ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

О СПРЯМЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Как известно, в классическом анализе доказывается следующий критерий спрямляемости плоских кривых: для того, чтобы плоская кривая была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы ее компоненты были функциями ограниченной вариации. В классическом анализе доказывается также следующее достаточное условие спрямляемости плоских кривых: если обе компоненты плоской кривой имеют ограниченные производные, то кривая спрямляема.

В настоящей статье рассматривается вопрос о возможности перенесения этих критериев спрямляемости плоских кривых в конструктивный математический анализ. Как оказывается, в конструктивном анализе ограниченность вариаций компонент плоской кривой является необходимым, но не достаточным условием спрямляемости кривой. Точно так же наличие ограниченных производных компонент плоской кривой не является достаточным условием спрямляемости кривой. Однако равномерная дифференцируемость компонент плоской кривой (т. е. возможность равномерного приближения их производных соответствующими отношениями приращений) является достаточным условием спрямляемости кривой.

Все дальнейшие рассмотрения проводятся в рамках конструктивной установки в математике ([1], [2]). Будут использоваться обозначения и понятия из [3], [4], [5] с отдельными отступлениями, так, например, знак = будет употребляться не только в роли символа равенства FR-чисел, но также в роли символа графического равенства и равенства по определению; толкование знака равенства в каждом отдельном случае будет видно из контекста. Для удобства читателя некоторые определения из [3], [4], [5] будут повторены в тексте статьи. Символы ε и δ будут употребляться в такой же роли, как в [5], т. е. в качестве переменных для положительных рациональных чисел.

Доказательства теорем настоящей статьи изложены несколько более сжатым образом, чем это обычно принято в работах по конструктивному анализу, в частности, иногда в рассуждениях подразумевается рассмотрение алгорифмов, не введенных в изложение явным образом посредством указания их конструкции. Во всех случаях такого рода построение этих алгорифмов может быть легко выполнено по образцу аналогичных мест в доказательствах теорем из [3], [4], [5].

Формулировки большинства результатов настоящей статьи были опубликованы в [6].

§ 1. Формулировки основных определений и теорем

Конструктивной кривой, заданной на невырожденном сегменте $\alpha\Delta\beta$, мы будем называть алгорифм K, который по каждому FR-числу $x \in \alpha\Delta\beta$ выдает некоторую конструктивную точку $u \circ v$ и обладает свойствами корректности: если $x \in \alpha\Delta\beta$, и $x = y$, то $K(x) = K(y)$. Это определение отличается лишь в техническом отношении от определения, приведенного в [3] на стр. 255. Очевидно, что для всякой конструктивной кривой K, заданной на $\alpha\Delta\beta$, потенциально осуществимы ее компоненты, т. е. конструктивные функции K^{ξ} и K^{η} такие, что всегда $K(x) = K^{\xi}(x) \circ K^{\eta}(x)$.

Зафиксируем некоторый стандартный способ построения компонент кривой K, исходя из задания K, и впредь через K^{ξ} и K^{η} будем обозначать компоненты кривой K, построенные фиксированным стандартным способом. Будем говорить, что кривая K является *непрерывной (равномерно непрерывной, дифференцируемой)*, если K^{ξ} и K^{η} непрерывны (равномерно непрерывны, дифференцируемы). Будем говорить, что конструктивная функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$, *равномерно дифференцируема*, если для всякого ε потенциально осуществимо такое δ, что всегда из

$$x \in \alpha\Delta\beta,\ 0 < |u_1| < \delta,\ 0 < |u_2| < \delta,\ x + u_1 \in \alpha\Delta\beta,\ x + u_2 \in \alpha\Delta\beta$$

следует

$$\left| \frac{f(x+u_1) - f(x)}{u_1} - \frac{f(x+u_2) - f(x)}{u_2} \right| < \varepsilon.$$

Кривая K называется равномерно дифференцируемой, если K^{ξ} и K^{η} равномерно дифференцируемы.

Будем говорить, что функция f, определенная на $\alpha\Delta\beta$, удовлетворяет *условию Липшица*, если потенциально осуществимо FR-число u такое, что $|f(x) - f(y)| \leqslant u \cdot |x - y|$ при любых x и y, принадлежащих $\alpha\Delta\beta$. Будем говорить, что кривая K удовлетворяет условию Липшица, если K^{ξ} и K^{η} удовлетворяют условию Липшица.

В дальнейших определениях алгорифмов W и W^*, а также во всех рассмотрениях, связанных с этими алгорифмами, мы предполагаем фиксированной некоторую кривую K, заданную на $\alpha\Delta\beta$, и некоторую функцию f, заданную на $\alpha\Delta\beta$. Будем рассматривать различные дробления $P = a_1 * a_2 * \cdots * a_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$, где $\alpha = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_h = \beta$. Посредством W будем обозначать алгорифм, который всякое дробление $P = a_1 * a_2 * \cdots * a_h$ перерабатывает в FR-число $\sum_{i=1}^{h-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$.

Посредством W^* мы будем обозначать алгорифм, который всякое дробление $P = a_1 * a_2 * \cdots * a_h$ перерабатывает в FR-число

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(K^{\xi}(\alpha_{i+1}) - K^{\xi}(\alpha_i))^2 + (K^{\eta}(\alpha_{i+1}) - K^{\eta}(\alpha_i))^2}.$$

Будем говорить (ср. [4], § 6), что функция f является *функцией ограниченной вариации*, если потенциально осуществимо такое FR-число $v > 0$ (именуемое *вариацией* функции f), что всегда $W(P) \leqslant v$, и для всякого ε потенциально осуществимо такое дробление P сегмента $\alpha\Delta\beta$, что $W(P) > v - \varepsilon$. Будем говорить, что кривая K *спрямляема*, если потенциально осуществимо такое FR-число $u > 0$ (именуемое *длиной* кривой K), что всегда $W^*(P) \leqslant u$, и для всякого ε потенциально осуществимо такое дробление P сегмента $\alpha\Delta\beta$, что $W^*(P) > u - \varepsilon$.

Теорема 1. *Если K спрямляема, то K^{ξ} и K^{η} суть функции ограниченной вариации.*

Теорема 2. *Всякая равномерно дифференцируемая кривая спрямляема.*

Теорема 3. *Потенциально осуществима дифференцируемая кривая K, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что K^{ξ} и K^{η} суть функции ограниченной вариации, однако кривая K не спрямляема.*

§ 2. Некоторые вспомогательные определения и леммы

Будем говорить, что дробление P есть *продолжение* дробления Q, если для любого FR-числа, входящего в Q, потенциально осуществимо равное ему FR-число, входящее в P. Будем говорить, что дробление P есть *квазипродолжение* дробления Q, если для любого FR-числа, входящего в Q, квазиосуществимо равное ему FR-число, входящее в P. *Итерацией* дробления $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$ относительно дробления $Q = \beta_1 * \beta_2 * \cdots * \beta_k$ того же сегмента будем называть дробление $x_1 * x_2 * \cdots * x_{(k-1)\cdot h}$, где $x_{(i-1)\cdot h + j} = \min(\max(\beta_i, \alpha_j)\, \beta_{i+1})$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $1 \leqslant j \leqslant h$. Через T будем обозначать алгорифм, который всякое натуральное число n перерабатывает в дробление сегмента $\alpha\Delta\beta$, состоящее из всех FR-чисел вида

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^n} \cdot k \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant 2^n.$$

Лемма 1. *Каковы бы ни были дробления P и Q сегмента $\alpha\Delta\beta$, итерация дробления P относительно дробления Q является продолжением дробления Q и квазипродолжением дробления P.*

Доказательство. Пусть $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$ и $Q = \beta_1 * \beta_2 * \cdots * \beta_k$ суть дробления $\alpha\Delta\beta$, и пусть $R = x_1 * x_2 * \cdots * x_{(k-1)\cdot h}$ есть итерация P относительно Q. Из определений очевидно, что $x_{(i-1)\cdot h + 1} = \beta_i$, и $x_{i\cdot h} = \beta_{i+1}$ при любом i от 1 до $k-1$. Таким образом, R есть продолжение Q. Далее для каждого j в пределах от 1 до h, очевидно, квазиосуществимо такое натуральное i в пределах от 1 до $k-1$, что $\beta_i \leqslant \alpha_j \leqslant \beta_{i+1}$ и, следовательно, $x_{(i-1)\cdot h + j} = \alpha_j$. Лемма доказана.

Следствие. *Для любых двух дроблений P и Q сегмента* $\alpha\Delta$
потенциально осуществимо дробление R того же сегмента, являющее-
ся квазипродолжением дроблений P и Q.

Следующая лемма показывает, что следствие леммы 1 нельз
усилить путем замены слова „квазипродолжение" словом „продол-
жение".

Лемма 2. *Неверно, что для любых двух дроблений P и Q сегмен-
та $0\Delta 1$ потенциально осуществимо дробление R, являющееся про-
должением дроблений P и Q.*

Доказательство. Допустим, напротив, что для любых дроб-
лений P и Q сегмента $0\Delta 1$ потенциально осуществимо дробление R
являющееся продолжением дроблений P и Q. Тогда, в частности, дл
любых FR-чисел x и y, принадлежащих $0\Delta 1$, потенциально осущест-
вимо дробление $R = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$, являющееся продолжением дробле-
ний $0 * x * 1$ и $0 * y * 1$; следовательно, потенциально осуществимы такж
натуральные числа i и j в пределах от 1 до h такие, что $\alpha_i = x$, $\alpha_j = y$
Но тогда очевидно, что, если $i \leqslant j$, то $x \leqslant y$, и если $i > j$, то $x > y$
Так как для натуральных чисел i и j справедлива дизъюнкция $i \leqslant j \vee j \leqslant$
то для любых x и y, принадлежащих $0\Delta 1$, справедлива дизъюнкци
$x \leqslant y \vee y \leqslant x$; но это, как легко видеть, невозможно согласно лемме
из § 2 работы [7]. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если дробление Q сегмента $\alpha\Delta\beta$ является квазипро-
должением дробления P того же сегмента, то*

$$W^*(P) \leqslant W^*(Q),$$

$$W(P) \leqslant W(Q).$$

Доказательство. Пусть дробление Q сегмента $\alpha\Delta\beta$ является
продолжением дробления P того же сегмента; тогда утверждение лем-
мы легко следует из неравенств $|u+v| \leqslant |u| + |v|$, $\sqrt{(x+y)^2+(u+v)^2} \leqslant$
$\leqslant \sqrt{x^2+u^2} + \sqrt{y^2+v^2}$. Если же дробление Q является квазипро-
должением дробления P, то требуемое утверждение немедленно выво-
дится из предыдущего на основании эквивалентности каждого неравен-
ства его двойному отрицанию. Лемма доказана.

Лемма 4. *FR-число v является вариацией функции f, за-
данной на $\alpha\Delta\beta$, в том и только в том случае, когда*

$$W(T(n)) \underset{n\to\infty}{\to} v.$$

Эта лемма является частным случаем леммы 2 из § 6 статьи [4].

Лемма 5. *FR-число u является длиной кривой K, заданной
на $\alpha\Delta\beta$, в том и только в том случае, когда*

$$W^*(T(n)) \underset{n\to\infty}{\to} u.$$

Доказательство аналогично лемме 4. Вначале доказывает-
ся, что для всякого дробления $P = \alpha_1 * \alpha_2 \cdots * \alpha_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$ и для
всякого ε потенциально осуществимо такое натуральное число n, что

$$W^*(T(n)) > W^*(P) - \varepsilon. \qquad \text{(a)}$$

В самом деле, для построения такого натурального n достаточно воспользоваться непрерывностью конструктивных функций K^{ξ} и K^{η} в точках $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h$ и выбрать n таким образом, чтобы при любом i от 1 до h и при любом $x \in \alpha\Delta\beta$ из $|\alpha_i - x| < \frac{\beta - \alpha}{2^{n-i}}$ вытекало бы $|K^{\xi}(\alpha_i) - K^{\xi}(x)| < \frac{\varepsilon}{4h}$, $|K^{\eta}(\alpha_i) - K^{\eta}(x)| < \frac{\varepsilon}{4h}$; легко проверить, что число n, построенное указанным образом, удовлетворяет требуемому условию. Теперь, если кривая K спрямляема, и u есть длина кривой K, то всегда $W^*(T(n)) \leqslant u$ и, кроме того, согласно (а), в соответствии с определением спрямляемой кривой, для всякого ε потенциально осуществимо такое n_0, что $W^*(T(n_0)) > u - \varepsilon$; но тогда при всяком $n \geqslant n_0$ имеем: $u - \varepsilon < W^*(T(n)) \leqslant u$, откуда $|W^*(T(n)) - u| < \varepsilon$.

Таким образом, если длина кривой K равна u, то $W^*(T(n)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u$. С другой стороны, если $W^*(T(n)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u$, то, очевидно, для любого ε потенциально осуществимо такое n, что $W^*(T(n)) > u - \varepsilon$; кроме того, согласно лемме 3, последовательность FR-чисел $W^*(T(n))$ является неубывающей, а тогда из (а) легко следует, что $W^*(P) \leqslant u$ для всякого дробления P сегмента $\alpha\Delta\beta$. Таким образом, если $W^*(T(n)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u$, то кривая K спрямляема, и ее длина равна u. Лемма доказана.

Дальнейшие леммы будут использоваться только в доказательстве теоремы 1.

Лемма 6. *Каковы бы ни были FR-числа x, y, z, если $z > 0$, то* $\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| \leqslant |y| + z$ *равносильно* $|x| \leqslant \frac{|y| + z}{2}$.

Доказательство. Пусть $\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| \leqslant |y| + z$. Тогда

$$|x| = \frac{1}{2}\left|\left(x - \frac{y}{2}\right) + \left(x + \frac{y}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right|\right) \leqslant \frac{|y| + z}{2}.$$

Пусть теперь $|x| \leqslant \frac{|y| + z}{2}$. Легко видеть, что всегда

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| = \left||x| - \frac{|y|}{2}\right| + \left||x| + \frac{|y|}{2}\right|$$

(это равенство легко доказывается разбором случаев $x \geqslant 0$, $x < 0$, $y \geqslant 0$, $y < 0$ с последующим устранением двойных отрицаний). Поэтому достаточно рассмотреть случай $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Но для этого случая неравенство $\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| \leqslant |y| + z$ легко устанавливается разбором случаев $x \geqslant \frac{y}{2}$, $x < \frac{y}{2}$ с последующим устранением двойных отрицаний. Лемма доказана.

Лемма 7. *Каковы бы ни были FR-числа x, y, α, β, и каково бы ни было ε, если* $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\varepsilon$, то $|x|+|\alpha-x|-|\alpha|\leqslant\sqrt{2\varepsilon\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+2\varepsilon$.

Доказательство. Если $\alpha^2+\beta^2=0$, то лемма очевидна.

Разбором случаев $\alpha^2+\beta^2=0$, $\alpha^2+\beta^2\neq0$ при помощи снятия двойных отрицаний немедленно убеждаемся в том, что для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $\alpha^2+\beta^2\neq0$. Пусть $\alpha^2+\beta^2\neq0$. Введем обозначения: $\sigma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; $x'=\dfrac{\alpha x+\beta y}{\sigma}-\dfrac{\sigma}{2}$; $y'=\dfrac{-\beta x+\alpha y}{\sigma}$; $\alpha'=\dfrac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)$; $\beta'=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sigma\varepsilon+\varepsilon^2}$.

Тогда $x=\dfrac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}+\dfrac{\alpha}{2}$; $y=\dfrac{\beta x+\alpha y'}{\sigma}+\dfrac{\beta}{2}$. Подставляя эти значения для x и y в неравенство $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\varepsilon$, после очевидных преобразований имеем

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sigma\varepsilon+\varepsilon^2}\right)^2}\leqslant1,$$

откуда $|x'|\leqslant\alpha'$, $|y'|\leqslant\beta'$. Но тогда

$$\left|\frac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}\right|\leqslant\frac{|\alpha|}{\sigma}\cdot\alpha'+\frac{|\beta|}{\sigma}\cdot\beta'\leqslant\frac{|\alpha|}{2\sigma}(\sigma+\varepsilon)+\beta'\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\alpha|}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\beta'=\frac{|\alpha|}{2}+\frac{\varepsilon+2\beta'}{2}.$$

Отсюда, согласно лемме 6, вытекает, что $\left|\dfrac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}+\dfrac{\alpha}{2}\right|+\left|\dfrac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}-\dfrac{\alpha}{2}\right|\leqslant|\alpha|+\varepsilon+2\beta'$, иначе говоря, $|x|+|x-\alpha|\leqslant|\alpha|+\varepsilon+\sqrt{2\sigma\varepsilon+\varepsilon^2}$, откуда $|x|+|x-\alpha|\leqslant|\alpha|+\varepsilon+\sqrt{2\sigma\varepsilon}+\varepsilon=|\alpha|+\sqrt{2\sigma\varepsilon}+2\varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Каковы бы ни были FR-числа* $x_1, x_2, \cdots, x_k$, $y_1, y_2, \cdots, y_k$, если $\sum_{i=1}^{k}\sqrt{x_i^2+y_i^2}-\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}y_i\right)^2}\leqslant\varepsilon$, *то*

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|\leqslant2\varepsilon+\sqrt{2\varepsilon\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}y_i\right)^2}}.$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$\sigma=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}y_i\right)^2}.$$

Так как неравенство $\sum_{i=1}^{k}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|\leqslant2\varepsilon+\sqrt{2\sigma\varepsilon}$ эквивалентно своему двойному отрицанию, то, не нарушая общности, мы можем считать, что система FR-чисел $x_1 * x_2 * \cdots * x_h$ разбита на две подсистемы, из которых первая (соответственно, вторая подсистема) составлена из всех чисел x_l, удовлетворяющих условию $x_l > 0$ (соответственно, $x_l < 0$). Введем обозначения: $\alpha = \sum_{l=1}^{h} x_l$; $\beta = \sum_{l=1}^{h} y_l$; $x = \sum_{x_l > 0} x_l$; $y = \sum_{x_l > 0} y_l$.

Тогда имеем

$$\varepsilon > \sum_{l=1}^{h} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} - \sqrt{\left(\sum_{l=1}^{h} x_l\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{h} y_l\right)^2} =$$

$$= \sum_{x_l > 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} + \sum_{x_l < 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Но, очевидно,

$$\sum_{x_l > 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{x_l > 0} x_l\right)^2 + \left(\sum_{x_l > 0} y_l\right)^2},$$

$$\sum_{x_l < 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{x_l < 0} x_l\right)^2 + \left(\sum_{x_l < 0} y_l\right)^2},$$

а потому

$$\varepsilon > \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Отсюда, согласно лемме 7, имеем: $|x| + |\alpha - x| - |\alpha| \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2\beta\varepsilon}$, а это равносильно требуемому неравенству. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть K — конструктивная кривая, заданная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть натуральные числа m и n и рациональное число ε таковы, что $W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) \leqslant \varepsilon$. Тогда $W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon W^*(T(n))}$, где при определении алгорифма W в роли функции f взята функция K^ξ.*

Доказательство. Введем следующие сокращенные обозначения:

$$x_i^{(n)} = \alpha + \frac{i}{2^n}(\beta - \alpha),$$

$$\Delta_n K_i^\xi = K^\xi(x_{i+1}^{(n)}) - K^\xi(x_i^{(n)}),$$

$$\Delta_n K_i^\eta = K^\eta(x_{i+1}^{(n)}) - K^\eta(x_i^{(n)}),$$

$$\Delta_n K_i = \sqrt{(\Delta_n K_i^\xi)^2 + (\Delta_n K_i^\eta)^2}.$$

Согласно определениям алгорифмов W^* и T имеем

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) = \sum_{l=0}^{2^{n+m}-1} \Delta_{n+m} K_l -$$

$$- \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_n K_l = \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=2^m \cdot l}^{(l+1)\cdot 2^m - 1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right).$$

Обозначим FR-числа $\sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m - 1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l$ при $i = 0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1$

соответственно через $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2^n-1}$. Очевидно, что все эти числа неотрицательны. Согласно лемме 8 при каждом i от 0 до 2^n-1 имеем

$$\sum_{j=i\cdot 2^m}^{(i+1)\cdot 2^m-1} |\Delta_{n+m} K_j| - |\Delta_n K_i| \leqslant 2\lambda_i + \sqrt{2\lambda_i \cdot \Delta_n K_i}\,.$$

Складывая эти неравенства при $i = 0, 1, 2, \cdots, 2^n-1$, имеем

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant \sum_{i=0}^{2^n-1} (2\lambda_i + \sqrt{2\lambda_i \Delta_n K_i}),$$

откуда

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_i + \sqrt{2}\sum_{i=0}^{2^n-1} (\sqrt{\lambda_i} \cdot \sqrt{\Delta_n K_i}) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_i + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{2^n-1} (\sqrt{\lambda_i})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{2^n-1} (\sqrt{\Delta_n K_i})^2} =$$

$$= 2(W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))) +$$

$$+ \sqrt{2}\sqrt{W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))} \cdot \sqrt{W^*(T(n))}$$

или, согласно условию леммы,

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{W^*(T(n))}\,.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть кривая K спрямляема, и пусть u — длина кривой K. Пусть функция f совпадает с K^1. Согласно лемме 9 имеем: каковы бы ни были натуральные числа m, n и рациональное число $\varepsilon < 1$, если

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) \leqslant \varepsilon,$$

то

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon W^*(T(n))} \leqslant 2\varepsilon +$$

$$+ \sqrt{2u\varepsilon} < 2(1+\sqrt{u})\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Согласно лемме 5 конструктивная последовательность FR-чисел $W^*(T(n))$ конструктивно сходится; отсюда вытекает, что последовательность FR-чисел $W(T(n))$ также конструктивно сходится. В самом деле, в силу сходимости $W^*(T(n))$ имеем: для всякого $\varepsilon < 1$ потенциально осуществимо такое натуральное n, что при любом натуральном m будет

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) < \frac{\varepsilon^2}{4(1+\sqrt{u})^2},$$

откуда

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) < 2\cdot(1+\sqrt{u})\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4(1+\sqrt{u})^2}} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность FR-чисел $W(T(n))$ сходится и потому, согласно лемме 4, функция K^{ξ} есть функция ограниченной вариации. В точности таким же образом доказывается, что K^{η} есть функция ограниченной вариации. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть кривая K равномерно дифференцируема. Докажем, что K спрямляема. Для этого, согласно лемме 5, достаточно показать, что конструктивная последовательность FR-чисел $W^*(T(n))$ конструктивно сходится при $n\to\infty$.

Фиксируем произвольное ε. Пользуясь равномерной дифференцируемостью функций K^{ξ} и K^{η}, построим такое натуральное n, чтобы всегда при

$$x\in\alpha\Delta\beta,\ x+u_1\in\alpha\Delta\beta,\ x+u_2\in\alpha\Delta\beta,\ 0<|u_1|<\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}},\ 0<|u_2|<\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$$

было бы

$$\left|\frac{K^{\xi}(x+u_1)-K^{\xi}(x)}{u_1}-\frac{K^{\xi}(x+u_2)-K^{\xi}(x)}{u_2}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{K^{\eta}(x+u_1)-K^{\eta}(x)}{u_1}-\frac{K^{\eta}(x+u_2)-K^{\eta}(x)}{u_2}\right|<\varepsilon.$$

Очевидно, что в этом случае всегда при

$$x\in\alpha\Delta\beta,\ x+u\in\alpha\Delta\beta,\ 0<|u|<\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$$

будет

$$\left|\frac{K^{\xi}(x+u)-K^{\xi}(x)}{u}-K^{\xi'}(x)\right|\leqslant\varepsilon,$$

$$\left|\frac{K^{\eta}(x+u)-K^{\eta}(x)}{u}-K^{\eta'}(x)\right|\leqslant\varepsilon, \qquad (б)$$

где через $K^{\xi'}$ и $K^{\eta'}$ обозначены производные* функций, соответственно K^{ξ} и K^{η}. Докажем теперь, что для построенного указанным образом n и для любого натурального m справедливо следующее неравенство:

$$|W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))| \leqslant 8\varepsilon(\beta-\alpha). \qquad (в)$$

Будем употреблять при этом сокращенные обозначения, введенные в начале доказательства леммы 9 и, кроме того, через $R_i^{(n)}$ будем обозначать выражение $\sqrt{(K^{\xi'}(x_i^{(n)}))^2+(K^{\eta'}(x_i^{(n)}))^2}$. Из определений алгорифмов W^* и T имеем

---

* Во избежание недоразумений отметим, что здесь, как и в аналогичных местах в дальнейшем, мы не рассматриваем $'$ как символ оператора дифференцирования, а понимаем $K^{\xi'}$ и $K^{\eta'}$ как неразложимые обозначения.

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) = \sum_{l=0}^{2^{n+m}-1} \Delta_{n+m} K_l - \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_n K_l =$$

$$= \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\,2^m-1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right).$$

Согласно (б) при любом i от 0 до 2^n-1 и при любом j от 0 до $(i+1)\cdot 2^m-1$ имеем

$$\left| \frac{\Delta_{n+m} K_j^{\xi}}{(\beta-\alpha)/2^{n+m}} - K^{\xi\prime}(x_j^{(n+m)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| \frac{K^{\xi}(x_j^{(n+m)}) - K^{\xi}(x_i^{(n)})}{x_j^{(n+m)} - x_i^{(n)}} - K^{\xi\prime}(x_j^{(n+m)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| \frac{K^{\xi}(x_j^{(n+m)}) - K^{\xi}(x_i^{(n)})}{x_j^{(n+m)} - x_i^{(n)}} - K^{\xi\prime}(x_i^{(n)}) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Из этих неравенств получаем

$$\left| \frac{\Delta_{n+m} K_j^{\xi}}{(\beta-\alpha)/2^{n+m}} - K^{\xi\prime}(x_i^{(n)}) \right| \leqslant 3\varepsilon,$$

иначе говоря,

$$\left| \Delta_{n+m} K_j^{\xi} - K^{\xi\prime}(x_i^{(n)}) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}} \right| \leqslant 3\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}}. \tag{г}$$

Точно таким же образом доказывается, что

$$\left| \Delta_{n+m} K_j^{\eta} - K^{\eta\prime}(x_i^{(n)}) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}} \right| \leqslant 3\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}}. \tag{д}$$

Из (г) и (д) после очевидных преобразований имеем

$$\left| \Delta_{n+m} K_j - R_i^{(n)} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}} \right| \leqslant 6\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}},$$

откуда

$$\left| \sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m-1} \Delta_{n+m} K_j - R_l^{(n)} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n} \right| \leqslant 6\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n}. \tag{е}$$

С другой стороны, согласно (б)

$$\left| \frac{\Delta_n K_l^{\xi}}{(\beta-\alpha)/2^n} - K^{\xi\prime}(x_l^{(n)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\Delta_n K_l^{\eta}}{(\beta-\alpha)/2^n} - K^{\eta\prime}(x_l^{(n)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

откуда, как легко проверить, вытекает, что

$$\left| \Delta_n K_l - R_l^{(n)} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n} \right| \leqslant 2\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n}. \tag{ж}$$

Теперь на основании (е) и (ж) получаем

$$\left| \sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m-1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right| < 8\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n},$$

откуда

$$\left| \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m-1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right) \right| < 8\varepsilon (\beta-\alpha),$$

иначе говоря

$$|W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))| < 8\varepsilon (\beta-\alpha),$$

и неравенство (в) доказано. Мы показали, таким образом, что для всякого ε потенциально осуществимо такое n, что при любом m справедливо (в). Отсюда сразу вытекает, что последовательность чисел $W^*(T(n))$ конструктивно сходится при $n \to \infty$. Следовательно, кривая K спрямляема. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Построим точное дизъюнктное 1/2-ограниченное сегментное покрытие Φ сегмента $0\Delta 1$ (см. [5], § 2), обладающее следующим свойством: каждое FR-число $x \in 0\Delta 1$ принадлежит интервалу $a \nabla b$, где a и b суть соответственно левый и правый конец сегмента $\Phi_{K(x)} \cup \Phi_{L(x)}$ (K, L суть характеристические алгорифмы покрытия Φ). Потенциальная осуществимость алгорифма Φ с указанными свойствами легко следует из доказательств теорем 2.2 и 2.3 работы [5]. Очевидно, что для каждого натурального k потенциально осуществима функция φ_k такая, что при любом x

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(b-a)^3} \cdot (\max(0, (x-a)\cdot(b-x)))^2,$$

где через a и b обозначены соответственно левый и правый конец сегмента Φ_k. На основании этого при помощи конструкции, указанной в теореме 3.1 из [5], построим всюду определенную функцию f такую, что при любом $x \in 0\Delta 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N(x)} \varphi_k(x), \tag{з}$$

где N есть ограничительный алгорифм покрытия Φ. Очевидно, что для любого натурального числа k и любого FR-числа $x \in 0\Delta 1$ имеем: если $x \in \Phi_k = a\Delta b$, то $f(x) = \varphi_k(x) = \dfrac{(x-a)^2(b-x)^2}{(b-a)^3}$. Построим, наконец, кривую K, определенную на $0\Delta 1$ и такую, что при любом $x \in 0\Delta 1$

$$K^\xi(x) = x + f(x),$$

$$K^\eta(x) = x.$$

Как будет сейчас доказано, построенная таким образом кривая удовлетворяет всем требуемым условиям.

Докажем вначале, что кривая K дифференцируема и удовлетворяет условию Липшица. В самом деле, очевидно, что при любом K функция φ_k дифференцируема и ее производная равна 0 при $x \overline{\in} \Phi_k$ и равна $\dfrac{4(x-a)(b-x)\left(\dfrac{b+a}{2}-x\right)}{(b-a)^3}$ при $x \in \Phi_k = a\Delta b$. Согласно построению функции f, для всякого FR-числа x потенциально осуществимы такие ε и n, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z) \tag{з}$$

при любом $z \in (x-\varepsilon) \nabla (x+\varepsilon)$. Отсюда немедленно вытекает, что функция f всюду дифференцируема; следовательно, кривая K дифференцируема. Легко проверить, что при любом $x \in a\Delta b$

$$\left|\frac{4(x-a)(b-x)\left(\dfrac{b+a}{2}-x\right)}{(b-a)^3}\right| \leqslant \frac{1}{2};$$

но для любого x потенциально осуществимо не более одного k, для которого производная $\varphi'_k(x)$ отлична от 0; поэтому, согласно (з), производная f' функции f удовлетворяет условию

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

при любом x. Но тогда производная функции K^{ξ} по модулю не превосходит 3/2, а потому, согласно конструктивному варианту теоремы Лангранжа ([7], § 5, следствие 3 теоремы 2), при любых x и y, принадлежащих $0\Delta 1$, имеем

$$|K^{\xi}(x) - K^{\xi}(y)| \leqslant \frac{3}{2} \cdot |x-y|.$$

Следовательно, кривая K удовлетворяет условию Липшица.

Так как всегда $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, то при любом $x \in 0\Delta 1$ производная функции K^{ξ} не меньше 1/2, а потому, согласно указанному следствию теоремы 2 из [7], § 5, функция K^{ξ} строго возрастает. Таким образом, согласно теореме 6.7 из [4], функции K^{ξ} и K^{η} являются функциями ограниченной вариации на $0\Delta 1$.

Остается показать, что кривая K не спрямляема. Допустим, напротив, что кривая К спрямляема; пусть u есть длина K. Согласно определению спрямляемой кривой для всякого ε потенциально осуществимо такое дробление $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$ сегмента $0\Delta 1$, что $u - \varepsilon < W^*(P) \leqslant u$. Зафиксируем некоторое ε, построим дробление $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$, удовлетворяющее указанным условиям, и построим натуральное число n такое, что $n = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant h} N(\alpha_l)$, где N — ограничительный алгорифм покрытия Φ. Нашей ближайшей целью будет доказательство того, что построенное таким образом натуральное число n обладает следующим свойством: для любого натурального числа m будет*

* Здесь, как и в дальнейшем, посредством $|\Phi_k|$ обозначена длина сегмента Φ_k.

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| < 4112\varepsilon. \qquad (и)$$

В самом деле, пусть m — произвольное натуральное число. Рассмотрим итерацию дробления P относительно дробления, составленного из точки 0, точки 1, всех левых концов сегментов $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_n$ и всех правых концов тех же сегментов; обозначим эту итерацию через Q. Ясно, что $u - \varepsilon < W^*(Q) \leqslant u$. Теперь построим итерацию дробления Q относительно дробления, составленного из точки 0, точки 1, всех левых концов сегментов $\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \cdots, \Phi_{n+m}$, всех правых концов тех же сегментов и всех середин тех же сегментов. Обозначим построенную итерацию через R. Легко проверить, что

$$W^*(R) - W^*(Q) = \left(\frac{\sqrt{145} + \sqrt{113}}{16} - \sqrt{2}\right) \cdot \sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| >$$

$$> \frac{1}{4112} \sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k|. \qquad (к)$$

С другой стороны очевидно, что $W^*(R) \leqslant u$, и $W^*(Q) > u - \varepsilon$; следовательно

$$W^*(R) - W^*(Q) < \varepsilon. \qquad (л)$$

Сопоставляя (л) и (к), получаем

$$\frac{1}{4112} \sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| < \varepsilon$$

и, тем самым, (и) доказано.

Исходя из предположения о спрямляемости кривой K, мы доказали, таким образом, что для всякого ε потенциально осуществимо такое натуральное число n, что при любом натуральном m будет: $\sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| < 4112\varepsilon$, иначе говоря, мы доказали, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|$ конструктивно сходится. Но это невозможно, так как, согласно теореме 1.4. из [5], ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|$ является шпекеровым. Следовательно, кривая K не спрямляема. Теорема доказана.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 12.XI.66

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎ ՀԱՐԹ ԿՈՐԵՐԻ ՈՒՂՂԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հետազոտվում են հարթ կորերի ուղղելիության որոշ պայմաններ կոնստրուկտիվ մաթեմատիկական անալիզում։ Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները. 1) ցանկացած կոնստրուկտիվորեն ուղղելի կորի բաղադրիչները ունեն կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ վարիացիաներ։ 2) Կոնստրուկտիվորեն հավասարաչափ ածանցելի բաղադրիչներ ունեցող ցանկացած կոր կոնստրուկտիվորեն ուղղելի է։ 3) Գոյություն ունի K *կոր, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝* K *կորի բաղադրիչները ածանցելի են, ունեն կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ վարիացիաներ և սահմանափակ ածանցյալներ, սակայն* K *կորը կոնստրուկտիվորեն ուղղելի չէ։*

I. D. ZASLAVSKIĬ

ON THE RECTIFIABILITY OF CONSTRUCTIVE PLANAR CURVES

Summary

Some conditions for rectifiability of planar curves in constructive mathematical analysis are investigated. The following statements are proved: 1) Two components of any constructively rectifiable curve are functions of constructively bounded variation. 2) Any planar curve with uniformly differentiable in constructive sense components is constructively rectifiable. 3) There exists a planar curve K, satisfying the following conditions: the components of K are differentiable functions, possessing constructively bounded variations and bounded derivatives, but K is not rectifiable in constructive sense.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Марков.* О конструктивной математике, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII (1962), 8—14.
2. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LII (1958), 226—311.
3. *Н. А. Шанин.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII (1962), 15—294.
4. *И. Д. Заславский.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII (1962), 385—457.
5. *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин.* О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. LXVII (1962), 458—502.
6. *И. Д. Заславский.* О дифференцировании и интегрировании конструктивных функций, ДАН СССР, 156, № 1 (1964), 25—27.
7. *Г. С. Цейтин.* Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII(1962), 362—384.