

Р. В. АМБАРЦУМЯН

К ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ПОЛЕЙ ПУАССОНА В ТЕРМИНАХ РАЗЛОЖИМОСТИ ТОЧЕЧНОГО ПОЛЯ НА ОГРАНИЧЕННОЕ ЧИСЛО НЕЗАВИСИМЫХ КОМПОНЕНТ

Макфаддену принадлежит следующий результат (см. [1]).

Если стационарный рекуррентный точечный процесс Π представим в виде суперпозиции двух независимых т. процессов, один из которых является рекуррентным т. процессом с конечным вторым моментом длины интервала между последовательными событиями, а другой является т. процессом Пуассона, то и сам т. процесс Π является т. процессом Пуассона.

Возможность в некоторых ситуациях делать заключение, что данный т. процесс является т. процессом Пуассона на основании разложимости т. процесса на независимые компоненты, представляет большой интерес.

В частности возникает проблема: нельзя ли указать более широкий класс стационарных т. процессов P такой, что из представимости т. процесса $\Pi \in P$ в виде суперпозиции независимых рекуррентных т. процессов Π_i следовало бы, что Π является т. процессом Пуассона. Как показано в (2) в качестве класса P может быть выбран класс $\mathfrak{X}$ стационарных т. процессов, у которых интервалы между последовательными событиями составляют марковскую последовательность ко нечного порядка.

Более точно, в (2) доказана следующая

Теорема 1. Пусть т. процесс Π представим в виде суперпозиции независимых рекуррентных т. процессов Π_i :

$$\Pi = \Pi_1 * \dots * \Pi_n$$

и выполняются условия

а) $\Pi \in \mathfrak{X}$

б) для каждой из функций распределения $F_i(x)$, $i=1, \dots, n$ длины интервала между последовательными событиями в т. процессе Π_i существуют производные в нуле, причем

$$a_i = \left. \frac{dF_i(x)}{dx} \right|_{x=0} \neq 0$$

и как бы ни выбирались индексы $i, j_1, \dots, j_k$, $i \neq j_1 \neq \dots \neq j_k$ всегда остается справедливым неравенство $a_i \neq a_{j_1} + \dots + a_{j_k}$.

Тогда т. процесс Π (также как и каждая из компонент Π_i) является т. процессом Пуассона.

Оказывается, что используя результаты, полученные в (4), можно так видоизменить применяемый в (2) и (3) метод условных математических ожиданий, чтобы получить результаты, аналогичные теореме 1 в случае, когда от компонент Π_i требуется уже не рекуррентность, а, например, всего лишь принадлежность к классу $\mathfrak{M}$ (вместе с некоторыми условиями регулярности). В то же время этот же видоизмененный метод позволяет проводить анализ *точечных полей* (В дальнейшем — т. полей), т. е. случайных распределений точечных объектов на плоскости (E_2) или в пространстве (E_3).

В настоящей статье показывается как это можно осуществить.

Отсутствие естественной упорядоченности у систем точек в E_2 или в E_3 не позволяет прямо распространить понятие класса $\mathfrak{M}$ на случай однородных т. полей. Таким образом, прежде всего возникает задача отыскания подходящих терминов, с помощью которых предполагается выделять классы т. полей. Выясняется, что в круге вопросов настоящей работы удобным является понятие производных т. полей данного однородного т. поля (определение 1). На основе этих понятий выделен класс $\mathfrak{M}'$ (определение 2), который в одномерном случае включает в себя все т. процессы, принадлежащие $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющие некоторым условиям регулярности.

Основным результатом настоящей работы является теорема 3, которая указывает достаточные условия, когда из соотношений

$$\Pi = \Pi_1 * \Pi_2 * \dots * \Pi_n, \\ \Pi \in \mathfrak{M}', \Pi_i \in \mathfrak{M}', i = 1, \dots, n$$

вытекает, что Π (а также $\Pi_i, i = 1, \dots, n$) является т. полем Пуассона.

2. Напомним принадлежащее Рилль-Нардзиевскому определение точечных полей как мер в некотором измеримом пространстве.

Буква ω закрепляется для обозначения отдельных фиксированных систем точечных объектов в E_k ($k = 1, 2, 3$).

Через Ω обозначим множество всех возможных ω , подчиненных единственному условию: множество точечных объектов каждого $\omega \in \Omega$ не имеет точек сгущения в E_k .

Пусть $X(\omega, B)$ обозначает число объектов, принадлежащих данному $\omega \in \Omega$ и попадающих в выделенное в E_k борелевское множество $B \in E_k$.

Естественно рассматривать минимальное σ -поле R , порождаемое множествами элементов ω вида

$$\{\omega; \overline{X}(\omega, \overline{B}) = \overline{k}\} = \{\omega; X(\omega, B_1) = k_1, \dots, X(\omega, B_n) = k_n\},$$

где $B_1, \dots, B_n$ — непересекающиеся борелевские множества из E_k .

Точечное поле Π определяется заданием вероятностной меры π в измеримом пространстве (Ω, R) . Для задания меры в (Ω, R) достаточно задать согласованные вероятности

$$\pi\{\omega; \overline{X}(\omega, \overline{B}) = \overline{k}\} = \pi_{\overline{k}}(\overline{B}).$$

Т. поле называется однородным, если для любого вектора $x \in E_k$ выполняется

$$\pi_{\bar{x}}(\bar{B} - x) = \pi_{\bar{x}}(\bar{B}),$$

где $\bar{B} - x$ обозначает систему борелевских множеств, получаемую из $\bar{B}$ сдвигом на вектор x .

Определение 1. Будем говорить, что для однородного т. поля Π определено производное т. поле l -того порядка, если выполняются условия

$$а) \quad \pi_l(C) = \sigma^{(l)} v^l + o(v^l),$$

где v — лебеговская мера в E_k борелевского множества C (диаметр множества C стремится к нулю) и $\sigma^{(l)} \neq 0$ есть коэффициент, не зависящий от v .

б) Для любой последовательности борелевских множеств C , стягивающихся к началу координат, существует предел

$$\lim \frac{\pi_{(l,k)}(C, \bar{B})}{\pi_l(C)} = \pi_k^{(l)}(\bar{B}),$$

причем $\pi_k^{(l)}(\bar{B})$ задает некоторую вероятностную меру $\pi^{(l)}$ в (Ω, R) . Отвечающее мере $\pi^{(l)}$ т. поле $\Pi^{(l)}$ будем называть производным т. полем l -того порядка т. поля Π .

Легко можно показать, что справедлива

Теорема 1. Если для независимых однородных т. полей Π_i , $i = 1, \dots, n$ определены производные т. поля l -того порядка, то и для их суперпозиции

$$\Pi = \Pi_1 * \dots * \Pi_n$$

определено производное т. поле l -того порядка, причем

$$\Pi^{(l)} = \sum_{l_1 + \dots + l_n = l} \frac{\sigma_1^{(l_1)} \dots \sigma_n^{(l_n)}}{\sigma^{(l)}} \Pi_1^{(l_1)} * \dots * \Pi_n^{(l_n)} \quad (1)$$

и

$$\sigma^{(l)} = \sum_{l_1 + \dots + l_n = l} \sigma_1^{(l_1)} \dots \sigma_n^{(l_n)}.$$

В (1) положено $\Pi_i^{(0)} = \Pi_i$. Вообще под выпуклой суммой т. полей

$$\Pi = \sum p_i \Pi_i, \quad \sum p_i = 1, \quad p_i > 0$$

следует понимать т. поле, отвечающее выпуклой сумме

$$\sum p_i \pi_i,$$

где π_i — вероятностные меры в (Ω, R) , отвечающие т. полям Π_i .

В формулировке теоремы 1 нижние индексы указывают, к какому т. полю относится данная величина.

Отметим следующее свойство употребляемой нами символики: если под символом Π понимать отвечающую данному т. полю производящую функцию, т. е. если формально полагать

$$\Pi = \Sigma \bar{z}^k \pi_k(\bar{B})$$

и символ $*$ читать как умножение, то уравнения для т. полей (1) превращаются в алгебраические соотношения для производящих функций соответствующих т. полей. Имея это в виду, в дальнейшем суперпозицию независимых т. полей будем записывать с помощью знака умножения и будем обращаться с уравнениями в т. полях как с алгебраическими соотношениями.

Переходя к определению класса $\mathfrak{M}'$, ограничимся т. полями, для которых определены производные т. поля всех порядков.

Определение 2. Однородное т. поле Π принадлежит классу $\mathfrak{M}'$, если выполняются условия

а) существует такое целое r , что для всех $l > r$

$$\Pi^{(l)} = \Pi^{(r)}; \quad (2)$$

разумеется, в (2) исключается из рассмотрения начало координат;

б) для номеров $l > r$ справедливо представление

$$\pi_{(l,1)}(C, dC) = \pi_l(C) \alpha dv + o(v') dv + o(dv) \alpha + o, \quad (3)$$

где C — шар (малого) объема v , а dC — шаровой слой объема dv , примыкающий снаружи к шару C .

В дальнейшем постоянную величину α из (3) будем называть параметром т. поля $\Pi \in \mathfrak{M}'$.

Условие б) определения 2, очевидно, представляет собой некоторое требование асимптотической независимости числа объектов, попадающих в различные части малых областей в E_k . Что касается условия а), то определенное представление о его характере дает следующая простая теорема, которую мы также приводим без доказательства.

Теорема 2. Пусть т. поле Π_1 удовлетворяет условию а) определения 2, и пусть Π_1 — однородное т. поле, для которого $\pi_r(C) = o(v')$ (обозначения см. в а), определения 1) но определены производные т. поля порядков меньших r .

Тогда для выпуклой суммы

$$\bar{\Pi} = p\Pi + q\Pi_1, \quad p + q = 1, \quad p, q \geq 0$$

определены производные т. поля всех порядков, причем

$$\bar{\Pi}^{(l)} = \Pi^{(l)} \quad \text{для } l \geq r.$$

Примеры т. полей из класса $\mathfrak{M}'$. Если Π_1 — т. поле, фигурирующее в условии теоремы 2, а Π_2 — однородное пуассоновское т. поле, то, как легко видеть, выпуклая сумма

$$p\Pi_1 + q\Pi_2$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}'$.

С помощью введенных выше т. полей Π_1 и Π_2 можно построить и другой пример т. поля, принадлежащего классу $\mathfrak{M}'$.

Пусть $B(P)$ — бинарное однородное стохастическое поле на E_k , т. е. поле с вероятностью 1 принимающее только два значения: 0 и 1.

От $B(P)$ дополнительно потребуем, чтобы вероятность события: „ $B(P)$ принимает различные значения внутри шара объема v “ — стремилась бы к нулю вместе с v .

Под произведением $B(P)\Pi$ в настоящем примере будем понимать т. поле, получаемое из т. поля Π путем его прореживания согласно бинарному полю $B(P)$. Именно, объект т. поля Π , находящийся в точке P , выбрасывается, если $B(P) = 0$ и остается на месте, если $B(P) = 1$. Для независимых $B(P)$, Π_1 и Π_2 можно установить, что суперпозиция зависимых т. полей

$$B(P) \Pi_1 * [1 - B(P)] \Pi_2 \quad (4)$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}'$. Имеется в виду при этом, что слева и справа от звезды в (4) стоит одна и та же реализация поля $B(P)$.

Следующая лемма является следствием условия б), входящего в определение класса $\mathfrak{M}'$.

Лемма 1. Если $\Pi \in \mathfrak{M}'$, то для всех $l \geq r$

$$\sigma^{(l)} = \frac{C a^l}{l!},$$

где C не зависит от l , а a — параметр т. поля Π .

Доказательство. Вероятности $\pi_l(C)$, где C — шар объема v , будем рассматривать как функцию от v и обозначать $\pi_l(v)$. Имеем, в понятных обозначениях ($l \geq r$)

$$\begin{aligned} \pi_l(v + dv) &= \pi_{(l,0)}(v, dv) + \pi_{(l-1,1)}(v, dv) + o(dv) = \\ &= \pi_l(v) - \pi_{(l,1)}(v, dv) + \pi_{(l-1,1)}(v, dv) + o(dv) = \\ &= \pi_l(v) - \pi_l(v) a dv + o(v') dv + \pi_{l-1}(v) a dv + o(v'^{-1}) dv + o(dv). \end{aligned}$$

Следовательно, существует производная $\frac{d}{dv} \pi_l(v)$, причем

$$\frac{d}{dv} \pi_l(v) = -a \pi_l(v) + a \pi_{l-1}(v) + o(v'^{-1}).$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$\pi_l(v) = e^{-av} \int_0^v e^{az} a \pi_{l-1}(z) dz + e^{-av} \int_0^v e^{az} o(z'^{-1}) dz.$$

Используя условие а) определения 1, получаем

$$\sigma^{(l)} = \frac{\sigma^{(l-1)}}{l} a, \quad l \geq r,$$

откуда и следует утверждение леммы 1.

Прежде чем сформулировать основную теорему 3 дадим еще одно

Определение 3. Будем говорить, что строка т. полей

$$(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n)$$

принадлежит к классу строк $\bar{\mathfrak{M}}'^n$, если

- а) все $\Pi_i \in \mathfrak{M}'$, $i = 1, \dots, n$ и независимы;
 б) каким бы образом ни выбирались индекс i и набор индексов $j_1, \dots, j_k$, $k < n$, $i \neq j_1, \dots, i \neq j_k$ из множества $1, 2, \dots, n$, всегда
- $$z_i \neq z_{j_1} + z_{j_2} + \dots + z_{j_k},$$

здесь z_i — параметр т. поля Π_i в смысле определения 2.

3. Теорема 3. Пусть т. поле Π является суперпозицией т. полей Π_i , $i = 1, \dots, n$

$$\Pi = \Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_n,$$

и удовлетворяет условию а) определения 2, а $(\Pi_1, \dots, \Pi_n) \in \bar{\mathfrak{M}}'^n$. Тогда т. поле Π , также как и т. поля Π_i , $i = 1, \dots, n$, являются т. полями Пуассона.

При доказательстве теоремы 3 используется следующая лемма, доказательство которой мы опускаем.

Лемма 1. Пусть $r_1, \dots, r_k$, m , s — целые неотрицательные числа, $z_1, \dots, z_k$ — действительные числа; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{l=s}^{\infty} z^l \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_k = l - m \\ l_i \geq r_i, \dots, l_k \geq r_k}} \frac{z_1^{l_1} \dots z_k^{l_k}}{l_1! \dots l_k!} = \\ = z^m e^{(z_1 + \dots + z_k)z} + \sum_{\substack{\{l_1, \dots, l_k\} \\ h < k}} e^{(z_{l_1} + \dots + z_{l_h})z} \varphi_{l_1, \dots, l_h}(z) \end{aligned}$$

где $\varphi_{l_1, \dots, l_h}(z)$ — многочлены, степень каждого из которых не превышает

$$\max(s, m + r_1 + r_2 + \dots + r_k).$$

Сумма справа берется по всем возможным наборам индексов размеров меньших k , которые можно выбрать из множества индексов $\{1, 2, \dots, k\}$.

Доказательство теоремы 3.

Величины $\sigma^{(i)}$, r , a , c , определенные для каждого т. поля из класса $\mathfrak{M}'$, будем относить к т. полю Π_i , добавляя к ним нижний индекс i .

Положим $s = \max(r, r_1 + \dots + r_n)$ и рассмотрим производные т. поля $\Pi^{(l)}$ порядков, превышающих s . Согласно условию теоремы 3 можно положить для таких l

$$\Pi^{(l)} = \Pi^{(r)}, \Pi_i^{(l)} = \Pi_i^{(r_i)}, \sigma_i^{(l)} = \frac{c_i a_i^l}{l!}. \quad (5)$$

Уравнение (1) для $\Pi^{(l)}$, учитывая (5), перепишем в виде

$$\sigma^{(l)} \Pi^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\{l_1, \dots, l_k\}} \sum_{\substack{0 \leq l_{l_1} < r_{l_1} \\ \vdots \\ 0 \leq l_{l_k} < r_{l_k}}} \sigma_{l_1}^{(l_{l_1})} \dots \sigma_{l_k}^{(l_{l_k})} \Pi_{l_1}^{(l_{l_1})} \dots \Pi_{l_k}^{(l_{l_k})} \times$$

$$\times c_{j_1} \cdots c_{j_{n-k}} \prod_{j_1}^{(r_{j_1})} \cdots \prod_{j_{n-k}}^{(r_{j_{n-k}})} \sum_{\substack{l_{j_1} + \cdots + l_{j_{n-k}} = l_{j_1}! \cdots l_{j_{n-k}}! \\ l_{j_1} \geq r_{j_1}, \dots, l_{j_{n-k}} \geq r_{j_{n-k}}}} \frac{a_{j_1}^{l_{j_1}} \cdots a_{j_{n-k}}^{l_{j_{n-k}}}}{l_{j_1}! \cdots l_{j_{n-k}}!}. \quad (6)$$

Поясним, что в (6) второе суммирование производится по всем возможным наборам индексов размера k , которые можно выбрать из множества индексов $\{1, 2, \dots, n\}$, а $j_1, \dots, j_{n-k}$ это те индексы из множества $\{1, 2, \dots, n\}$, которые не входят в набор $\{i_1, \dots, i_k\}$. Согласно теореме 1 имеем также

$$\sigma^{(l)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_k\}} \sum_{\substack{0 < l_{i_1} < r_{i_1} \\ \dots \\ 0 < l_{i_k} < r_{i_k}}} \sigma_{i_1}^{(l_{i_1})} \cdots \sigma_{i_k}^{(l_{i_k})} c_{j_1} \cdots c_{j_{n-k}} \sum_{\substack{l_{j_1} + \cdots + l_{j_{n-k}} = l_{j_1}! \cdots l_{j_{n-k}}! \\ l_{j_1} \geq r_{j_1}, \dots, l_{j_{n-k}} \geq r_{j_{n-k}}}} \frac{a_{j_1}^{l_{j_1}} \cdots a_{j_{n-k}}^{l_{j_{n-k}}}}{l_{j_1}! \cdots l_{j_{n-k}}!}.$$

Помножим теперь уравнение (6) на z^l и просуммируем от s до ∞ . Меняя порядок суммирования и используя лемму 2, приходим к результату

$$\begin{aligned} & \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_k\}} \sum_{\substack{0 < l_{i_1} < r_{i_1} \\ \dots \\ 0 < l_{i_k} < r_{i_k}}} \sigma_{i_1}^{(l_{i_1})} \cdots \sigma_{i_k}^{(l_{i_k})} c_{j_1} \cdots c_{j_{n-k}} \times \\ & \times \left[z^{l_{i_1} + \cdots + l_{i_k}} e^{(a_{j_1} + \cdots + a_{j_{n-k}})z} + \sum_{\{d_1, \dots, d_h\}} e^{(a_{j_{d_1}} + \cdots + a_{j_{d_h}})z} \varphi_{j_{d_1} \dots j_{d_h}}(z) \right] = \quad (7) \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_k\}} \sum_{\substack{0 < l_{i_1} < r_{i_1} \\ \dots \\ 0 < l_{i_k} < r_{i_k}}} \sigma_{i_1}^{(l_{i_1})} \cdots \sigma_{i_k}^{(l_{i_k})} \prod_{i_1}^{(l_{i_1})} \cdots \prod_{i_k}^{(l_{i_k})} \prod_{j_1}^{(r_{j_1})} \cdots \prod_{j_{n-k}}^{(r_{j_{n-k}})} \times \\ & \times c_{j_1} \cdots c_{j_{n-k}} \left[z^{l_{i_1} + \cdots + l_{i_k}} e^{(a_{j_1} + \cdots + a_{j_k})z} + \right. \\ & \left. + \sum_{\{d_1, \dots, d_h\}} e^{(a_{j_{d_1}} + \cdots + a_{j_{d_h}})z} \varphi_{j_{d_1} \dots j_{d_h}}(z) \right]. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2, степени каждого из многочленов $\varphi_{j_{d_1} \dots j_{d_h}}(z)$ не превосходят $\max(s, l_{i_1} + \cdots + l_{i_k} + r_{j_1} + \cdots + r_{j_{n-k}}) = s$.

Из этого, в частности, следует, что правую часть (7) можно представить в виде

$$c_1 \cdots c_n \prod_1^{(r_1)} \cdots \prod_n^{(r_n)} e^{(a_1 + \cdots + a_n)z} + \quad (8)$$

+ остаток, линейно не зависящий от функции $e^{(a_1 + \cdots + a_n)z}$, а левую часть (7)—в виде

$$c_1 \cdots c_n \prod^{(r)} e^{(a_1 + \cdots + a_n)z} + \quad (9)$$

+ остаток, линейно не зависящий от функции $e^{(a_1 + \dots + a_n)z}$, откуда заключаем, что

$$\Pi^{(r)} = \Pi_1^{(r_1)} \dots \Pi_n^{(r_n)}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что слагаемые слева и справа в (7), отвечающие $k=0$ равны и взаимно уничтожаются. Следовательно, равенство (7) остается справедливым, если слева и справа в (7) производить суммирование по k лишь от 1 до $n-1$. Замечания аналогичные (8) и (9) справедливы и для укороченных таким образом сумм слева и справа в формуле (7), по отношению к функциям $e^{(2a_k - a_l)z}$ и $ze^{(2a_k - a_l)z}$; с учетом условия б) определения 3 сравнение коэффициентов при этих функциях приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \Pi^{(r)} &= \Pi_1^{(r_1)} \dots \Pi_i^{(0)} \dots \Pi_n^{(r_n)}, \\ \Pi^{(r)} &= \Pi_1^{(r_1)} \dots \Pi_i^{(1)} \dots \Pi_n^{(r_n)} \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Откуда заключаем, что

$$\Pi_i^{(0)} = \Pi_i^{(1)} \quad (i=1, \dots, n). \quad (11)$$

Как показано в [4], из уравнений (11) следует, что Π_i , $i=1, \dots, n$ является т. полем Пуассона. Следовательно, и Π есть т. поле Пуассона.

Таким образом, теорема 3 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 1.11.66

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ԹՎՈՎ ԱՆԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐԻՋՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՎՈՂ ԿԵՏԱՅԻՆ
ԴԱՇՏԵՐԻ ՊՈՒԱՍՍՈՆՅԱՆ ԼԻՆԵԼՈՒ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. ինչ պայմանների պետք է բավարարեն հարթույթյան կամ տարածություն մեջ տրված Π և Π_i ($i=1, \dots, n$) կետային դաշտերը, որպեսզի $\Pi = \Pi_1 * \dots * \Pi_n$ առնչությունից բխի Π -ի (ինչպես և բոլոր Π_i բաղադրիչների) Պուասսոնյան լինելը:

Գտնված է մի բավարար պայման, որը հետևյալն է.

$$\Pi \in \mathcal{M}', \quad (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \in \tilde{\mathcal{M}}'^n$$

որտեղ $\mathcal{M}'$ և $\tilde{\mathcal{M}}'^n$ դասերը սահմանված են ածանցյալ դաշտերի տերմիններով (տես սահմանումներ 1, 2, 3), Միաչափ դեպքում $\mathcal{M}'$ դասը ընդգրկում է «ռեգուլյար» վերջավոր կարգի Մարկովյան կետային պրոցեսների դասը:

R. V. AMBARTZUMIAN

CHARACTERISATION OF POISSON POINT FIELDS IN TERMS OF EXISTENCE OF LIMITED NUMBER OF INDEPENDENT COMPONENTS

Summary

The paper considers the following problem: find out the conditions to be imposed on the homogeneous point fields Π and Π_i ($i=1, \dots, n$) with realisations on plane or in space, such that from representation

$$\Pi = \Pi_1 * \dots * \Pi_n$$

one may derive, that either Π and Π_i are Poisson. In the paper such sufficient conditions are found. These conditions are formulated as follows:

$$\Pi \in \mathfrak{M}', (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \in \overline{\mathfrak{M}}'^n$$

where $\mathfrak{M}'$ and $\overline{\mathfrak{M}}'^n$ are classes of point fields, defined in the paper in terms of derivative point fields (definitions 1, 2, 3). In one dimensional case the class $\mathfrak{M}'$ contains the class of regular Markov point processes of finite order.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. McFadden. On the lengths of intervals in a stationary point process, J. R. Statis. Soc., B, 24, 368—382.
2. Р. В. Амбарцумян. К характеристике точечных процессов Пуассона в терминах разложимости точечного процесса на независимые рекуррентные компоненты.
3. R. V. Ambartzumian. Two inverse problems concerning the superposition of recurrent point processes, J. Appl. Prob., 2, 449—454 (1965).
4. Р. В. Амбарцумян. Об одном уравнении стационарных точечных процессов, ДАН Арм.ССР, XII, № 3 (1965).