varphi}$ $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$|f(re^{i\varphi})| \leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Пусть H_p — класс функций, аналитических в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \right\} < +\infty \quad (p > 0).$$

Известно, что если $f(z) \in H_p$, то почти всюду существуют граничные значения $f(iy)$ $(-\infty < y < +\infty)$ и $f(iy) \in L_p(-\infty, +\infty)$.

Цель настоящей заметки — доказать, что функции класса H_p обладают свойством, аналогичным вышеприведенному. А именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $f(z) \in H_p$ $(p > 0)$ *и*

$$\int_0^{+\infty} |f(iy)|^p \, dy \leqslant M_1 < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |f(-iy)|^p \, dy \leqslant M_2 < +\infty,$$

тогда

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \leqslant M^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Приведем доказательство сначала для случая $p = 2$.

Пусть $p = 2$ и $f(z) \in H_2$, т. е. $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$ и удовлетворяет условию

$$\sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 \, dy \right\} < +\infty.$$

Известно [1], что этот класс и класс $\overline{H}_2$ функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr \right\} < +\infty,$$

совпадают.

Пределы в среднем

$$\underset{\varphi \to \frac{\pi}{2} - 0}{\text{l. i. m.}} f(re^{i\varphi}) = f(ir),$$

$$\underset{\varphi \to -\frac{\pi}{2} + 0}{\text{l. i. m.}} f(re^{i\varphi}) = f(-ir)$$

существуют почти всюду и $f(\pm ir) \in L_2(0, +\infty)$.

Пусть

$$\int_0^{+\infty} |f(ir)|^2 dr \leqslant M_1 < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |f(-ir)|^2 dr \leqslant M_2 < +\infty.$$

Обозначим через $F^{(\pm)}(s)$ и $F(s;\varphi)$ преобразования Меллина функций $f(\pm ir)$ и $f(re^{i\varphi})$ в смысле

$$F^{(\pm)}(s) = \underset{a \to +\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{1/a}^{a} f(\pm ir) r^{s-1} dr; \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$$

$$F(s;\varphi) = \underset{a \to +\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{1/a}^{a} f(re^{i\varphi}) r^{s-1} dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \qquad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Известно ([2], [3, гл. VIII, стр. 508]), что

$$F(s;\varphi) = e^{-is\left(\varphi \mp \frac{\pi}{2}\right)} F^{(\pm)}(s), \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Из (1) имеем

$$\left|F\left(\frac{1}{2} + it; \varphi\right)\right|^2 = e^{2t\varphi} \left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2} + it\right) F^{(-)}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \quad (-\infty < t < +\infty).$$

По равенству Парсеваля

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F\left(\frac{1}{2} + it; \varphi\right)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t\varphi} \left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2} + it\right) F^{(-)}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| dt \equiv M(\varphi) \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Из (2) имеем

$$M\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\int_{0}^{+\infty}|f(-ir)|^2\,dr\leqslant M_1,$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{0}^{+\infty}|f(ir)|^2\,dr\leqslant M_2. \tag{3}$$

Пусть теперь φ_1 и φ_2 — произвольные значения, удовлетворяющие условию: $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_1<\varphi_2\leqslant\frac{\pi}{2}$.

По неравенству Буняковского имеем

$$M\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t(\varphi_1+\varphi_2)}\left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it\right)F^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2t\varphi_1}\left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it\right)F^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2t\varphi_2}\left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it\right)F^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\right\}^{1/2}=\sqrt{M(\varphi_1)\,M(\varphi_2)}.$$

Таким образом, $\log M(\varphi)$ — выпуклая функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, принимая во внимание (3), имеем

$$\log M(\varphi)\leqslant\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\pi}\log M_1+\frac{\varphi+\frac{\pi}{2}}{\pi}\log M_2,$$

т. е.

$$M(\varphi)\leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}\;M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Утверждение теоремы при $p=2$ установлено.

Пусть $p>0$ — произвольное число и $f(z)\in H_p$. Известно, что $f(z)$ допускает представление

$$f(z)=B(z)\,\varphi(z),$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке нулей функции $f(z)$, а $\varphi(z)\in H_p$ и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$. Очевидно, что функция $g(z)=[\varphi(z)]^{p/2}\in H_2$, но тогда [1] $g(z)\in\widetilde{H}_2$. Так как $|B(z)|\leqslant1$, то имеем

$$|f(z)|^p\leqslant|\varphi(z)|^p.$$

Поэтому

$$\int_{0}^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\leqslant\int_{0}^{+\infty}|\varphi(re^{i\varphi})|^p\,dr=\int_{0}^{\infty}|g(re^{i\varphi})|^2\,dr, \tag{4}$$

т. е.

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\right\}<+\infty.$$

Кроме того

$$\int_0^{+\infty}|\varphi(iy)|^p\,dy=\int_0^{+\infty}|f(iy)|^p\,dy\leqslant M_1<+\infty,$$

$$\int_0^{+\infty}|\varphi(-iy)|^p\,dy=\int_0^{+\infty}|f(-iy)|^p\,dy\leqslant M_2<+\infty.$$

Но для функции $[\varphi(z)]^{p/2}\in H_2$ по доказанному имеем

$$\int_0^{+\infty}|\varphi(re^{i\varphi})|^p\,dr\leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Принимая во внимание (4), получим утверждение теоремы.

Выражаю благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступило 28.I.1967

Ս. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

H_p ԴԱՍԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝ դիցուք $\operatorname{Re} z>0$ *աջ կիսահարթության մեջ* $H_p\,(p>0)$ *դասի ֆունկցիան բավարարում է*

$$\int_0^{+\infty}|f(iy)|^p\,dy\leqslant M_1<+\infty,\quad\int_0^{+\infty}|f(-iy)|^p\,dy\leqslant M_2<+\infty$$

պայմաններին, այդ դեպքում ճիշտ է նաև հետևյալ անհավասարությունը

$$\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}M_2^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right).$$

S. A. HAKOPIAN

TWO CONSTANTS THEOREM FOR THE FUNCTIONS BELONGING TO H_p

Summary

In this paper we prove following theorem: if $f(z)\in H_p\;(p>0)$ in the right half-plane and the conditions

$$\int_0^{\infty}|f(iy)|^p\,dy\leqslant M_1,\quad\int_0^{\infty}|f(-iy)|^p\,dy\leqslant M_2,$$

are satisfied, then the inequality

$$\int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^p\, dr \leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$$

is valid.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* и *А. Е. Аветисян.* Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сибирский Матем. журнал, 1, № 3 (1960), 382—426.
2. *С. А. Акопян.* О параметрических представлениях некоторых классов функций, голоморфных в угловых областях, ДАН Арм. ССР, XL, № 2 (1965), 71—80.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Издательство „Наука", М. (1966).