ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 1, 1967 Математика

Г. С. ЛИТВИНЧУК и Н. Т. МИШНЯКОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для неограниченной области краевая задача Карлемана в классе обобщенных аналитических функций исследована в работе [1] одного из авторов этой статьи. Однако, примененный в [1] метод оказался недостаточным для решения задачи Карлемана в классе обобщенных аналитических функций в случае ограниченной области. Последняя задача рассматривалась Хоу Цзун-И [2], который установил связь между разрешимостью этой задачи и союзной с ней краевой задачи. Вопросы о числе линейно независимых решений и условий разрешимости задачи, так же как и вопрос о построении ее общего решения, по-прежнему оставались открытыми. В настоящей заметке, опираясь на результаты работ [1] и [2], мы восполняем этот пробел.

1. Сформулируем задачу, указанную в заглавии статьи. Пусть L — замкнутый контур Ляпунова, делящий плоскость на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. Начало координат принадлежит области D^+. Пусть $\alpha(t)$ — заданная на контуре L функция, имеющая H—непрерывную и отличную от нуля на L производную $\alpha'(t)$, и пусть $\alpha(t)$ гомеоморфно отображает контур L на себя с изменением направления обхода на нем. На L заданы также H — непрерывные функции $G(t)$ и $g(t)$, причем $G(t)\neq 0$. Пусть еще задана функция $A(z)$, непрерывная на всей плоскости за исключением дискретного ряда точек, в которых не существует предела функции $A(z)$, но $A(z)$ ограничена, и конечного числа линий разрыва первого рода. В окрестности бесконечно удаленной точки $A(z)$ допускает оценку

$$|A(z)|\leqslant\frac{M}{|z|^{\beta}},\ M>0,\ \beta>1.$$

Требуется найти регулярное в D^+ решение уравнения [3] (обобщенную аналитическую функцию)

$$\frac{\partial U}{\partial\bar{z}}=A(z)\bar{U},\tag{1}$$

удовлетворяющее на контуре L условию

$$U^+[\alpha(t)]=G(t)\,U^+(t)+g(t),\tag{2}$$

причем $\alpha(t)$ удовлетворяет на L условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)]=t.\tag{3}$$

Сформулируем результат Хоу Цзун-И [2].

Если союзная с задачей (2) однородная краевая задача

$$\psi^+[\alpha(t)] = \alpha'[\alpha(t)]\, G[\alpha(t)]\, \psi^+(t) \tag{4}$$

для регулярного в D^+ решения уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial \bar z} = \bar A(z)\, \bar\psi \tag{5}$$

не имеет нетривиальных решений, то краевая задача (2) разрешима.

2. Справедлива [1]

Лемма 1. *Уравнение (1) имеет единственное, с точностью до действительного постоянного множителя, регулярное в D^+ решение, удовлетворяющее краевому условию*

$$U^+[\alpha(t)] = \lambda U^+(t) \text{ на } L,\ \lambda = \pm 1, \tag{6}$$

тождественно равное нулю при $\lambda = -1$.

Лемма 2. *Если $\psi(z)$ — регулярное в D^+ решение уравнения (5), удовлетворяющее на L условию*

$$\psi^+[\alpha(t)] = \frac{\lambda}{\alpha'(t)}\, \psi^+(t), \tag{7}$$

то $\psi(z) \equiv 0$ в области D^+.

В самом деле, используя представление регулярных решений уравнения (5) ([3], стр. 156)

$$\psi(z) = \varphi(z) \exp \omega(z),\quad \omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\overline{A(\zeta)}}{\zeta - z}\, \frac{\bar\psi}{\psi}\, dT,$$

сведем задачу (7) к однородной задаче Карлемана для аналитической функции $\varphi(z)$ с коэффициентом

$$s(t) = \frac{\lambda}{\alpha'(t)} \exp\{\omega(t) - \omega[\alpha(t)]\}.$$

Так как $\operatorname{Ind} s(t) = 2$, то последняя задача не имеет нетривиальных решений в D^+, откуда $\psi(z) \equiv 0$ в D^+.

Рассмотрим краевую задачу

$$U^+[\alpha(t)] = \lambda U^+(t) + g(t) \text{ на } L,\ \lambda = \pm 1, \tag{8}$$

где, как следует из (3), должно быть

$$g(t) + \lambda g[\alpha(t)] = 0 \text{ на } L. \tag{9}$$

Полагая $G(t) = \lambda$, из краевого условия (4) получаем союзную с задачей (8) задачу (7), которая, согласно лемме 2, имеет только тривиальное решение. Следовательно, задача (8) безусловно разрешима [2]. Учитывая лемму 1, получаем, что общее решение задачи (8) имеет вид

$$U(z) = C_\lambda U_0(z) + U_0^*(z),$$

где первое слагаемое есть общее решение задачи (6), а второе слагаемое есть частное решение задачи (8), C_λ — действительная постоянная, равная нулю при $\lambda = -1$.

Рассмотрим теперь краевую задачу (8) в классе функций, имеющих в начале координат полюс порядка $\varkappa'$. Такие функции можно представить в виде

$$U(z) = V(z) + U_R(z), \tag{10}$$

где $V(z)$ — регулярное в D^+ решение уравнения (1), а $U_R(z) = \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k W_k(z)$ — обобщенная рациональная функция, $W_k(z)$ — аналоги отрицательных степеней z^{-k}, iz^{-k}. Функции $W_k(z)$ строятся ([3]), стр. 200) при помощи оператора

$$K_D[\Phi(z)] = \Phi(z) + \iint_D \Gamma_1(z, t)\,\Phi(t)\,dT + \iint_D \Gamma_2(z, t)\,\overline{\Phi(t)}\,dT,$$

где $\Gamma_1(z, t)$ и $\Gamma_2(z, t)$ — резольвенты уравнения (1), а $\Phi(z)$ — любая аналитическая функция. Имеем

$$W_{2k-1}(z) = K_D[z^{-k}],\quad W_{2k}(z) = K_D[iz^{-k}],\quad k=1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (8), получим для $V(z)$ краевую задачу

$$V^+[\alpha(t)] - \lambda V^+(t) = \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k \{\lambda W_k(t) - W_k[\alpha(t)]\} + g(t). \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что правая часть краевого условия (12) удовлетворяет условию (9). Следовательно, задача (12) разрешима при любых действительных постоянных c_k. Пусть $V_k(z)$ — частные решения краевых задач

$$V^+[\alpha(t)] - \lambda V^+(t) = \lambda W_k(t) - W_k[\alpha(t)],\quad \lambda = \pm 1.$$

Тогда общее решение задачи (8) в указанном выше классе функций запишется в виде формулы

$$U(z) = C_\lambda U_0(z) + U_0^*(z) + \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k U_k(z), \tag{13}$$

где $U_k(z) = V_k(z) + W_k(z)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Общее решение задачи (8) в классе функций, имеющих в начале координат полюс порядка $\varkappa'$, содержит $2\varkappa' + 1$ или $2\varkappa'$ произвольных действительных постоянных, если соответственно $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$, и дается формулой (13).*

Составляющие общего решения (13) строятся так же, как это сделано в работе [1]: при помощи обобщенных интегралов типа Коши, плотности которых являются решениями нормально разрешимых сингулярных интегральных уравнений (с ядром Коши) с равными нулю индексами и удовлетворяют линейным соотношениям, совпадающим с соответствующими краевыми условиями.

3. Перейдем теперь к исследованию задачи (2). Ввиду условия (3) интерес представляет случай, когда на L

$$G(t)\,G[\alpha(t)] = 1,$$
$$g(t) + G(t)\,g[\alpha(t)] = 0. \tag{14}$$

Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$. Остановимся на случае $\varkappa = 2\varkappa'$. Случай нечетного $\varkappa$ легко приводится [4] к случаю $\varkappa = 2\varkappa'$. Если $\varkappa$ — четное число, то, как видно из условия (3) и первого условия (14), в неподвижных точках t_1 и t_2 сдвига $\alpha(t)$ либо $G(t_1) = G(t_2) = 1$, либо $G(t_1) = G(t_2) = -1$. Известно [4], что для задачи Карлемана теории аналитических функций существует каноническая функция [5], удовлетворяющая на L краевому условию

$$\chi^+[\alpha(t)] = \lambda G(t)\,\chi^+(t), \tag{15}$$

где $\lambda = \pm 1$ — значение функции $G(t)$ в неподвижных точках сдвига $\alpha(t)$. Функция $\chi(z)$—аналитическая в области D^+, имеющая нулевой порядок всюду в $D^+ + L$, кроме точки $z = 0$, где порядок $\chi(z)$ равен — $\varkappa'$. Так как $\chi^+(t) \neq 0$ на L, то, выражая $G(t)$ из (15) и подставляя полученный результат в краевое условие (2), придем к краевой задаче

$$\frac{U^+[\alpha(t)]}{\chi^+[\alpha(t)]} = \lambda\,\frac{U^+(t)}{\chi^+(t)} + \frac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]} \quad \text{на } L \tag{16}$$

для функции $\dfrac{U(z)}{\chi(z)}$, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{U}{\chi}\right) = A(z)\,\frac{\overline{\chi(z)}}{\chi(z)}\,\overline{\left(\frac{U}{\chi}\right)}. \tag{17}$$

Пусть $\varkappa \geqslant 0$. Так как функция $\dfrac{U(z)}{\chi(z)}$ имеет в начале координат полюс порядка $\varkappa'$, а функция $\dfrac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]}$, в силу (14), удовлетворяет условию (9), заключаем, что в этом случае для краевой задачи (16) справедлива теорема 1. Поэтому общее решение задачи (16), а, следовательно, и задачи (2) имеет вид

$$U(z) = \chi(z)\left[C_\lambda U_0(z) + U_0^*(z) + \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k U_k(z)\right], \tag{18}$$

где c_k и C_λ — произвольные вещественные постоянные.

При $\varkappa < 0$ в формуле (18) все $c_k^* = 0$, а функция $C_\lambda U_0(z) + U_0^*(z)$ должна иметь в точке $z = 0$ нуль порядка не ниже $-\varkappa'$. Таким образом, в этом случае для существования регулярного в D^+ решения уравнения (17), удовлетворяющего краевому условию (2), необходимо и достаточно выполнение $-\varkappa$ вещественных условий разрешимости при $\lambda = -1$ и $-\varkappa - 1$ условий при $\lambda = 1$. В самом деле, в последнем случае одно из $-\varkappa$ условий разрешимости удовлетворяется за счет соответствующего выбора вещественной постоянной C_λ.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Общее решение краевой задачи (2) для уравнения (1) при* $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) \geqslant 0$, *регулярное в* D^+, *зависит от* $\varkappa + 1$ *или* $\varkappa$ *произвольных вещественных постоянных, если соответственно* $\lambda = 1$ *или* $\lambda = -1$, *и дается формулой (18). При* $\varkappa < 0$ *единственное регулярное в* D^+ *решение задачи (2) существует при выполнении* $-\varkappa - 1$ $(\lambda = 1)$ *и* $-\varkappa$ $(\lambda = -1)$ *вещественных условий разрешимости, выражающихся через коэффициенты краевого условия (2) и уравнения (1).*

Одесский государственный университет
Ростовский государственный университет
Поступило 19.V.66

Գ. Ս. ԼԻՏՎԻՆՉՈՒԿ և Ն. Տ. ՄԻՇՆՅԱԿՈՎ

ԿԱՐԼԵՄԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՀԱՄԱՐ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍՈՒՄ

Ամփոփում

Տրված է Կարլեմանի եզրային խնդրի լուծումը առաջին կարգի էլիպտիկ տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների համար վերջավոր միակապ տիրույթի դեպքում։

G. S, LITWINCHUK and N. T. MISNJAKOV

CARLEMAN BOUNDARY PROBLEM FOR BOUNDED DOMAINS IN THE CLASS OF GENERALISED ANALYTIC FUNCTIONS

Summary

Carleman boundary problem for a system of the first order differential equations of elliptic type is considered. The solution is found in the case of finite, simply-connected domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Литвинчук.* Об одной краевой задаче с обратным сдвигом в классе обобщенных аналитических функций, Сибирский матем. журнал, III, № 2 (1962), 223—228.
2. *Хоу Цзун-И.* Краевая задача Карлемана для эллиптических систем уравнений первого порядка, „Scienta Sinica“, 12, № 8 (1963), 1237.
3. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., (1959).
4. *Д. А. Квеселава.* Некоторые граничные задачи теории функций, Труды Тбилисского матем. института, 16 (1948), 39—80.
5. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, Физматгиз, М., (1963).