ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

О СЕГМЕНТНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Введение. Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D, имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\varphi}$ (φ—вещественная), если посредством этой функции сегмент, соединяющий $e^{i\varphi}$ с точкой, лежащей в D, отображается на спрямляемую кривую. Если радиус с концом в $e^{i\varphi}$ отображается на спрямляемую кривую, то говорят, что функция имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\varphi}$.

Ясно, что в данной точке из конечности сегментного изменения вытекает, что функция имеет конечное радиальное изменение, а из последнего вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

Берлинг [1] доказал, что если функция регулярна в D и имеет конечный интеграл Дирихле, то она имеет конечное радиальное изменение в каждой точке единичной окружности C, исключая, быть может, такое множество, внешняя емкость которого равна нулю. В дальнейшем Цудзи [2] показал, что в теореме Берлинга слова „конечное радиальное изменение" можно заменить словами „конечное сегментное изменение" и утверждение теоремы останется верным.

В работах Карго [3, 4] эти вопросы были рассмотрены для произведений Бляшке.

По теореме Рисса произведение Бляшке почти всюду имеет радиальные граничные значения с модулем, равным единице, и можно было ожидать, что эти функции почти всюду будут иметь конечное радиальное изменение. Однако Рудином [5] был построен пример произведения Бляшке, которое почти всюду имеет бесконечное радиальное изменение. Значит следовало найти условие, при котором произведение Бляшке в точке $e^{i\varphi}$ имеет конечное сегментное изменение. Фростманом [6] доказано, что если $\{z_n\}$—последовательность Бляшке удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|} < +\infty \tag{1.1}$$

в некоторой точке $e^{i\varphi}$, то произведение Бляшке $B(z, \{z_n\})$ в точке $e^{i\varphi}$ имеет радиальное предельное значение с модулем, равным единице.

Карго [3] показал, что если (1.1) выполняется, то в точке $e^{i\varphi}$ $B(z, \{z_n\})$ имеет конечное радиальное изменение; более того, $B(z, \{z_n\})$ имеет конечное сегментное изменение [4].

В качестве следствия им было получено также, что если последовательность Бляшке удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|)^{\alpha} < +\infty \tag{1.2}$$

для некоторого α $(0<\alpha<1)$, то произведение Бляшке $B_{\alpha}(z, \{z_n\})$ имеет конечное сегментное изменение в каждой точке C, кроме, быть может, множества, внешняя α-хаусдорфова мера которого есть нуль.

Это вытекает из того, что при условии (1.2) условие (1.1) выполняется вне такого множества.

Броманом [7] были рассмотрены классы S_{α} регулярных функций, ряд Тейлора $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ которых удовлетворяет условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{\alpha} < +\infty$ для некоторого α $(0<\alpha<1)$. Тогда функция, регулярная в D, принадлежит S_1 в том и только в том случае, если она имеет конечный интеграл Дирихле. Броман доказал, что если функция f принадлежит $S_{\alpha}(0<\alpha<1)$, то она имеет конечную радиальную вариацию вне некоторого множества, внешняя $(1-\alpha)$ емкость которого—нуль.

Поскольку Карлесоном [8] показано, что $B_{\alpha}(z, \{z_n\}) \in S_{\alpha}$, то Карго в работе [4] предполагает, что функции класса S_{α} должны иметь конечное сегментное изменение вне некоторого множества, $(1-\alpha)$ внешняя емкость которого—нуль.

В настоящей заметке, опираясь на интегральное представление М. М. Джрбашяна для классов функций $H_2(\alpha)$, устанавливается оценка для одного интеграла от модуля производной для функций класса S_{α}. Эта оценка позволяет доказать, что функции класса S_{α} имеют конечное сегментное изменение вне множества, $(1-\beta)$ емкость которого—нуль, где $\beta<\alpha$ любое.

2. Основная теорема. Скажем, что голоморфная в D функция принадлежит классу $H_2(\alpha)$, $(\alpha>-1)$, если

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{\alpha} |f(\rho e^{i\gamma})|^2 \rho d\rho d\gamma < +\infty.$$

Известно [9], что функции класса $H_2(\alpha)$ допускают интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)\,|dt|}{(1-z\bar{t})^{\frac{\alpha+3}{2}}}, \tag{2.1}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная суммируемая с квадратом модуля функция на $|t|=1$.

Пусть регулярная в D функция $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу S_{α} $(0<\alpha<1)$, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^\alpha < +\infty. \tag{2.2}$$

Условие (2.2) эквивалентно условию

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{1-\alpha} |f'(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho d\rho d\varphi < +\infty, \tag{2.3}$$

поскольку

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{1-\alpha} |f'(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho d\rho d\varphi = \int_0^1 (1-\rho^2)^{1-\alpha} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \rho^{2n-1} \right\} \rho d\rho,$$

и имеем при $n \to \infty$

$$n^2 \int_0^1 (1-\rho^2)^{1-\alpha} \rho^{2n} d\rho \sim n^\alpha.$$

Это значит, что если $f(z) \in S_\alpha$, то $f'(z) \in H_2(1-\alpha)$ и, согласно формуле (2.1), имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{4-\alpha}{2}}} |dt| \quad (|z| < 1). \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Пусть интегрируемая функция* $\omega(r)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{1-r} dr < +\infty, \tag{2.5}$$

и $f \in S_\alpha$. *Тогда интеграл*

$$V_\omega(\varphi) = \int_0^1 \omega(r) |f'(re^{i\varphi})| dr \tag{2.6}$$

имеет конечное значение вне некоторого множества, $(1-\alpha)$ *внешняя емкость которого равна нулю.*

Доказательство. Пусть $E \subset [0,2\pi]$ — любое множество $(1-\alpha)$ положительной емкости. Значит существует мера μ, $\mu(E) = 1$ такая, что функция

$$U_\alpha(x, r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{|1 - re^{i(x-t)}|^{1-\alpha}} \tag{2.7}$$

$(0 \leqslant r < 1)$ остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1$.

Итак, имеем

$$U_\alpha(x, r) \leqslant c_1 \tag{2.8}$$

$(0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1)$, где $c_1 < +\infty$ не зависит от x и r.

Теперь рассмотрим следующий интеграл:

$$A_\omega = \int_0^{2\pi} V_\omega(t)\, d\mu(t), \tag{2.9}$$

и заметим, что теорема будет доказана, если мы покажем, что этот интеграл конечен, поскольку из бесконечности $V_{\omega}(\varphi)$ на E вытекала бы бесконечность A_{ω}.

Из (2.6) и (2.4) имеем

$$A_{\omega} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 \omega(r)\left[\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(e^{i\gamma})|}{\left|1-re^{i(t-\gamma)}\right|^{\frac{4-\alpha}{2}}}\,d\gamma\right]dr\right\}d\mu(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \omega(r)\,dr\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(e^{i\gamma})|}{\left|1-re^{i(t-\gamma)}\right|^{\frac{4-\alpha}{2}}}\,d\gamma d\mu(t).$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Шварца, получаем

$$A_{\omega} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \omega(r)\,dr\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(e^{i\gamma})|^2\,d\gamma d\mu(t)}{|1-re^{i(t-\gamma)}|^{1-\alpha}}\right\}^{1/2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma d\mu(t)}{|1-re^{i(t-\gamma)}|^3}\right\}^{1/2}, \tag{2.10}$$

откуда, используя (2.5) и (2.8), легко заключаем, что

$$A_{\omega} \leqslant c_2\int_0^1\frac{\omega(r)}{1-r}\,dr \leqslant c_3,$$

где c_2 и c_3 — постоянные.

3. Следствие из основной теоремы. Пусть a — любая точка D.

Параметрическое уравнение сегмента, соединяющего точку a с точкой $e^{i\varphi}$, можно записать так:

$$z(r) = a + r(e^{i\varphi} - a) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1).$$

Тогда, если через $V_{\omega, a}(\varphi)$ обозначим интеграл

$$V_{\omega, a}(\varphi) = \int_0^1 \omega(r)\,|f'(z(r)|\,dr, \tag{3.1}$$

то

$$V_{\omega, a}(\varphi) \leqslant c V_{\omega}(\varphi), \tag{3.2}$$

где c зависит только от a. Действительно

$$1 - z(r)\bar{t}| = |1 - a\bar{t} - r\bar{t}(e^{i\varphi} - a)| \geqslant |1 - re^{i(\varphi-\theta)}| - |1-r|a \geqslant c|1 - re^{i(\varphi-\gamma)}|,$$

откуда следует (3.2). Значит по основной теореме $V_{\omega, a}(\varphi)$ имеет конечное значение вне множества, $(1-\alpha)$ внешняя емкость которого — нуль.

Заметим, что если в определении $V_{\omega, a}(\varphi)$ отсутствует функция $\omega(r)$, то конечность $V_{\omega, a}(\varphi)$ для некоторого φ означает, что функция f имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\varphi}$.

Теорема 2. *Если функция f из класса S_α, то она имеет конечное сегментное изменение всюду, кроме, быть может, такого множества, внешняя $(1-\beta)$ емкость которого равна нулю, где $0<\beta<\alpha$ — любое число.*

Действительно, тогда (2.8) выполняется, если вместо α подставить β, и аналогично можно оценить интеграл

$$V_\alpha(\varphi) = \int_0^1 |f'(z(r))|\,dr,$$

где роль функции $\omega(r)$ будет играть функция $(1-r)^{\alpha-\beta}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 19.I.67

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՍԵԳՄԵՆՏԱՅԻՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ասում են, որ բաց միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիան $e^{i\varphi}$ կետում ունի վերջավոր սեգմենտային փոփոխություն, եթե $e^{i\varphi}$ կետը շրջանի որևէ կետի հետ միացնող սեգմենտը այդ ֆունկցիայի միջոցով արտապատկերվում է ուղղելի կորի վրա։

Ապացուցված է, որ եթե $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ֆունկցիան բավարարում է $\sum_1^{\infty} |a_n|^2 n^\alpha < +\infty$ $(0<\alpha<1)$ պայմանին, ապա $f(z)$ ֆունկցիան բոլոր φ-երի համար ունի վերջավոր սեգմենտային փոփոխություն, բացի գուցե մի բազմությունից, որի $(1-\beta)$—արտաքին ունակությունը զերո է, որտեղ $0<\beta<\alpha$ կամայական թիվ է։

V. S. ZAKARIAN

ON THE SEGMENTAL VARIATION OF A CLASS OF ANALYTIC FUNCTION

Summary

Let us say that a function which is regular in the open unit disk has finite segmental variation at a point $e^{i\varphi}$ provided every line segment connecting $e^{i\varphi}$ to a point of disk is mapped onto a rectifiable curve by the function.

It is proved, if $f(z) = \sum_1^{\infty} a_n n^n$ satisfy the condition $\sum_1^{\infty} |a_n|^2 n^\alpha < +\infty$

$(0 < \alpha < 1)$ then it has a finite segmental variation except on a set whose outer capacity of order $1-\beta$ is zero, where $0 < \beta < \alpha$ is any number.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Beurling.* Ensembles exceptionnels, Acta Mathematica, vol. 72 (1940), 1—13.
2. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory, Tokyo (1959).
3. *G. T. Cargo.* The radial images of Blaschke products, The journal of the London Mathematical Society, vol. 36 (1961), 424—430.
4. *G. Cargo.* The segmental variation of Blaschke products, Duke Mathematical Journal, vol. 30 (1963), 143—149.
5. *W. Rudin.* The radial variation of analytic functions. Duke Math. Journal, vol. 22 (1955), 235—242.
6. *O. Frostman.* Sur les produits de Blascke, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, vol. 12 (1942), 169—182.
7. *A. Broman.* On two classes of trigonometrical series, Thesis, University of Uppsala (1947).
8. *L. Carleson.* On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Thesis, University of Uppsala (1950).
9. *M. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. института математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2 (1948).