ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

Д. М. ЧАУСОВСКИЙ

ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ НА ГРАФАХ

1. Операторный узел—фундаментальное понятие спектральной теории несамосопряженных операторов [1]. М. С. Лившиц показал, что понятие операторного узла адэкватно понятию открытой системы [2, 3], и это послужило толчком к работам по применению теории несамосопряженных операторов [4, 5].

В настоящей статье строится некоторый класс открытых систем на LC-графах, находятся связанные с ними операторные узлы, исследуется возможность реализации абстрактно заданного операторного узла с помощью LC-графа. При этом используются методы изучения RLC-графов, предложенные в [6]. Один подкласс рассматриваемого класса был ранее построен и изучен в [5].

2. *Открытой системой* $\tilde{F}$ (или линейным автоматом) называется совокупность двух линейных пространств $\tilde{E}$ и $\tilde{H}$, для которых определены линейные отображения R и S пространства $\tilde{E}$ в $\tilde{H}$ и пространства $\tilde{E}$ в себя. $\tilde{E}$ называется пространством входов и выходов, $\tilde{H}$—пространством внутренних состояний. Систему $\tilde{F}$ будем обозначать так: $\tilde{F}\left(\tilde{E}\begin{smallmatrix}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}\to\tilde{H}\end{smallmatrix}\right)$.

Операторный узел—это совокупность двух гильбертовых пространств E и H и трех линейных операторов T, Г, J, связанных соотношением $\mathrm{T}-\mathrm{T}^*=i\Gamma \mathrm{J}\Gamma^*$; при этом T действует из H в H, J — самосопряженный унитарный оператор в E, Г действует из E в H. Операторный узел обозначается так: $\begin{bmatrix}\mathrm{T} & \Gamma & \mathrm{J}\\ H & & E\end{bmatrix}$.

В дальнейшем через $\tilde{E}, \tilde{H}, \cdots$ мы будем обозначать линейные пространства вектор-функций вещественного аргумента t $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$, значения которых принадлежат гильбертовым пространствам $E, H, \cdots$ соответственно. По определению операторный узел $\begin{bmatrix}\mathrm{T} & \Gamma & \mathrm{J}\\ H & & E\end{bmatrix}$ *принадлежит открытой системе* $\tilde{F}\left(\tilde{E}\begin{smallmatrix}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow R\to\tilde{H}\end{smallmatrix}\right)$, если для каждого $\varphi^-\in\tilde{E}$ и $\psi=\mathrm{R}\varphi^-$ выполнены соотношения

$$i\frac{d\psi(t)}{dt}+\mathrm{T}\psi(t)=\Gamma\varphi^-(t),\ \ \mathrm{S}\varphi^-=\varphi^--i\mathrm{J}\Gamma^*\psi.$$

3. Пусть G—конечный ориентированный граф (в вопросах, относящихся к графам, мы придерживаемся терминологии [7, 8]; по терминологии [9] G—мультиграф). Отметим в нем n ребер, называемые далее *внешними*. Остальные ребра назовем *внутренними*. Множество внутренних ребер разобьем на два класса: *L—ребра* (обозначаемые q_{Li}, $1 \leqslant i \leqslant \mu$) и *$C$—ребра* (обозначаемые q_{Cj}, $1 \leqslant j \leqslant \nu$). Каждому внутреннему ребру поставим в соответствие положительное число, называемое *параметром* ребра. Параметры ребер q_{Li} обозначим L_i, параметры ребер q_{Cj} — через C_j. Граф G с отмеченными в нем внешними L- и C-ребрами, и набор параметров L_i, C_j образуют по определению *LC-граф*. Пусть число внешних ребер четно и равно $2m$. Половину внешних ребер назовем *входными* и обозначим через q_k^-, $1 \leqslant k \leqslant m$, остальные—*выходными* и обозначим через q_k^+, $1 \leqslant k \leqslant m$. Предположим, что g_1: не существует циклов, образованных только входными и еще разве лишь C-ребрами; g_2: для каждой пары ребер q_k^- и q_k^+ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ существует цикл, содержащий, кроме q_k^- и q_k^+, еще разве лишь C-ребра, и в этом цикле q_k^- и q_k^+ ориентированы одинаково.

Класс таких LC-графов назовем *классом* Ω. Заметим, что из g_1 и g_2 следует g_3: не существует сечений, состоящих только из выходных ребер и еще разве лишь L-ребер.

Теорема 1. *Пусть G — LC-граф класса Ω. Поставим в соответствие каждому входному ребру q_k^- две непрерывные комплексные функции $V_k^-(t)$, $I_k^-(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда каждому внутреннему ребру и каждому выходному ребру можно поставить в соответствие две функции V_{Li}, I_{Li}, V_{Cj}, I_{Cj}, V_k^+, I_k^+ (обозначения функций согласованы с обозначениями ребер), набор которых вместе с функциями V_k^-, I_k^- удовлетворяет условиям:*

K1. Для каждого цикла Q графа G $\sum\limits_{q\in Q} (-1)^{\delta(q)} V_q \equiv 0$, *где* $\delta(q)=1$,

если q—не входное ребро и его направление совпадает с направлением цикла или же q—входное ребро и его направление противоположно направлению цикла; в остальных случаях $\delta(q) = 0$.

K2. Для каждого сечения s графа G $\sum\limits_{q\in s} (-1)^{\varepsilon(q)} I_q \equiv 0$, *где* $\varepsilon(q) = 0$,

если направление q совпадает с ориентацией сечения, и $\varepsilon(q) = 1$ в остальных случаях.

K3. $$V_{Li} = L_i \frac{dI_{Li}}{dt},\ 1 \leqslant i \leqslant \mu;\quad I_{Cj} = C_j \frac{dV_{Cj}}{dt},\ 1 \leqslant j \leqslant \nu.$$

Функции, отвечающие внутренним и выходным ребрам, определяются однозначно функциями V_k^-, I_k^-, $1 \leqslant k \leqslant m$ и начальными условиями, согласованными с K1 и K2.

Доказательство. Условия g_1 и g_2 позволяют построить лес $\mathfrak{f}$ графа G (Лес графа—это совокупность деревьев, взятых по одному из каждой компоненты связности), такой, что

f_1: все входные ребра принадлежат f;

f_2: все выходные ребра суть хорды f;

f_3: любой другой лес, удовлетворяющий f_1 и f_2, содержит не более C — ребер чем f.

Условиями f_1, f_2, f_3 лес f определяется, вообще говоря, неоднозначно. Пусть L и C-ребра, входящие в f, таковы: q_{Li}, $1 \leqslant i \leqslant r$ и q_{Cj}, $1 \leqslant j \leqslant p$. Введем обозначения

$$V^- = \begin{bmatrix} V_1^- \\ \vdots \\ V_m^- \end{bmatrix}, \quad I^- = \begin{bmatrix} I_1^- \\ \vdots \\ I_m^- \end{bmatrix}, \quad V_L = \begin{bmatrix} V_{L1} \\ \vdots \\ V_{Lr} \end{bmatrix}, \quad I_L = \begin{bmatrix} I_{L1} \\ \vdots \\ I_{Lr} \end{bmatrix}, \quad V_C = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ \vdots \\ V_{Cp} \end{bmatrix},$$

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{C1} \\ \vdots \\ I_{Cp} \end{bmatrix},$$

$$V^+ = \begin{bmatrix} V_1^+ \\ \vdots \\ V_m^+ \end{bmatrix}, \quad I^+ = \begin{bmatrix} I_1^+ \\ \vdots \\ I_m^+ \end{bmatrix}, \quad \widetilde{V}_L = \begin{bmatrix} V_{L(r+1)} \\ \vdots \\ V_{L\nu} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{I}_L = \begin{bmatrix} I_{L(r+1)} \\ \vdots \\ I_{L\nu} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{V}_C = \begin{bmatrix} V_{C(p+1)} \\ \vdots \\ V_{C\nu} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{I}_C = \begin{bmatrix} I_{C(p+1)} \\ \vdots \\ I_{C\nu} \end{bmatrix}.$$

Напишем уравнения К1 и К2 для фундаментальной системы циклов и фундаментальной системы сечений, определяемых лесом f [10]. В матричной форме эти уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} &-A_{11}V^- + A_{12}V_L + A_{13}V_C + \widetilde{V}_L = 0, \quad I^- + B_{11}\widetilde{I}_L + B_{12}\widetilde{I}_C + B_{13}I^+ = 0, \\ &-A_{21}V^- + A_{22}V_L + A_{23}V_C + \widetilde{V}_C = 0, \quad I_L + B_{21}\widetilde{I}_L + B_{22}\widetilde{I}_C + B_{23}I^+ = 0, \quad (1) \\ &-A_{31}V^- + A_{32}V_L + A_{33}V_C + V^+ = 0, \quad I_C + B_{31}\widetilde{I}_L + B_{32}\widetilde{I}_C + B_{33}I^+ = 0. \end{aligned}$$

Матрицы

$$Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & U & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & U & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & U \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & U & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & U & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

являются соответственно фундаментальной цикломатической матрицей и матрицей сечений графа G (U—единичные матрицы надлежащих размеров). Известно [10], что $QS' = 0$. Отсюда $A_{ij} = -B_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$. Из условия f_3 следует, что $A_{22} = 0$, $B_{22} = 0$, а из условий g_1, g_2, g_3 последовательно получаем $A_{21} = 0$, $B_{23} = 0$, $A_{31} = U$.

Таким образом, система (1) имеет вид

$$-A_{11}V^- + A_{12}V_L + A_{13}V_C + \tilde{V}_L = 0,\ I^- + B_{11}\tilde{I}_L - I^+ = 0,$$
$$A_{23}V_C + \tilde{V}_C = 0;\ I_L + B_{21}\tilde{I}_L = 0, \tag{2}$$
$$-V^- + A_{33}V_C + V^+ = 0,\ I_C + B_{31}\tilde{I}_L + B_{32}\tilde{I}_C + B_{33}I^+ = 0.$$

Положив

$$L = \begin{vmatrix} L_1 \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown L_r \end{vmatrix},\ \tilde{L} = \begin{bmatrix} L_{r+1} \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown L_\mu \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} C_1 \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown C_p \end{bmatrix},\ \tilde{C} = \begin{vmatrix} C_{p+1} \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown C_\nu \end{vmatrix},$$

запишем уравнения КЗ в виде

$$V_L = L\frac{dI_L}{dt},\ \tilde{V}_L = \tilde{L}\frac{d\tilde{I}_L}{dt},\ I_C = C\frac{dV_C}{dt},\ \tilde{I}_C = \tilde{C}\frac{d\tilde{V}_C}{dt}. \tag{3}$$

Комбинируя уравнения (2) и (3), получим

$$\begin{bmatrix} \tilde{L} + A_{12}LA'_{12} & 0 \\ 0 & C + B_{32}\tilde{C}B'_{32} \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_{13} \\ B_{31} + B_{33}B_{11} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -B_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V^- \\ I^- \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} V^+ \\ I^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^- \\ I^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A_{33} \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} I_L \\ \tilde{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{21} & 0 \\ 0 & -A_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Положим $\Delta_L = \tilde{L} + A_{12}LA'_{12}$, $\Delta_C = C + B_{32}\tilde{C}B'_{32}$, $\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C \end{vmatrix}$. При помощи формулы Бинэ-Коши можно показать, что Δ_L, Δ_C, Δ — положительно определенные матрицы. Поэтому уравнение (4) может быть разрешено относительно $\tilde{I}$ и V_C, каковы бы ни были непрерывные функции V^- и I^-. Если определить V^+, I^+, I_L, $\tilde{V}_C$ равенствами (5), а V_L, $\tilde{V}_L$, I_C, $\tilde{I}_C$ — равенствами (3), мы получим набор функций, удовлетворяющих (2) и (3), а следовательно, и KI, K2, K3. Очевидно, все эти функции определяются однозначно функциями V^-, I^- и начальными условиями, согласованными с KI и K2.

4. Пусть E и H — координатные гильбертовы пространства, $\dim E = 2m$, $\dim H = \mu + \nu$. Сохраним обозначения предыдущего пункта. Введем в рассмотрение вектор-функции $\varphi^- = [V_1^- \cdots V_m^-,\ I_m^- \cdots I_1^-]'$, $\varphi^+ = [V_1^+ \cdots V_m^+,\ I_m^+ \cdots I_1^+]'$, $\psi = [\sqrt{L_1}\, I_{L1} \cdots \sqrt{L_\mu}\, I_{L\mu}, \sqrt{C_1}\, V_{C1} \cdots \cdots \sqrt{C_\nu}\, V_{C\nu}]'$. Очевидно, φ^-, $\varphi^+ \in \tilde{E}$, $\psi \in \tilde{H}$. Назовем эти функции входным, выходным и внутренним векторами. Из (4) и (5) следует, что при некоторых начальных условиях [4] $\varphi^+ = S\varphi^-$, $\psi = R\varphi^-$, где S и R—линейные операторы, действующие из $\tilde{E}$ в $\tilde{E}$ и из $\tilde{E}$ в $\tilde{H}$. Это означает, что

$\widetilde{E}$, $\widetilde{H}$, S, R образуют открытую систему $\widetilde{F}\left(\widetilde{E}\begin{smallmatrix}\nearrow \mathrm{S}\to\widetilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}\to\widetilde{H}\end{smallmatrix}\right)$. Ее мы будем называть открытой системой на LC-графе класса Ω.

5. Пусть E, H, H^0—гильбертовы пространства. Открытая система $\widetilde{F}^0\left[\widetilde{E}\begin{smallmatrix}\nearrow \mathrm{S}\to\widetilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}^0\to\widetilde{H}^0\end{smallmatrix}\right]$ называется основой открытой системы $\widetilde{F}\left(\widetilde{E}\begin{smallmatrix}\nearrow \mathrm{S}\to\widetilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}\to\widetilde{H}\end{smallmatrix}\right)$, если 1) существует линейный оператор P, действующий из H^0 в H, такой, что для каждого t и $\varphi^- \in \widetilde{E}\, R\varphi^-(t) = \mathrm{PR}^0\varphi^-(t)$, $\|R\varphi^-(t)\|_H = \|\mathrm{R}^0\varphi^-(t)\|_{H_0}$, 2) системе $\widetilde{F}^0$ принадлежит операторный узел.

Теорема 2. *Для открытой системы на LC-графе класса Ω существует основа. Операторный узел, принадлежащий основе, определяется топологией графа и параметрами ребер по формулам (7) (см. ниже).*

Сохраним обозначения п. 3 и п. 4. Пусть H^0—гильбертово пространство $\mu - r + p$ — мерных вектор-столбцов, в котором скалярное произведение $\langle g_1, g_2\rangle$ определено равенством $\langle g_1, g_2\rangle = g_2^* \Delta g_1$. Умножим уравнение (4) слева на $i\Delta^{-1}$. Получим

$$i\frac{dg(t)}{dt} + Tg(t) = \Gamma\varphi^-(t), \tag{6}$$

где

$$g=\begin{bmatrix}\widetilde{I}_L\\ V_C\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}0 & i\Delta_L^{-1}A_{13}\\ i\Delta_C^{-1}(B_{31}+B_{33}B_{11}) & 0\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}i\Delta_L^{-1}A_{11} & \\ 0 & -i\Delta_C^{-1}B_{33}J_m\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Здесь и ниже J_n — квадратная матрица $\begin{bmatrix}0 & & 1\\ & ⁄ & \\ 1 & & 0\end{bmatrix}$, порядок которой n каждый раз выбирается так, чтобы действия с применением J_n имели смысл. Если подчинить g надлежащим начальным условиям, то уравнение (6) определит линейный оператор R^0, действующий из $\widetilde{E}$ в $\widetilde{H}^0$, такой, что $g = \mathrm{R}^0\varphi^-$. Из (5) имеем $\varphi^+ = \mathrm{S}\varphi^-$, где

$$S\varphi^-(t) = \varphi^-(t) - iJ\,\Gamma^*\Delta\mathrm{R}^0\varphi^-(t) \tag{8}$$

($J = J_{2m}$). Таким образом, построена открытая система $\widetilde{F}^0\left(\widetilde{E}\begin{smallmatrix}\nearrow \mathrm{S}\to\widetilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}^0\to\widetilde{H}^0\end{smallmatrix}\right)$.

Рассматривая T, Γ, J как матрицы операторов T, Г, J, действующих из $\widetilde{H}^0$ в $\widetilde{H}^0$, из $\widetilde{E}$ в $\widetilde{H}^0$ и из $\widetilde{E}$ в $\widetilde{E}$ соответственно, имеем $T^+ = \Delta^{-1}T^*\Delta$, $\Gamma^+ = \Gamma^*\Delta$, где T^+ и Γ^+—матрицы операторов T^+ и Γ^+, сопряженных по отношению к операторам T и Г (* означает переход к комплексно сопряженной матрице). Непосредственно проверяется равенство $\mathrm{T} - \mathrm{T}^+ =$

$= i\Gamma J\Gamma^{+}$, так что E, H^0, T, Γ, J образуют операторный узел $\begin{bmatrix} T & \Gamma & J \\ H^0 & & E \end{bmatrix}$. В силу (6) и (8), которое может быть записано в виде $S\varphi^{-}(t) = \varphi^{-}(t) - iJ\Gamma^{+}R^0\varphi^{-}(t)$, этот узел принадлежит системе $\widetilde{F}^0$. Из (4) и второго равенства (5) $R = PR^0$ (определение R см. в п. 4), где оператор P представлен матрицей

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\widetilde{L}}\,B_{21} & 0 \\ \sqrt{\widetilde{L}} & 0 \\ 0 & \sqrt{C} \\ 0 & -\sqrt{\widetilde{C}}\,A_{23} \end{bmatrix}.$$

Равенство $\|R^0\varphi^{-}(t)\|_{H^0} = \|R\varphi^{-}(t)\|_H$ проверяется непосредственно. Мы показали, что $\widetilde{F}^0$ есть основа $\widetilde{F}$. Теорема доказана.

Основа $\widetilde{F}^0$ зависит от выбора леса f, поэтому мы будем называть ее *основой на лесе* f и обозначать $\widetilde{F}^0_f$.

6. Уравнения (2) и (3) приводят также к соотношению

$$iA\frac{d\psi}{dt} + B\psi = \Gamma_1\varphi^{-},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12}\sqrt{L} & \sqrt{\widetilde{L}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C} & B_{32}\sqrt{\widetilde{C}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = i\begin{bmatrix} \sqrt{L^{-1}} & B_{21}\sqrt{\widetilde{L}^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{13}\sqrt{C^{-1}} & 0 \\ 0 & (B_{31}+B_{33}B_{11})\sqrt{\widetilde{L}^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23}\sqrt{C^{-1}} & \sqrt{\widetilde{C}^{-1}} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = i\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{11} & 0 \\ 0 & -B_{33}I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом $BA^* - AB^* = i\Gamma_1 I\Gamma_1^*$, а область значений Γ_1 содержится в области значений A.

7. Пример. На схеме представлен LC-граф G класса Ω. Так как G—связный граф, то его лес состоит из одного дерева. Условиям f_1, f_2, f_3 удовлетворяет, например, дерево $\{q^{-}, q_{L1}, q_{C1}, q_{C2}\}$. Фундаментальная система циклов, отвечающая этому дереву, такова:

$$Q_1 = \{q_{L1}, q_{C1}, q_{C2}, q_{L2}\},\ Q_2 = \{q^{-}, q_{L1}, q_{C1}, q_{L3}\},\ Q_3 = \{q_{C1}, q_{C2}, q_{C3}\},$$

$$Q_4 = \{q^{-}, q_{C2}, q^{+}\}.$$

Цикломатическая матрица имеет вид

$$\begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} q^- & q_{L1} & q_{C1} & q_{C2} & q_{L2} & q_{L3} & q_{C3} & q^+ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

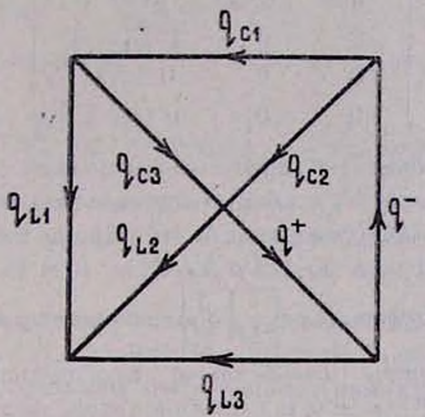

Рис. 1

В нашем случае $L=[L_1]$, $\tilde{L}=\begin{bmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{C}\,[C_3]$. Блоки

$$A_{ij} \text{ таковы: } A_{11}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{13}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{23}=[1 -1],\ A_{33}=[0\ 1].$$

Далее

$$\Delta_L=\tilde{L}+A_{12}LA'_{12}=\begin{bmatrix} L_1+L_2 & L_1 \\ L_1 & L_1+L_3 \end{bmatrix},\ \Delta_C=C+B_{32}\tilde{C}B'_{32}=$$

$$=\begin{bmatrix} C_1+C_3 & -C_3 \\ -C_3 & C_2+C_3 \end{bmatrix}.$$

Согласно (6) и (7) $i\dfrac{dg}{dt}+Tg=\Gamma\varphi^-$, где

$$g=\begin{bmatrix} I_{L2} \\ I_{L3} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix},\ T=i\begin{bmatrix} 0 & 0 & lL_3 & (L_1+L_3)\,l \\ 0 & 0 & -lL_2 & -L_1 l \\ cC_2 & cC_2 & 0 & 0 \\ -cC_1 & -cC_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma=i\begin{bmatrix} lL_1 & 0 \\ -l\,(L_1+L_2) & 0 \\ 0 & cC_3 \\ 0 & c\,(C_1+C_3) \end{bmatrix}.$$

Здесь $c=(C_1C_3+C_1C_3+C_2G_3)^{-1}$, $l=(L_1L_2+L_1L_3+L_2L_3)^{-1}$. Переход от вектора g к вектору $\psi=[\sqrt{L_1}\,I_{L1}, \sqrt{L_2}\,I_{L2}, \sqrt{L_3}\,I_{L3}, \sqrt{C_1}\,V_{C1}, \sqrt{C_2}\,V_{C2}, \sqrt{C_3}\,V_{C3}]'$ осуществляется так: $\psi=\mathrm{P}g$, где P — оператор с матрицей

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{L_1} & -\sqrt{L_1} & 0 & 0 \\ \sqrt{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{C_2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{C_3} & \sqrt{C_3} \end{bmatrix}.$$

8. Поставим обратную задачу: каким должен быть наперед заданный операторный узел N, чтобы он принадлежал основе некоторой открытой системы на LC-графе класса Ω? Кроме того, требуется дать способ построения графа по узлу N.

Теорема 3. *Пусть* $N=\begin{vmatrix} \mathrm{T} & \Gamma & \mathrm{J} \\ H^0 & & E \end{vmatrix}$ — *операторный узел, в котором E — координатное гильбертово пространство размерности $2m$, $J=J_{2m}$, $\dim H^0=a+b$ и скалярное произведение в H^0 определено равенством $\langle g_1; g_2\rangle=g_2^*\Delta g_1$, где $\Delta=\begin{bmatrix}\Delta_L & 0\\ 0 & \Delta_C\end{bmatrix}$; Δ_L и Δ_C — положительно определенные матрицы порядков a и b соответственно. Пусть операторы T и Γ имеют матрицы вида*

$$T=i\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a & b \end{matrix} & \\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & K \\ \hline M & 0 \end{array}\right] & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \end{array}, \quad \Gamma=i\begin{array}{c|c} \begin{matrix} m & m \end{matrix} & \\ \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & -QJ_m \end{array}\right] & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \end{array}.$$

Если матрицы Δ_L и Δ_C допускают представление

$$\Delta_L=\tilde{L}+A\,LA', \quad \Delta_C=C+B'\tilde{C}B \tag{9}$$

такое, что L, $\tilde{L}$, C, $\tilde{C}$ — положительные диагональные, и матрица

$$\begin{bmatrix} \Delta_L P & A & \Delta_L K & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & U & 0 \\ U & 0 & -Q'\Delta_C & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \tag{10}$$

является цикломатической, то узел N принадлежит основе некоторой открытой системы на LC-графе класса Ω, для которого (10) есть фундаментальная матрица циклов.

Доказательство. Построим граф G с цикломатической матрицей (10). Ребра, отвечающие столбцам подматрицы

$$\begin{bmatrix} \Delta_L P & A & \Delta_L K \\ 0 & 0 & B \\ U & 0 & -Q'\Delta_C \end{bmatrix},$$

образуют лес f графа G [10]. Назовем входными, выходными, C-ребрами и L-ребрами ребра, отвечающие столбцам матриц

$$\begin{bmatrix} \Delta_L P \\ 0 \\ U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Delta_L K & 0 \\ B & U \\ -Q'\Delta_C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

соответственно. Ребру, отвечающему k-му столбцу матрицы $\begin{bmatrix} \Delta_L K & 0 \\ B & U \\ -Q'\Delta_C & 0 \end{bmatrix}$ (матрицы $\begin{bmatrix} A & U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$), поставим в соответствие в качестве параметра ненулевой элемент k-го столбца матрицы $\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{bmatrix}$ (матрицы $\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \tilde{L} \end{bmatrix}$). Из строения (10) непосредственно усматривается, что граф G обладает свойствами g_1 и g_2, т. е. является LC-графом класса Ω. Если теперь выполнить построения п. 4, используя лес f, мы получим открытую систему $\tilde{F}$ и $\tilde{F}_f^0$ — ее основу, которой принадлежит узел N.

9. Матрицы A и B в равенствах (9), как блоки фундаментальной матрицы циклов (10), должны быть вполне унимодулярными [10]. Если найдено какое-нибудь представление Δ_L и Δ_C в виде (9), то проверка матрицы (10) на цикломатичность и построение графа G (если он существует) может быть осуществлена одним из разработанных для этого способов (см., например, [7]). Алгоритм, позволяющий представить Δ_L и Δ_C в виде (9) со вполне унимодулярными A и B (или доказать, что такого представления не существует) описан в [11]. Мы оценим размеры матриц A и B, а тем самым число шагов применения указанного алгоритма, учитывая не только полную унимодулярность A и B, но и то, что они суть блоки цикломатической матрицы. Так как число строк A равно a, а число столбцов B равно b, то остается оценить число столбцов A и число строк B. Число столбцов A совпадает с числом L-ветвей леса f, число строк B равно числу C-хорд. Покажем, что при выполнении условий теоремы 3 граф G, построенный в процессе доказательства теоремы, можно подчинить дополнительным ограничениям:

h_1: в графе G нет двуугольников, образованных C-ребрами;

h_2: для любых двух L-ветвей леса f существует цикл, содержащий одну из них и не содержащий другой;

h_3: сечение, определяемое L-ветвью, содержит не менее двух L-хорд (заметим, что сечение, определяемое L-ветвью, содержит только L-хорды; это видно из строения матрицы (10)). Действительно, указываемыениже преобразования а), б), в), г) графа G затрагивают лишь матрицы A, B, L, $\tilde{L}$, C, $\tilde{C}$, но не меняютматриц Δ_L и Δ_C, так что узел $\begin{bmatrix} T & \Gamma & J \\ H^0 & & E \end{bmatrix}$, принадлежащий основе, остается без изменения.

а). Если две C-хорды $\tilde{q}_{Cl}$ и $\tilde{q}_{Ck}$ образуют двуугольник, то можно удалить одну из них, приписав другой параметр $C_l + C_k$;

б) если C-ветвь q_{Cl} и C-хорда $\tilde{q}_{Ck}$ образуют двуугольник, то можно удалить хорду, приписав ветви параметр $C_l + C_k$;

в) если две L-ветви леса q_{Ll}, q_{Lk} входят в одни и те же циклы, то одну из них можно стянуть*, приписав другой параметр $L_l + L_k$;

г) если L-ветвь q_{Ll} и L-хорда $\tilde{q}_{Lk}$ образуют сечение, то ветвь можно стянуть, приписав хорде параметр $L_l + L_k$.

Требуемые оценки следуют из теоремы 4.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{f}$ — *лес графа* G *класса* Ω, *удовлетворяющий условиям* f_1, f_2, f_3 (*п.* 3) *и* h_1, h_2, h_3. *Если число* L-*хорд и число* C-*ветвей равно соответственно* a *и* b, *то число* L-*ветвей не превышает* $\frac{1}{2}a(a-1)$, *число* C-*хорд не превышает* $\frac{1}{2}b(b-1)$.

Доказательство. 1. Оценку числа L-ветвей докажем индукцией по a. Для $a=0$ и $a=1$ она очевидна, так как в силу h_3 $\mathfrak{f}$ вообще не имеет L-ветвей. Пусть оценка верна для $a=n$, а граф G, удовлетворяющий условиям теоремы, имеет $n+1$ L-хорду. Удалим одну L-хорду. Получим граф G' с тем же лесом $\mathfrak{f}$, содержащий n L-хорд и удовлетворяющий f_1, f_2, f_3. Если условия h_2, h_3 не нарушены, то, по предположению, $\mathfrak{f}$ содержит не более $\frac{n(n-1)}{2}$ L-ветвей, а значит, и не более $\frac{n(n+1)}{2}$ L-ветвей. Условия h_2, h_3 могут быть нарушены лишь в двух случаях: а) две (и только две!) L-ветви леса $\mathfrak{f}$ в графе G' входят в одни и те же циклы; б) появляются сечения, каждое из которых состоит из одной L- ветви и одной L-хорды. Стянем одну из L-ветвей, упомянутых в а), и все L-ветви упомянутые в б). При этом всего будет стянуто не более n L-ветвей. Образовавшийся граф G'' и его лес $\mathfrak{f}''$, полученный из $\mathfrak{f}$ таким стягиванием, удовлетворяют условиям f_1, f_2, f_3 и h_1, h_2, h_3. Кроме того, G'' имеет n L-хорд. По предположению индукции $\mathfrak{f}''$ содержит не более $\frac{1}{2}n(n-1)$ ветвей. Поэтому $\mathfrak{f}$ содержит не более $\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$ L-ветвей. 2. Оценивая число C-хорд, заметим, что при добавлении к $\mathfrak{f}$ C-хорды образуется цикл, состоящий только из C-ребер. Множество всех C-ветвей леса $\mathfrak{f}$ распадается на несколько компонент связности $G_1, G_2 \cdots, G_s$. Пусть они содержат $m_1, m_2 \cdots, m_s$ ребер и, следовательно, m_1+1, $m_2+1, \cdots, m_s+1$ вершин. Число пар вершин в каждой компоненте связности G_k, исключая пары, состоящие из концов одной и той же C-ветви, равно

* Стягивание ребра — удаление ребра с последующим отождествлением инцидентных ему вершин.

$\frac{m_k(m_k-1)}{2}$. Так как C-хорды не могут соединять вершины, принадлежащие разным компонентам, то общее количество C-хорд не более $\sum_{k=1}^{s}\frac{m_k(m_k-1)}{2}$. Так как $m_1+m_2+\cdots+m_s=b$, то $\sum_{k=1}^{s}\frac{m_k(m_k-1)}{2}<\frac{b(b-1)}{2}$, что и требовалось доказать.

Как нетрудно показать, верхняя граница числа C-хорд — точная. Верхняя граница числа L-ветвей, по-видимому, может быть улучшена.

Приношу глубокую благодарность А. Г. Руткасу за внимание к этой работе.

Донецкий государственный
университет

Поступило 20.XI.66

Դ. Մ. ՉԱՈՒՍՈՎՍԿԻ

ԲԱՑ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Սույն հոդվածում կառուցված է բաց սիստեմների որոշ դաս LC-գրաֆների վրա, գտնված են նրանց հետ կապված օպերատորային հանգույցները, հետազոտված է արտաքինից տրված օպերատորային հանգույցի իրականացման հնարավորությունը LC-գրաֆի օգնությամբ։

D. M. CHAUSOVSKY

OPEN SYSTFMS ON GRAPHS

Summary

The article deals wilh a class of open systems on LG-graphs and corresponding operator nodes.

The possibility of realization of a given operator node by means of LC-graphs is under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Бродский, Ю. Л. Шмульян.* Инвариантные подпространства линейного оператора и делители его характеристической функции, УМН, XIX, 1 (115) (1964), 143—150.
2. *М. С. Лившиц.* О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи, Изв. АН СССР, сер. матем., 27,5 (1963), 993—1030.
3. *М. С. Лившиц.* Открытые системы как линейные автоматы, Изв. АН СССР, сер. матем., 27,5 (1963), 1215—1228.
4. *М. С. Лившиц.* Операторы, колебания, волны (открытые системы), „Наука" (1966).
5. *А. Г. Руткас.* Несамосопряженные операторы в теории многополюсников, записки механико-математического факультета ХГУ и Харьковского матем. общ-ва, (1966).

6. *David P., Brown*. Derivative-explicit differential equations for RLC-graphs, J. Franklin Inst. (1963), 275, № 6.
7. *R. Gould*. Graphs and vector spaces, J. Math. and Phys., v. 37, Oct. (1958).
8. *Myril B. Reed*. The Seg: A new class of subgraphs, IRE Trans. on C. T., v. CT-8, March (1961), 17—22.
9. *К. Берж*. Теория графов и ее применения, ИИЛ (1962).
10. *С. Сешу, Н. Балабанян*. Анализ линейных цепей, Госэнергоиздат (1963).
11. *Z. Winter*. A note on matrix factorization, IRE Trans. on C. T., v. CT-7, March (1960).