

Յ. В. ЧЕЛИДЗЕ

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ МЕТОДАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
(A^*) И ($C_{\alpha, \beta}^*$) ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть α и β — неотрицательные числа, а λ — число, большее единицы. Функцию $f(t, \tau)$, заданную в области $Q = [0 \leq t < +\infty, 0 \leq \tau < +\infty]$, будем называть $C_{\alpha, \beta}^*$ -интегрируемой, если она интегрируема по Лебегу в области $[0 \leq t \leq \alpha, 0 \leq \tau \leq b]$ и существует конечный предел

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} F_{\alpha, \beta}(x, y),$$

где

$$F_{\alpha, \beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha} \left(1 - \frac{\tau}{y}\right)^{\beta} f(t, \tau) dt d\tau,$$

причем символом $(x, y) \rightarrow \infty$ обозначено такое стремление x и y к $+\infty$, при котором $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{x}{y} \leq \lambda$. Этот предел будем обозначать

$$(C_{\alpha, \beta}^*) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t, \tau) dt d\tau.$$

Далее, пусть функция $f(t, \tau)$, определенная в области Q , интегрируема по Лебегу в любой области $[0 \leq t \leq \alpha; 0 \leq \tau \leq b]$. Если для любых фиксированных $p > 0, q > 0$ существуют двойной интеграл

$$f^*(p, q) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-pt - q\tau} f(t, \tau) dt d\tau$$

и конечный предел $\lim_{(p, q) \rightarrow 0} f^*(p, q)$, то $f(t, \tau)$ мы назовем A^* -интегрируемой на Q , где символом $(p, q) \rightarrow 0$ обозначено такое стремление p и q к 0, при котором $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{p}{q} \leq \lambda$. Этот предел будем обозначать так:

$$(A^*) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t, \tau) dt d\tau.$$

Определение 1. Функцию $F(t, \tau)$, заданную в области Q , мы будем называть квази-ограниченной на Q , если существуют такие числа $M > 0$ и $\nu > 0$, что

$$|F(t, \tau)| < M \text{ при } t \geq \nu, \tau \geq \nu.$$

Определение 2. Функцию $F(t, \tau)$, заданную в области Q , мы назовем квази-неотрицательной, если существует такое число $\nu > 0$, что

$$F(t, \tau) > 0 \text{ при } t > \nu, \tau \geq \nu.$$

Определение 3. Функцию $f(t, \tau)$, заданную в области Q , мы будем называть функцией класса $D_{\alpha, \beta}^*$, если $F_{\alpha, \beta}(x, y)$ квази-ограничена в Q и выполнены следующие условия:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+\beta+2}} \int_0^x t^{\alpha} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt = 0$$

равномерно по τ на любом отрезке $0 \leq \tau \leq \tau_0$,

$$2) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^{\alpha+\beta+2}} \int_0^y \tau^{\beta} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) d\tau = 0$$

равномерно по t на любом отрезке $0 \leq t \leq t_0$.

Теорема. Если функция $f(t, \tau)$ принадлежит классу $D_{\alpha, \beta}^*$ и A^* -интегрируема, то она будет $C_{\alpha+1, \beta+1}^*$ -интегрируемой и имеет место равенство

$$(C_{\alpha+1, \beta+1}^*) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t, \tau) dt d\tau = s,$$

где

$$s = (A^*) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t, \tau) dt d\tau.$$

Доказательство. Функцию $f^*(p, q)$ можно представить в следующем виде:

$$f^*(p, q) = \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau.$$

Можно показать, что для любого $\nu > 0$

$$\lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} p^{\alpha+1} q^{\beta+1} \int_0^{\nu} dt \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) d\tau = 0,$$

$$\lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} p^{\alpha+1} q^{\beta+1} \int_0^{\nu} d\tau \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt = 0,$$

$$\lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} p^{\alpha+1} q^{\beta+1} \int_0^{\nu} \int_0^{\nu} t^{\alpha} \tau^{\beta} e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow \infty} f^*(p, q) = \lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau. \quad (1)$$

Так как

$$\lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} f^*(p, q) = s,$$

то, в силу (1), имеем

$$\lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = s.$$

Заменяя p и q соответственно через $(r+1)p$ и $(\mu+1)q$, где r и μ — положительные числа, получим

$$\lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} \frac{(r+1)^{\alpha+1} (\mu+1)^{\beta+1} p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} e^{-(r+1)pt - (\mu+1)q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = s.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} (e^{-pt})^r (e^{-q\tau})^{\mu} e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = \\ & = \frac{s}{(r+1)^{\alpha+1} (\mu+1)^{\beta+1}} = \frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 u^r v^{\mu} \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{v} \right)^{\beta} dudv. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть теперь $Q(u, v)$ — произвольный полином от u и v . Тогда, в силу (2), имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{(p, q)_{\lambda} \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} Q(e^{-pt}, e^{-q\tau}) e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = \\ & = \frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 Q(u, v) \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{v} \right)^{\beta} dudv. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим функцию $g(u, v)$, заданную в квадрате $[0, 1; 0, 1]$ следующим образом:

$$g(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{uv}, & \text{когда } (u, v) \in [e^{-1}, 1; e^{-1}, 1], \\ 0, & \text{в остальных точках квадрата.} \end{cases}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют полиномы $p(u, v)$ и $P(u, v)$ такие, что

$$p(u, v) \leq g(u, v) \leq P(u, v), \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 [P(u, v) - p(u, v)] \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha} \left(\ln \frac{1}{v} \right)^{\beta} dudv < \varepsilon. \quad (5)$$

Далее, так как функция $F_{\alpha, \beta}(t, \tau)$ квази-неотрицательная, то существует такое число $\nu > 0$, что $F_{\alpha, \beta}(t, \tau) > 0$ при $t \geq \nu, \tau \geq \nu$. Поэтому

$$\frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \tau^{\beta} p(e^{-pt}, e^{-q\tau}) e^{-pt-q\tau} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau \leq$$

$$\leq \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-\beta} g(e^{-pt}, e^{-qt}) e^{-pt-qt} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau \leq$$

$$\leq \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-\beta} P(e^{-pt}, e^{-qt}) e^{-pt-qt} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau.$$

В силу (3) для функции

$$I(p, q) = \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-\beta} g(e^{-pt}, e^{-qt}) e^{-pt-qt} dt d\tau$$

имеем

$$\frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 p(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta du dv \leq$$

$$\leq \lim_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) \leq \overline{\lim}_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) \leq$$

$$\leq \frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 P(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta du dv. \quad (6)$$

Принимая во внимание соотношения (5) и (6), получим

$$\overline{\lim}_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) - \frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 p(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta du dv \leq$$

$$\leq \frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 [P(u, v) - p(u, v)] \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta du dv <$$

$$< \frac{s^2}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}.$$

Откуда, на основании (4), будем иметь

$$\overline{\lim}_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) - \frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 g(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta du dv <$$

$$< \frac{s^2}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}. \quad (7)$$

Далее

$$\frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 P(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta du dv - \overline{\lim}_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) \leq$$

$$\leq \frac{s}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 [P(u, v) - p(u, v)] \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta du dv <$$

$$< \frac{s^2}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}.$$

Отсюда, согласно (4), имеем

$$\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 g(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta dudv - \\ - \lim_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) \leq \frac{s^2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\left| \lim_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) - \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 g(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta dudv \right| < \\ < \frac{s^2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \quad (9)$$

Аналогично получим

$$\left| \lim_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) - \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 g(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta dudv \right| < \\ < \frac{s^2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \quad (10)$$

В силу произвольности ε из (9) и (10) будем иметь

$$\lim_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} I(p, q) = \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \int_0^1 g(u, v) \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta dudv = \\ = \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{e^{-1}}^1 \int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{uv} \left(\ln \frac{1}{u}\right)^\alpha \left(\ln \frac{1}{v}\right)^\beta dudv = \\ = \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)[(\alpha+1)(\beta+1)]} = \frac{s}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}. \quad (11)$$

Полагая

$$p = 1 - e^{-\frac{1}{x}}, \quad q = 1 - e^{-\frac{1}{y}}, \quad x > y, \quad y > \gamma,$$

имеем

$$I(p, q) = \frac{(1 - e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1} (1 - e^{-\frac{1}{y}})^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{1 - e^{-\frac{1}{x}}}^1 \int_{1 - e^{-\frac{1}{y}}}^1 t^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau.$$

Но, так как

$$1 - e^{-\frac{1}{x}} \sim \frac{1}{x}, \quad 1 - e^{-\frac{1}{y}} \sim \frac{1}{y} \quad \text{при } x, y \rightarrow \infty,$$

то, в силу (11), получим

$$\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} \int_x^\infty \int_y^\infty t^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = s,$$

т. е.

$$s = \frac{1}{B(\alpha+1, 1) B(\beta+1, 1)} \lim_{(x, y)_h \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} \int_0^x \int_0^y t^{\alpha-\beta} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau.$$

В силу условий теоремы

$$\lim_{(x, y)_h \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} \int_0^x \int_0^y t^{\alpha-\beta} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = 0,$$

$$\lim_{(x, y)_h \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} \int_0^x \int_0^y t^{\alpha-\beta} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = 0,$$

$$\lim_{(x, y)_h \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} \int_0^x \int_0^y t^{\alpha-\beta} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{B(\alpha+1, 1) B(\beta+1, 1)} \lim_{(x, y)_h \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} \int_0^x \int_0^y t^{\alpha-\beta} F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt d\tau = s,$$

т. е.

$$\lim_{(x, y)_h \rightarrow \infty} F_{\alpha+1, \beta+1}(x, y) = s.$$

Таким образом теорема доказана для того случая, когда $F_{\alpha, \beta}(t, \tau)$ является квази-неотрицательной функцией.

Пусть теперь $F_{\alpha, \beta}(t, \tau)$ имеет любой знак. По условию функция $F_{\alpha, \beta}(t, \tau)$ квази-ограничена. Поэтому существуют такие положительные числа M и N , что

$$|F_{\alpha, \beta}(t, \tau)| < \frac{M}{2} \text{ при } t > N, \tau > N.$$

Полагая

$$\varphi(t, \tau) = f(t, \tau) + M e^{-t-\tau},$$

будем иметь

$$F_{\alpha, \beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\tau}{y}\right)^\beta \varphi(t, \tau) dt d\tau = F_{\alpha, \beta}(x, y) + \psi(x, y),$$

где

$$\psi(x, y) = M \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\tau}{y}\right)^\beta e^{-t-\tau} dt d\tau.$$

Ясно, что

$$\lim_{t, \tau \rightarrow \infty} \psi(t, \tau) = 0.$$

Следовательно, существует такое $N^* \geq N$, что

$$\psi(t, \tau) > \frac{M}{2} \text{ при } t > N^*, \tau > N^*.$$

Так как $|F_{\alpha, \beta}(x, y)| < \frac{M}{2}$, то при $x > N^*$, $y > N^*$ будет $F_{\alpha, \beta}^*(x, y) > 0$, то есть $F_{\alpha, \beta}^*(x, y)$ является квази-положительной.

Нетрудно показать, что $\varphi(t, \tau) \in D_{\alpha, \beta}^*$.

Положим

$$\varphi^*(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt-q\tau} \varphi(t, \tau) dt d\tau.$$

Ясно, что

$$\varphi^*(p, q) = f^*(p, q) + M \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt-q\tau} e^{-t-\tau} dt d\tau = f^*(p, q) + \frac{M}{(p+1)(q+1)}.$$

По условию

$$\lim_{(p, q)_\lambda \rightarrow 0} f^*(p, q) = s.$$

Поэтому

$$\lim_{(p, q)_\lambda \rightarrow \infty} \varphi^*(p, q) = s + M.$$

С другой стороны, в силу вышедшего, имеем

$$\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} F_{\alpha, \beta}^*(x, y) = s + M.$$

Но, так как

$$F_{\alpha, \beta}^*(x, y) = F_{\alpha, \beta}(x, y) + \psi(x, y),$$

то

$$\lim_{(x, y)_\lambda \rightarrow \infty} F_{\alpha, \beta}(x, y) = s.$$

Теорема доказана полностью.

Из этой теоремы при $\alpha = \beta = 0$ получается теорема С. П. Топурия [1].

Тбилисский государственный
университет

Поступило 27.X.66

է. Վ. Չելիձե

ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԿԱՊ ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐԱՆ
(A*) և (C*_{α, β}) ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է տառերիցան տիպի թեորեմ՝
կրկնակի ինտեգրալների համար:

Դիցուք $f(t, \tau)$ ֆունկցիան որոշված է $R = [0, +\infty; 0, +\infty]$ տիրույթում և ինտեգրելի է ըստ t երկրորդ ցանկացած $[0 \leq t \leq x; 0 \leq \tau \leq y]$ տիրույթում: Ենթադրենք, որ

$$F_{\alpha, \beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\tau}{y}\right)^\beta f(t, \tau) dt d\tau,$$

որտեղ $\alpha, \beta \geq 0$. $f(t, \tau)$ ֆունկցիան կանխահայտարարված $D_{\alpha, \beta}^*$ դասի, եթե $F_{\alpha, \beta}(x, y)$ -ը քվադրատ-սահմանափակ է և բավարարում են հետևյալ պայմանները

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+\beta+2}} \int_0^x t^\alpha F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt = 0,$$

$$2) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^{\alpha+\beta+2}} \int_0^y \tau^\beta F_{\alpha, \beta}(t, \tau) d\tau = 0.$$

Թեորեմ. եթե $f(t, \tau)$ ֆունկցիան պատկանում է $D_{\alpha, \beta}^*$ դասին, A^* ինտեգրելի է R -ում, ապա այն իլինի նաև $C_{\alpha+1, \beta+1}^*$ ինտեգրելի R -ում և

$$(C_{\alpha+1, \beta+1}^*) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau) dt d\tau = (A^*) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau) dt d\tau.$$

E. V. CHELIDZE

INTERDEPENDENCE BETWEEN (A^*) AND $(C_{\alpha, \beta}^*)$ METHODS OF INTEGRATION FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

S u m m a r y

In the present note we prove a tauberian theorem for double integrals.

Let $f(t, \tau)$ belong to L in $[0 \leq t \leq x; 0 \leq \tau \leq y]$ for every $x > 0$, $y > 0$, and let

$$F_{\alpha, \beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\tau}{y}\right)^\beta f(t, \tau) dt d\tau,$$

where $\alpha, \beta > 0$. We say, that the function $f(t, \tau)$ belongs to the class $D_{\alpha, \beta}^*$, if $F_{\alpha, \beta}(x, y)$ is quasi-bounded and satisfies the conditions:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha+\beta+2}} \int_0^x t^\alpha F_{\alpha, \beta}(t, \tau) dt = 0,$$

$$2) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^{\alpha+\beta+2}} \int_0^y \tau^\beta F_{\alpha, \beta}(t, \tau) d\tau = 0.$$

Theorem. If the function $f(t, \tau)$ belonging to $D_{\alpha, \beta}^*$ is (A^*) -integrable in $R = [0, +\infty; 0, +\infty)$, then it is $(C_{\alpha+1, \beta+1}^*)$ -integrable in R and

$$(C_{\alpha+1, \beta+1}^*) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau) dt d\tau = (A^*) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau) dt d\tau.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. П. Топурия. О C_1 и A -интегрируемости функций двух переменных. Труды Сухумского государственного педагогического института им. А. М. Горького, X—XI (1958).