ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 1, 1967 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМАМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

Введение

1. В работе автора [1] была построена специальная система рациональных функций $\{M_k(z)\}_0^\infty$ с фиксированными полюсами $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащими вне данного ограниченного континуума K, содержащего более одной точки. Эта система представляла собой естественное обобщение хорошо известных полиномов Фабера для того случая, когда все полюсы сосредоточены не в точке $z=\infty$, а лежат на данной последовательности точек $\{\omega_k\}_0^\infty$ вне континуума K.

Построение системы $\{M_k(z)\}_0^\infty$ проводилось следующим образом.

Во-первых, вводилась в рассмотрение ортонормальная на окружности $|w|=1$ система рациональных функций Такенака-Мальмквиста

$$\varphi_0(w)=\frac{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_0 w},$$

$$\varphi_n(w)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_n w}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k-w}{1-\overline{\alpha}_k w}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots).\tag{1}$$

При этом мы полагаем, что $\alpha_k=\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$, где функция $w=\Phi(z)$ $(z=\Psi(w))$, подчиненная условиям нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, конформно отображает смежную с континуумом K компоненту $G^{(-)}\supset\infty$ на область $D^{(-)}=\{w,\ |w|>1\}$.

Затем система $\{M_k(z)\}_0^\infty$ определялась посредством приема, аналогичного тому, который применяется при определении полиномов Фабера (см. напр. [2] и [3]).

А именно, функция $M_n(z)$ определялась как сумма главных частей с постоянными слагаемыми разложения функции $\varphi_n[\Phi(z)]$ в окрестностях всех ее полюсов $\{\omega_k\}_0^n$, отличных друг от друга.

Отметим, что указанный прием построения более общих чем у Фабера базисов в работе [1], по-видимому, применялся впервые.

Наконец, в случае, когда K есть замыкание жордановой области G^{+}, а $G^{(-)}$ — ее дополнение, в работе [1] устанавливалась возможность равномерно сходящегося внутри области $G^{(+)}$ разложения

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k M_k(z)\tag{2}$$

при определенных ограничениях, накладываемых на густоту расположения полюсов $\{\omega_k\}_0^\infty \subset G^{(-)}$, на границу Г области $G^{(+)}$ и на разлагаемую функцию $f(z)$.

Условие на последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty$ заключалось в требовании

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) = +\infty. \tag{3}$$

Отметим, что, хотя и в случае, когда область — круг $D^{(+)} = \{z, |z| < 1\}$, было хорошо известно, что это требование необходимо, в общем случае вопрос его необходимости оставался открытым.

Ограничение, накладываемое на контур Г, было несколько жестким, поскольку оно заключалось в требовании конечности величины

$$H_p(\Gamma) = \lim_{r \to +0} \sup \left\{ \int_0^{2\pi} |\Psi'(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\} < +\infty \tag{4}$$

при $p = 2$, в то время как для произвольной жордановой спрямляемой кривой Г можно лишь утверждать конечность этой величины при $p=1$.

Наконец, что касается наложенного на разлагаемую функцию $f(z)$ ограничения, а именно требования, чтобы она была голоморфной внутри и непрерывной в замкнутой области $\overline{G^{(+)}}$, то следует отметить, что оно было совершенно не по существу. Дело в том, что примененный в работе [1] метод доказательства теоремы разложения оставался в силе и для класса функций, представимых в области $G^{(+)}$ интегралом типа Коши

$$f(z) = K(z; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \tag{5}$$

2. Впоследствии, с целью освобождения от наложенного нами на контур Г ограничения $H_2(\Gamma) < +\infty$, Г. Ц. Тумаркин [4] в качестве $\{M_k(z)\}_0^\infty$ предложил несколько модифицированную систему $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$. Эта модификация совершалась с помощью приема, известного в теории различных обобщений полиномов Фабера (см. напр. [3]). Он заключается в том, что в отличие от $M_n(z)$, определенной нами посредством функции $\varphi_n[\Phi(z)]$, функция $M_n^*(z)$ определялась уже как сумма главных частей и постоянных слагаемых от выражения $\sqrt{\Phi'(z)} \times \varphi_n[\Phi(z)]$. Оказалось, что определенная таким образом модифицированная система $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$ при том же условии (3) уже образует базис в области $G^{(+)}$, притом без каких-либо дополнительных ограничений на контур Г, кроме условия его спрямляемости—$H_1(\Gamma) < +\infty$.

Здесь было доказано, что каждая функция $f(z)$, представимая интегралом типа Коши

$$f(z) = K(z; g), \quad z \in G^{(+)}, \tag{6}$$

с функцией плотности $g(\zeta)$, подчиненной условию $\int |g(\zeta)|^2 |d\zeta| < +\infty$, разлагается в равномерно сходящийся внутри области $G^{(+)}$ ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{*}(z), \quad z \in G^{(+)}, \tag{7}$$

где $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$.

Кроме того, в этой же работе Г. Ц. Тумаркин доказал также важную теорему о необходимости условия (3) в случае произвольной области $G^{(+)}$ со спрямляемой жордановой границей. Точнее, им было установлено необходимое и достаточное условие для возможности разложения (7) функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (6), в том случае, когда условие (3) не выполняется, т. е. когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty. \tag{8}$$

Это условие заключается в том, что среди всевозможных представлений данной функции $f(z)$ интегралом типа Коши: $f(z) = K(z; g)$ существует такое, при котором функция $g(\zeta)$ почти всюду на Г совпадает с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в $G^{(-)}$ функции $F(z)$ с полюсами в точках последовательности $\{\omega_k\}_0^{\infty}$ и с вполне определенным структурным представлением*.

3. В настоящей статье приводится развернутое изложение результатов нового исследования автора, касающихся вопросов разложимости аналитических функций в ряды по более общим, родственным с рассмотренными ранее, системам рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$, а также вопросов сходимости таких рядов и разложений на всей комплексной плоскости.

Отметим, что как в первой работе автора [1], так и в работе Г. Ц. Тумаркина [4] вопрос о поведении рядов вида (2) или (7) в области $G^{(-)}$, в случае нарушения условия разложимости (3), т. е. при условии (8) не был затронут вовсе и здесь исследуется впервые**.

В этом направлении, по-видимому, впервые устанавливается наличие систем рациональных функций, образующих базис в множестве довольно общих классов в известном смысле „моногенных" функций.

Приведем несколько подробный обзор содержания данной работы, состоящей из четырех параграфов.

В § 1, имеющем предварительный характер, приводится изложение некоторых необходимых для дальнейшего результатов, касающихся ортонормальной системы Такенака-Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$ и разложений по этой системе. При этом мы сочли уместным для облегчения чте-

---

* См. [4], теорему 2, а также теорему 3.

** Основные результаты данной работы были анонсированы нами ранее без доказательств в заметке [5].

ния статьи большинство этих сведений привести с доказательствами.

Отметим, что эти доказательства читатель может найти также в известной монографии Дж. Уолша (см. [6], гл. X). Однако соответствующие факты изложены там в несколько ином аспекте и в менее общем виде, как теоремы об интерполировании функций из H_2 рациональными функциями с *простыми* нулями $\{\alpha_k\}_0^\infty$, между тем как в нашем изложении не исключается случай, когда полюсы системы $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, расположенные на последовательности $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^\infty$, могут иметь произвольную кратность.

В заключение параграфа приводятся теоремы о рядах по неполным системам Такенака-Мальмквиста, т. е. по системам (1), для которых

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty.$$

В последующем мы по существу занимаемся распространением результатов этих теорем на случай произвольной ограниченной области со спрямляемой жордановой границей.

В § 2 статьи дается построение системы рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$, порожденной ограниченным континуумом K и произвольной последовательностью комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащей в ее неограниченной смежной компоненте $G^{(-)}\supset\infty$. Эта система строится как сумма главных частей и постоянных в разложениях функции $[\Phi'(z)]^s\varphi_n[\Phi(z)]$ в окрестностях всех ее отличных друг от друга полюсов $\{\omega_k\}_0^n$. Таким образом, при значениях параметра $s=0$ и $s=\dfrac{1}{2}$ система $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ охватывает как первоначальную систему $\{M_k(z)\}_0^\infty$, так и ее модификацию $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$.

Далее приводятся интегральные представления для системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в точках континуума K и на его дополнении $G^{(-)}$. Эти представления затем пишутся для того важного в дальнейшем случая, когда $K=\overline{G^{(+)}}$ есть замкнутая область с жордановой границей Γ, подчиненной условию $H_{2(1-s)}(\Gamma)<+\infty$. Наконец, в заключительной лемме 3 устанавливается другое, необходимое в последующем, свойство сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|M_k^{(s)}(z)|^2$$

в области $G^{(+)}$ вообще и в области $G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$ при условии (8).

Следующий § 3 посвящается исследованию рядов и разложений по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в предположении, что граница взаимно-дополнительных областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ удовлетворяет условию $H_{2(1-s)}(\Gamma)<+\infty$.

Здесь, во-первых, доказывается теорема Г. Ц. Тумаркина (см. [4], стр. 29) для системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в несколько усиленной формулировке о характере сходимости и о функциях, представимых в области $G^{(+)}$ рядами вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z) \quad \left(\sum_0^{\infty}|c_k|^2<+\infty\right). \tag{9}$$

Причем усиление заключается в утверждении, что такие ряды сходятся абсолютно.

Далее доказывается теорема 5, устанавливающая характер сходимости ряда (9) в области $G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$, а также структурное представление его суммы там же уже при условии (8). В результате из теорем 4 и 5 следует, что ряды вида (9) при условии (8) абсолютно и равномерно сходятся внутри множества $G^{(+)}+G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$, определяя две функции $f_i(z)$ $(z\in G^{(+)})$ и $f_e(z)$ $(z\in G^{(-)})$ с вполне определенным структурным представлением, являющимися „аналитическими продолжениями" друг друга через контур Γ областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$.

В конце параграфа доказывается теорема 6, являющаяся обобщением теоремы разложения работы [1], на случай системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ - когда порождающая ее последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty\in G^{(-)}$ удовлетворяет условию (3), а кривая Γ принадлежит классу $H_{2(1-s)}(\Gamma)<+\infty$. В ней, разумеется, охватывается также отмеченное уже выше усиление этой же теоремы на случай $H_1(\Gamma)<+\infty$, установленное в работе [4].

Наконец, в заключительном § 4 приводится исследование задачи разложения в принципиально отличном от теоремы 6 случае, когда порождающая последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty$ системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ удовлетворяет уже только условию (8).

Здесь, во-первых, доказывается (лемма 4) важное обобщение одного известного ранее тождества для систем $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$. Суть этой леммы заключается в эффективном определении разности между ядром Коши

$$\frac{1}{\zeta-z} \quad (\zeta\in\Gamma,\ z\in G^{(+)})$$

и его формальным разложением в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$. Это позволяет установить аналогичный результат для довольно общих классов $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ голоморфных в области $G^{(+)}$ функций, представимых в виде интеграла типа Коши (6) и с функцией плотности $g(\zeta)$, подчиненной условию

$$\int_\Gamma |[\Phi'(\zeta)]^{1/2-s} g(\zeta)|^2\, |d\zeta|<+\infty.$$

В итоге, в теореме 7 определяется значение разности

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)\, M_k^{(s)}(z) \tag{10}$$

между функциями класса $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ и их разложением по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в случае, когда последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty.$$

Результат этой теоремы может быть трактован как естественное обобщение теоремы Дж. Уолша [§ 1 (7⁰)] на случай в известном смысле неполной и неортогональной системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ и порождающей ее области $G^{(+)}$ с границей $H_{2(1-s)}[\Gamma]<+\infty$.

Отсюда, в качестве непосредственного следствия, мы приходим к теореме 8, дающей полную характеристику и структурное представление класса $\widetilde{K}_2(G^{(+)})$ функций, допускающих разложение в ряд вида (9) в случае, когда полюсы $\{\omega_k\}_0^\infty$ системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют условию (8).

Таким образом, мы получаем чисто аналитическое доказательство отмеченного уже выше основного результата работы Г. Ц. Тумаркина [4], первоначальное доказательство которого существенно опиралось на методы функционального анализа.

В конце статьи приводится структурное определение класса $\lambda_2\{G^{(+)}; G^{(-)}; \omega_k\}$ функций, аналитических в отдельности в каждой из областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ и являющихся в известном смысле „аналитическим продолжением" друг друга через общую границу Γ этих областей. В заключительной теореме 9 утверждение теоремы 8 значительно усиливается, поскольку здесь устанавливается тождественность классов $\widetilde{K}_2(G^{(+)})$ и $\lambda_2\{G^{(+)}; G^{(-)}; \omega_k\}$, а также их совпадение с классом функций, представимых внутри множества $G^{(+)}+G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$ равномерно и абсолютно сходящимся рядом вида (9).

§ 1. Предварительные сведения и теоремы в случае круга

1.1. (а) Пусть $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут появляться и числа конечной или даже бесконечной кратности (при этом не обязательно подряд).

Условившись при $\alpha_k=0$ полагать $\dfrac{|\alpha_k|}{\alpha_k}=\dfrac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}=-1$, рассмотрим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$

$$\varphi_0(z)=\frac{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\quad(n\geqslant1), \tag{1.1}$$

всевозможные полюсы которых лежат вне единичного круга $|z|<1$ на последовательности точек $\{1/\overline{\alpha}_k\}_0^\infty$.

Эта система, введенная впервые Такенака [7] и Мальмквистом [8] (см. также [6], гл. X), является естественным обобщением системы степеней $\{z^k\}_0^\infty$, поскольку, во-первых, в предельном случае, когда $\alpha_k=0$ $(k=0, 1, 2,\cdots)$, она просто совпадает с нею. Во-вторых, и в общем случае система $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, как и $\{z^k\}_0^\infty$, ортонормальна на окружности $|z|=1$ в смысле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\,|dz|=\delta_{n,m}=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}\quad(n, m=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.2}$$

Наряду с этим система $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ обладает и другим важным свойством уже алгебраического характера. Известно, что для произвольных значений переменных z и ζ имеют место тождества (см. [9], а также [10])

$$\frac{1}{1-\overline{\zeta}z}=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z)+\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\,B_{n+1}(z)}{1-\overline{\zeta}z}\quad(n=0, 1, 2,\cdots)^*, \tag{1.3}$$

где

$$B_{n+1}(z)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k-z}{1-\overline{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}. \tag{1.4}$$

(в) Пусть $\{c_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty. \tag{1.5}$$

Тогда, согласно теореме Рисса-Фишера, существует функция $F(e^{i\theta})\in L_2(-\pi, \pi)$, для которой выполняются условия

1) $$c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}F(\zeta)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta|\quad(k=0, 1, 2,\cdots);$$

2) $$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|F(\zeta)|^2|d\zeta|=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2,$$

Принимая во внимание условия 1), получим равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Big|F(\zeta)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(\zeta)\Big|^2|d\zeta|=$$

---

* Отметим, что в случае, когда $\alpha_k=0$ $(k=0, 1, 2,\cdots)$, тождество (1.3) эквивалентно элементарной формуле для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{n}(\overline{\zeta}z)^k=\frac{1-(\overline{\zeta}z)^{n+1}}{1-\overline{\zeta}z}.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} |F(\zeta)|^2 |d\zeta| - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

Поэтому условие 2) эквивалентно предельному равенству

$$2') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} |F(\zeta) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(\zeta)|^2 |d\zeta| = 0.$$

Справедливо следующее предложение:

1°. *Функция $F(\zeta)$ почти всюду на окружности $|\zeta|=1$ совпадает с радиальными граничными значениями некоторой функции $F(z)$ из класса H_2 Рисса.*

2°. *Справедливо разложение*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z) \qquad (|z|<1), \tag{1.6}$$

равномерно сходящееся внутри единичного круга.

Действительно, во-первых, при любых $n \geqslant m \geqslant 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\left\{\sum_{k=m}^{n} c_k \varphi_k(\zeta)\right\}}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \sum_{k=m}^{n} c_k \varphi_k(z), & |z|<1, \\ 0, & |z|>1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Отсюда, в частности, следует оценка

$$\left|\sum_{k=m}^{n} c_k \varphi_k(z)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-|z|)} \left\{\sum_{k=m}^{n} |c_k|^2\right\}^{1/2} \quad (|z|<1)$$

и тем самым, в силу условия (1.5), равномерная сходимость ряда (1.6) внутри круга $|z|<1$.

Во-вторых, если в формуле (1.7) положить $m=0$, а затем перейти к пределу при $n \to +\infty$, в силу условия 2'), мы приходим к формулам

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z), & |z|<1, \\ 0, & |z|>1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Покажем, что в круге $|z|<1$ $\Phi(z) \in H_2$.

С этой целью заметим, что для любой аналитической в круге $|z|<1$ функции $f(z)$ интеграл

$$H_2(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \quad (0<r<1)$$

является монотонно возрастающей функцией от r. Поэтому, очевидно, что для любого $n \geqslant 0$

$$H_2\left(r; \sum_0^n c_k\varphi_k\right) < H_2\left(1; \sum_0^n c_k\varphi_k\right) = \sum_0^n |c_k|^2 \leqslant \sum_0^\infty |c_k|^2 = C < +\infty,$$

ввиду условия (1.5). Наконец, отсюда, вследствие равномерной сходимости ряда (1.6), будем иметь

$$H_2(r; \Phi) = \lim_{n\to+\infty} H_2\left(r; \sum_0^n c_k\varphi_k\right) \leqslant C \quad (0 < r < 1),$$

т. е. функция $\Phi(z)$ — из класса H_2 Рисса.

Далее, из (1.8) при $|z| < 1$ имеем

$$\Phi(z) - \Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right) \equiv \Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta \quad (z = re^{i\varphi})$$

и, следовательно, по известной теореме* почти всюду на $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} \Phi(re^{i\varphi}) = F(e^{i\varphi}).$$

Таким образом, в (1.8) $\Phi(z)$ можно заменить на $F(z)$, в результате чего мы приходим к утверждениям 1° и 2°.

(с) Имея ортонормальную систему $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированную с данной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(|\alpha_k| < 1)$, для любой функции $f(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ можем образовать формальный ряд типа Фурье

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^\infty c_k(f)\,\varphi_k(z) \quad (|z| = 1), \tag{1.9}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Пользуясь ортонормальностью системы $\{\varphi_k(z)\}$ и обозначением (1.9), можем записать тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \left|f(\zeta) - \sum_{k=0}^n c_k(f)\varphi_k(\zeta)\right|^2 |d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\,|d\zeta| - \sum_{k=0}^n |c_k(f)|^2 \geqslant 0,$$

откуда, вследствие произвольности n следует неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^\infty |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\,|d\zeta|.$$

Из приведенного в предыдущем пункте предложения следует, что для выполнения равенства Парсеваля

$$\sum_{k=0}^\infty |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\,|d\zeta|$$

* См. напр. [11], гл. I.

необходимо, чтобы $f(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$ представляла собой граничные значения некоторой функции $f(z)\in H_2$, допускающей притом еще разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,\varphi_k(z) \qquad (|z|<1).$$

Вопрос о том, замкнута или нет данная система $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$ в классе H_2, существенно зависит от густоты расположения соответствующей порождающей последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$.

Справедливо следующее предложение, доказательство которого считаем уместным привести здесь (см. [6], гл. X).

3°. *Для замкнутости системы* $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$ *в классе* H_2 *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty. \tag{1.10}$$

Достаточность. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса H_2. Тогда почти всюду на окружности $|\zeta|=1$ существуют ее угловые граничные значения $f(e^{i\theta})\in L_2(0,2\pi)$, причем справедлива интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z}\,|d\zeta|.$$

Пользуясь далее тождеством (1.3), получим отсюда представление

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\varphi_k(z)+\frac{B_{n+1}(z)}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_{n+1}(\zeta)}\cdot\frac{|d\zeta|}{1-\bar{\zeta}z} \qquad (|z|<1), \tag{1.11}$$

а также оценку

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\varphi_k(z)\right|\leqslant\frac{|B_{n+1}(z)|}{2\pi(1-|z|)}\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|\,|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|B_{n+1}(z)|}{\sqrt{2\pi}(1-|z|)}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|^2\,|d\zeta|\right\}^{1/2} \qquad (|z|<1). \tag{1.12}$$

С другой стороны, легко убедиться в справедливости неравенства

$$\left|\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\right|^2\leqslant 1-\frac{1-|z|}{1+|z|}(1-|\alpha_k|) \qquad (|z|<1)$$

откуда, принимая во внимание, что $\log(1-x)\leqslant -x$ $(0\leqslant x<1)$, получим оценку

$$|B_{n+1}(z)|\leqslant\exp\left\{-\frac{1-|z|}{2(1+|z|)}\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)\right\} \qquad (|z|<1). \tag{1.13}$$

Переходя теперь к пределу в (1.12), в силу оценки (1.13) и условия (1.10) получим разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,\varphi_k(z) \quad (|z|<1),$$

равномерно сходящееся внутри единичного круга.

Наконец, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\,|d\zeta| < +\infty, \tag{1.14}$$

то на основании предложений 1° и 2° заключаем, что для граничных значений $f(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$ произвольной функции $f(z)\in H_2$ в (1.14) имеет место знак равенства.

Необходимость. Полагая, что условие (1.10) не выполнено, т. е. что

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty,$$

покажем, что существует функция из класса H_2, для которой равенство Парсеваля не имеет места.

В самом деле, как известно, тогда произведение Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}^{*}$$

сходится в круге $|z|<1$, обращается в нуль на последовательности точек $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$, по модулю меньше единицы и, наконец, ее граничные значения на окружности $|\zeta|=1$ почти всюду существуют и $|B(\zeta)|=1$.

Поэтому, очевидно, что $B(z)\in H_2$, причем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|B(\zeta)|^2\,|d\zeta|=1. \tag{1.15}$$

С другой стороны, заметим, что для любого $n\geqslant 0$ функция

$$R_n(z)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

также из класса H_2 и поэтому очевидно, что

$$c_n(B)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}B(\zeta)\,\overline{\varphi_n(\bar{\zeta})}\,|d\zeta|=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}R_n(\zeta)\,d\zeta=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.16}$$

Итак, из (1.15) и (1.16) следует

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(B)|^2<\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|B(\zeta)|^2\,|d\zeta|=1,$$

---

* И здесь при $\alpha_k=0$ следует положить $\dfrac{|\alpha_k|}{\alpha_k}=\dfrac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}=-1$.

т. е. для функции $B(z)$ равенство Парсеваля заведомо не верно.

1.2. Остановимся теперь на вопросе о разложении по системе $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ в том случае, когда она не полна в H_2. Поэтому далее в этом пункте будем полагать, что $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_k| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих лишь условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|) < +\infty. \tag{1.17}$$

(а) Приведем сначала три известных предложения, в которых, наряду с доказательством основных свойств функции Бляшке $B(z)$, отмеченных выше, выясняется также характер сходимости частных произведений $B_n(z)$ в областях

$$D^{(+)} = \{z;\ |z| < 1\} \text{ и } D^{(-)} = \{z;\ |z| > 1\}$$

и на их общей границе $|z| = 1$*.

4°. *Частные произведения*

$$B_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \cdot \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

равномерно сходятся к функции Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \cdot \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \tag{1.18}$$

на каждой замкнутой части множества

$$D\{\alpha_k\} = D^{(+)} + D^{(-)} - \{1/\bar{\alpha}_k\}_0^\infty. \tag{1.19}$$

5°. *Почти для всех* $\theta \in [-\pi, \pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r \to 1-0} B(re^{i\theta}) = B(e^{i\theta}),\ |B(e^{i\theta})| = 1, \tag{1.20}$$

при этом

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|\zeta|=1} |B(\zeta) - B_n(\zeta)|^2 |d\zeta| = 0. \tag{1.21}$$

6°. ***Функция*** $B(z)$ ***аналитична в области*** $D^{(+)}$ ***и обращается в нуль на последовательности*** $\{\alpha_k\}_0^\infty$***; кроме того,*** $B(z)$ ***мероморфна в области*** $D^{(-)}$ ***с полюсами в точках*** $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^\infty$ ***и отлична там от нуля.***

Доказательство. В силу условия (1.17) при некотором $N > 1$ имеем $|\alpha_k| \geqslant \frac{1}{2}$, $k \geqslant N$. Далее, принимая во внимание очевидное неравенство

$$\log(1-x) \geqslant -2x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right),$$

приходим к оценке

* См. [6], гл. X.

$$\exp\left\{-2\sum_{k=N}^{\infty}(1-|\alpha_k|)\right\}\leqslant\prod_{k=N}^{N+n-1}|\alpha_k|<1. \tag{1.22}$$

Рассматривая теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|B_{N+n}(\zeta)-B_N(\zeta)|^2|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\left|\prod_{k=N}^{N+n-1}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}-1\right|^2|d\zeta|=$$

$$=2-\frac{1}{\pi i}\operatorname{Re}\int\limits_{|\zeta|=1}\left\{\prod_{k=N}^{N+n-1}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}=2\left\{1-\prod_{k=N}^{N+n-1}|\alpha_k|\right\}$$

переходом к пределу при $N\to+\infty$, на основании (1.22) заключаем, что существует функция $B^*(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi)$ такая, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^*(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|^2d\theta=0. \tag{1.23}$$

Далее, в силу (1.23) и неравенства

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^*(e^{i\theta})-1|^2d\theta\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^*(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|^2d\theta,$$

можем утверждать, что $|B^*(e^{i\theta})|=1$ почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$.

Пусть $z_0\in D^{(+)}$ — произвольная точка, отличная от точек последовательности $\{\alpha_k\}_0^\infty$.

Выберем целое $k_0\geqslant 1$ так, чтобы

$$2\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}(1-|\alpha_k|)\leqslant\frac{1}{2},\ k\geqslant k_0,$$

и, заметив, что

$$\left|\frac{\alpha_k-z_0}{1-\bar{\alpha}_k z_0}\right|^2\geqslant 1-2\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}(1-|\alpha_k|),$$

напишем оценку

$$\prod_{k=k_0}^{n}\left|\frac{\alpha_k-z_0}{1-\bar{\alpha}_k z_0}\right|\geqslant\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{n}\log\left|1-2\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}(1-|\alpha_k|)\right|\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\exp\left\{-\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\cdot\sum_{k=k_0}^{n}(1-|\alpha_k|)\right\}\geqslant\exp\left\{-\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)\right\}>0 \tag{1.24}$$

для всех $n\geqslant k_0$.

Поэтому, если записать интегральную формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{B_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}B_n(z), & z\in D^{(+)}\\ 0, & z\in D^{(-)}\end{cases}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

то вследствие (1.23) и (1.24), переходя к пределу при $n\to+\infty$, придем к заключению, что последовательность $\{B_n(z)\}$ равномерно сходится внутри $D^{(+)}$ к некоторой аналитической функции $B(z)$ ($|B(z)|<1$), обращающейся в нуль только на последовательности $\{\alpha_k\}_0^\infty$. Итак, справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{B^*(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}B(z), & z\in D^{(+)},\\ 0\ \ , & z\in D^{(-)},\end{cases}\tag{1.25}$$

причем в области $D^{(+)}$ функция $B(z)$ определится также через бесконечное произведение (1.18). Но из формулы (1.25) следует также, что стоящий слева интеграл типа Коши на самом деле является интегралом Коши. Следовательно, почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to 1-0} B(re^{i\theta})=B(e^{i\theta})=B^*(e^{i\theta}).$$

Отсюда вытекают формулы (1.20) при $r\to 1-0$ и (1.21).

Наконец, остается заметить, что характер сходимости произведения $B(z)$ в области $D^{(-)}$ и существование предела (1.20) при $r\to 1+0$ просто будут следовать из того факта, что при любом $z\in D^{(-)}-\left\{\frac{1}{\bar\alpha_k}\right\}_0^\infty$ имеют место тождества

$$B_n(z)=\frac{1}{\bar B_n\left(\frac{1}{z}\right)}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

и вытекающий из них предельный случай

$$B(z)=\frac{1}{\bar B\left(\frac{1}{z}\right)},\ z\in D^{(-)}-\{1/\bar\alpha_k\}_0^\infty.\tag{1.26}$$

(в) Как уже было установлено выше, при условии (1.17) система $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ не полна в классе H_2. Здесь имеет место теорема Дж. Уолша [6].

7°. *Для любой функции $f(z)\in H_2$ справедливо представление*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\varphi_k(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta,\ z\in D^{(+)}.\tag{1.27}$$

В самом деле, запишем формулу (1.11) в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k(f)\varphi_k(z)+\frac{B_{n+1}(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_{n+1}(\zeta)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z},\ z\in D^{(+)}.\tag{1.28}$$

Это по существу и есть формула (1.27) для случая конечного числа $\{\alpha_k\}_0^n$ и соответствующей конечной ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}_0^n$.

Обозначая

$$e_n(\sigma)=E\left(\theta;\ |B(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|\geqslant\sigma\right)\quad(\sigma>0),$$

имеем оценку

---

* См. напр. [11].

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)(\zeta-z)}\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi(1-|z|)}\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|\,|B(\zeta)-B_n(\zeta)|\,|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi(1-|z|)}\left\{2\int\limits_{en(\sigma)}|f(\zeta)|\,|d\zeta|+\sigma\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|\,|d\zeta|\right\},\ z\in D^{(+)}. \qquad (1.29)$$

Но из предельной формулы (1.21) очевидно вытекает, что при любом $\sigma>0$

$$\lim_{n\to+\infty}E_n(\sigma)=0.$$

Отсюда и из оценки (1.29) ввиду произвольности $\sigma>0$ следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)\,(\zeta-z)}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)\,(\zeta-z)}\,d\zeta,\ z\in D^{(+)}, \qquad (1.30)$$

притом равномерно внутри области $D^{(+)}$. Наконец, переходя к пределу в представлении (1.28) при $n\to+\infty$, получим формулу (1.27); равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\,\varphi_k(z)$$

следует из характера сходимости произведений $\{B_n(z)\}$ к функции Бляшке $B(z)$ внутри $D^{(+)}$, а также из характера предельной формулы (1.30).

(c) Обозначим через $H_2\{\alpha_k\}$ класс мероморфных в области $D^{(-)}$ функций, допускающих представление вида

$$f(z)=\frac{B(z)}{z}\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in D^{(-)},$$

где $\tilde{f}(z)\in H_2$ — произвольна.

Очевидно, что если $f(z)\in H_2\{\alpha_k\}$, то почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$ существует предел

$$\lim_{r\to1+0}f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi).$$

Далее обозначим через $\lambda_2\{\alpha_k\}$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям

1) $f(z)\in H_2,\ z\in D^{(+)}$;
2) $f(z)\in H_2\{\alpha_k\},\ z\in D^{(-)}$;
3) почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\lim_{r\to1-0}f(re^{i\theta})=\lim_{r\to1+0}f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta}).^*$$

---

* Отметим, что из условий 1) и 2) уже следует существование соответствующих пределов почти всюду.

Легко видеть, что функции класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$ определяются единственным образом через свои значения на любой из областей $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$.

Заметим теперь, что так как

$$\varphi_k(z)=\frac{B(z)}{z}\tilde{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right)\ (k=0,1,2,\cdots),\tag{1.31}$$

где

$$\tilde{\varphi}_k(z)=\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-\alpha_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\prod_{j=k+1}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_j-z}{1-\alpha_j z}\cdot\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}\in H_2,$$

то любая из функций системы $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$, как и любые их конечные линейные комбинации, принадлежат классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Построение функций класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$ более общей природы приводится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\{c_k\}_0^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.\tag{1.32}$$

Тогда при условии (1.17) ряд

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(z)\tag{1.33}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри круга $D^{(+)}$, а также в каждой ограниченной и замкнутой части области $D^{(-)}-\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^{\infty}$, определяя функцию $F(z)$ из класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Кроме того, на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеем

$$F(e^{i\theta})=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(e^{i\theta}),\tag{1.34}$$

где $F(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi)$ — радиальные предельные значения функции $F(z)$ изнутри и извне окружности $z=e^{i\theta}\ (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$, которые почти всюду существуют и равны друг другу, согласно свойству 3) класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Доказательство. Из определения (1.1) функций $\varphi_k(z)$ имеем

$$|\varphi_k(z)|=\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-|z|},\ z\in D^{(+)}\ (k=0,1,2,\cdots).$$

Отсюда, ввиду (1.17) и (1.32), следует наше утверждение о характере сходимости ряда (1.33), а ввиду предложений 1° и 2° имеем $F(z)\in H_2$, причем, если обозначить

$$\lim_{r\to1-0}F(re^{i\theta})=F_+(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi);\tag{1.35}$$

то на $[-\pi,\pi]$

$$F_+(e^{i\theta})=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(e^{i\theta}).\tag{1.35'}$$

Далее система аналитических в круге $D^{(+)}$ функций $\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^\infty$, которые были определены согласно формулам (1.31), также ортонормальна, поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\tilde{\varphi}_n(\zeta)\,\overline{\tilde{\varphi}_m(\zeta)}\,|d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\varphi_n(\zeta)\,\overline{\varphi_m(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots).$$

Заметив, кроме того, что

$$|\tilde{\varphi}_k(z)| \leqslant \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-|z|}, \quad z \in D^{(+)} \quad (k=0, 1, 2, \cdots),$$

как и выше мы заключаем, что ряд

$$\tilde{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\tilde{\varphi}_k(z) \tag{1.33'}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри области $D^{(+)}$, определяет функцию $\tilde{F}(z) \in H_2$, причем, если обозначить

$$\tilde{F}_+(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0}\tilde{F}(re^{i\theta}), \tag{1.36}$$

то

$$\tilde{F}_+(e^{i\theta}) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\sum_{k=0}^{n} c_k\,\tilde{\varphi}_k(e^{i\theta}). \tag{1.36'}$$

Далее, из (1.31) и (1.33') вытекают равенства

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(z) = \frac{B(z)}{z}\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\tilde{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{B(z)}{z}\tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(+)}. \tag{1.37}$$

Отсюда и следует утверждения теоремы о природе сходимости ряда (1.33) в области $D^{(-)}$, а также, что $F(z) \in H_2\{\alpha_k\}$.

Из (1.37) и (1.36) вытекает существование предела

$$F_-(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1+0} F(re^{i\theta}) = \frac{B(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}\tilde{F}_+(e^{-i\theta}) \tag{1.38}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Причем, в силу (1.36'), (1.31), на $[-\pi, \pi]$

$$\tilde{F}_+(e^{-i\theta}) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{e^{i\theta}}{B(e^{i\theta})}\sum_{k=0}^{n} c_k\,\varphi_k(e^{i\theta}),$$

откуда и из (1.35') следует, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$

$$\tilde{F}_+(e^{-i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{B(e^{i\theta})}F_+(e^{i\theta}). \tag{1.39}$$

Наконец, из (1.38) и (1.39) следует, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$

$$F_-(e^{i\theta}) = F_+(e^{i\theta}) \equiv F(e^{i\theta}).$$

Итак, теорема полностью доказана, поскольку функция $F(z)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), т. е. принадлежит классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

1.3. В данном пункте, существенно дополнив теорему 1, мы дадим полную характеристику класса $\lambda_2\{a_k\}$.

(а) Предварительно докажем одно простое предложение об интегралах типа Коши.

8°. *Пусть функция* $\gamma(e^{i\theta}) \in L_2(-\pi, \pi)$ — *произвольна. Тогда интеграл типа* Коши

$$\Gamma(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta, \quad |w|\neq 1,$$

обладает следующими свойствами:

а) $$\Gamma(w)\in H_2, \quad w\in D^{(+)};$$

в) $$\Gamma(w) = \frac{1}{w}\tilde{\Gamma}\left(\frac{1}{w}\right), \quad w\in D^{(-)},$$

где $\tilde{\Gamma}(w)\in H_2$.

В самом деле, при $w\in D^{(+)}$ имеем

$$\Gamma(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\gamma(e^{i\theta})\,e^{-ik\theta}\,d\theta.$$

Поэтому, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\gamma(e^{i\theta})|^2\,d\theta < +\infty,$$

а это значит, что $\Gamma(w)\in H_2$.

Полагая затем, что $w\in D^{(-)}$, заменяя ζ на ζ^{-1}, получим

$$\Gamma(w) = -\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{-1}\gamma(\zeta^{-1})}{\zeta-w^{-1}}\,d\zeta,$$

причем, поскольку $e^{-i\theta}\gamma(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi)$, то, согласно предыдущему, функция

$$\Gamma(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{-1}\gamma(\zeta^{-1})}{\zeta-w}\,d\zeta \; *$$

будет из класса H_2. Отсюда и следует второе свойство функции $\Gamma(w)$.

(в) В дополнение к уже принятым обозначениям отнесем к классу $\lambda_2\{a_k\}$ множество функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям

1) $$f(z)\in H_2, \quad z\in D^{(+)};$$

2) $$f(z)\in H_2\{a_k\}, \quad z\in D^{(-)}.$$

Теперь, в качестве дальнейшего расширения предложения 7°, докажем теорему

---

* Здесь, как и в интеграле $\Gamma(w)$, интегрирование совершается в положительном направлении.

Теорема 2. *Если $f(z) \in H_2$, то компоненты представления*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \varphi_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta \equiv f_1(z) + f_2(z) \tag{1.40}$$

обладают следующими свойствами:

а) $\quad f_1(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}, \; f_2(z) \in \tilde{\lambda}_2\{\alpha_k\};$

в) $$(f_1, f_2) \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} f_1(\zeta) \overline{f_2(\zeta)} \, |d\zeta| = 0 \tag{1.41}$$

и поэтому

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 + \|f_2\|^2, \tag{1.42}$$

где $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

Доказательство. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2 \, |d\zeta| < +\infty,$$

то по теореме 1

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \varphi_k(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\},$$

причем разложение сходится в любой точке $z \in D\{\alpha_k\}$.

Поскольку $f(e^{i\theta}) B^{-1}(e^{i\theta}) \in L_2(-\pi, \pi)$, то, в силу предложения 8°, функция $f_2(z)$ допускает представление

$$f_2(z) = \begin{cases} B(z)\Phi_+(z) \in H_2, & z \in D^{(+)}, \\ \dfrac{B(z)}{z} \Phi_-\left(\dfrac{1}{z}\right) \in H_2\{\alpha_k\}, & z \in D^{(-)}, \end{cases}$$

где функции

$$\Phi_+(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta,$$

$$\Phi_-(z) \equiv -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{-1} f(\zeta^{-1})}{B(\zeta^{-1})(\zeta - z)} d\zeta$$

из класса H_2.

Таким образом, $f_2(z) \in \tilde{\lambda}_2\{\alpha_k\}$.

Далее, согласно формуле (1.34) теоремы 1, имеем

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \Phi_+(\zeta) B(\zeta) \overline{f_1(\zeta)} \, |d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} c_k(f) \int\limits_{|\zeta|=1} \Phi_+(\zeta) \frac{B(\zeta) \overline{\varphi_k(\zeta)}}{\zeta} d\zeta. \tag{1.43}$$

С другой стороны, при $|\zeta| = 1$

$$\Phi_+(\zeta)\frac{B(\zeta)\overline{\varphi_k(\zeta)}}{\zeta}=\Phi_+(\zeta)\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\prod_{k=j+1}^{\infty}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k},$$

причем правая часть является функцией класса H_2 в круге $|\zeta|<1$. Следовательно, все интегралы, стоящие под знаком суммы в (1.43), равны нулю, откуда следует утверждение (1.41).

Наконец, так как почти всюду на окружности $|\zeta|=1$

$$f(\zeta)=f_1(\zeta)+f_2(\zeta),$$

то из свойства (1.41) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|^2\,|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f_1(\zeta)|^2\,|d\zeta|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f_2(\zeta)|^2\,|d\zeta|.$$

Остается заметить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f_1(\zeta)|^2\,|d\zeta|=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(f)|^2,$$

чтобы прийти к формуле (1.42).

(e) Дадим, наконец, полную внутреннюю характеристику подкласса тех функций из H_2, которые допускают разложение по неполной системе $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$.

Теорема 3. *Класс $\lambda_2\{\alpha_k\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, определенных на множестве $D\{\alpha_k\}$ и представимых в виде ряда*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(z),\quad z\in D\{\alpha_k\},$$

где $\{c_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.$$

В самом деле, согласно теореме 1, функция $f(z)$, представимая в виде ряда, принадлежит классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Обратно, из формулы (1.42) теоремы 2 вытекает, что система $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ полна лишь в классе функций из $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

§ 2. Системы рациональных функций, порожденные ограниченными континуумами

2.1. (a) Пусть K — ограниченный континуум, содержащий более одной точки, и $G^{(-)}$ та из смежных с ним компонент, которая содержит точку $z=\infty$. Очевидно, $G^{(-)}$ является односвязной областью расширенной плоскости z, граница Γ которой принадлежит континууму K.

Пусть функция

$$w=\Phi(z)\quad(z=\Psi(w)),\tag{2.1}$$

подчиненная условиям нормировки

$$\Phi(\infty)=\infty,\ \Phi'(\infty)>0,$$

конформно отображает область $G^{(-)}$ на внешность единичного круга

$$D^{(-)}=\{w;\ |w|>1\}\ ^{*}.$$

Очевидно, что в окрестности точки $z=\infty$, а именно, при

$$|z|>R_0=\sup_{\zeta\in K}\{|\zeta|\}$$

имеют место следующие разложения в ряд Лорана:

$$\Phi(z)=\tau z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\cdots,$$

$$\Phi'(z)=\tau-\frac{\alpha_1}{z^2}-\frac{2\alpha_2}{z^3}-\cdots. \tag{2.2}$$

Пусть $\{\omega_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел (в том числе и равных ∞), лежащих в области $G^{(-)}$.

Определим теперь другую последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_k|\leqslant 1)$, где

$$\alpha_k=\begin{cases}\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)} & \text{при } \omega_k\neq 0\\ 0 & \text{при } \omega_k=\infty\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots), \tag{2.3}$$

лежащих уже в круге $D^{(+)}=\{w;\ |w|<1\}$ и соответствующую ортонормальную систему Такенака-Мальмквиста $\{\varphi_k(w)\}_0^\infty$ согласно формулам (1.1). Тогда функции системы $\{\varphi_k[\Phi(z)]\}_0^\infty$ запишутся в виде

$$\varphi_0[\Phi(z)]=\frac{(1-|\Phi(\omega_0)|^{-2})^{1/2}}{1-\Phi^{-1}(\omega_0)\,\Phi(z)},$$

$$\varphi_n[\Phi(z)]=$$

$$=\frac{(1-|\Phi(\omega_n)|^{-2})^{1/2}}{1-\Phi^{-1}(\omega_n)\Phi(z)}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Phi^{-1}(\omega_k)-\Phi(z)}{1-\Phi^{-1}(\omega_k)\,\Phi(z)}\cdot\frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)}\quad (n=1,2,\cdots), \tag{2.4}$$

причем здесь и в дальнейшем при $\omega_k=\infty$ полагаем

$$|\Phi(\omega_k)|:\Phi(\omega_k)=\Phi(\omega_k):|\Phi(\omega_k)|=-1.$$

Функция

$$\Psi_n^{(s)}(z)=\varphi_n[\Phi(z)]\cdot[\Phi'(z)]^s,$$

где s $(0\leqslant s\leqslant 1)$ параметр, голоморфна** всюду в области $G^{(-)}$ за исключением точек $\{\omega_k\}_0^n$, где она имеет полюсы. При этом, очевидно, что если кратность появления числа ω_p $(0\leqslant p\leqslant n)$ в группе чисел $\{\omega_k\}_0^n$ равна $\nu(p,n)$, то точка $z=\omega_p$ для функции $\Psi_n^{(s)}(z)$ будет полюсом ровно порядка $\nu(p,n)$.

---

* Такая функция существует и единственна согласно теореме Римана.

** Поскольку $\Phi'(z)\neq 0$ при $z\in G^{(-)}$.

Обозначим через $M_n^{(s)}(z)$ сумму главных частей и постоянных в разложениях Лорана функции $\Psi_n^{(s)}(z)$ в окрестностях всех ее отличных друг от друга полюсов $\{\omega_k\}_0^n$.

Таким образом, $M_n^{(s)}(z)$ будет рациональной функцией с полюсами, лежащими лишь во всех отличных друг от друга точках $z=\omega_0$, $\omega_1, \cdots, \omega_k$ области $G^{(-)}$, причем с теми же главными частями, что и у функции $\psi_n^{(s)}(z)$.

Назовем *системку рациональных фукнций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ системой функций, порожденной континуумом K и последовательностью чисел $\{\omega_k\}_0^\infty \in G^{(-)}$*.

Убедимся теперь, что система функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ представляет собой естественное обобщение известной системы полиномов Фабера.

В самом деле, положим, что все полюсы системы лежат в бесконечности, т. е.

$$\omega_0 = \omega_1 = \cdots = \omega_k = \cdots = \infty.$$

Тогда $\varphi_n[\Phi(z)] = [\Phi(z)]^n$, и функцию $M_n^{(s)}(z)$ следует определить как совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановском разложении функции

$$[\Phi(z)]^n\,[\Phi'(z)]^s.$$

в окрестности точки $z=\infty$.

В силу формул (2.2) в рассматриваемом случае $M_n^{(s)}(z)$ будет полиномом степени n вида

$$M_n^{(s)}(z) = \tau^{n+s} z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \cdots + a_0^{(n)}.$$

Поэтому, в частности, функции $M_n^{(0)}(z)$ связаны с обычными полиномами Фабера $\Phi_n^{(1)}(z)$ (называемыми также *полиномами Фабера первого рода)* формулами

$$\Phi_n^{(1)}(z) \equiv \tau^{-n} M_n^{(0)}(z) \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

Отметим, что прием получения различных модификаций полиномов Фабера путем умножения простейшей порождающей функции $[\Phi(z)]^n$ на какую-либо стандартную функцию $\nu(z)$ $(\nu(\infty)\neq 0)$, аналитическую в расширенной области $G^{(-)}$, применялся ранее другими авторами*. В частности, наряду с полиномами первого рода $\Phi_n^{(1)}(z)$, рассматривались также *полиномы Фабера второго рода*

$$\Phi_n^{(2)}(z) \equiv \tau^{-n-1} M_n^{(1)}(z) \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(в) Определив систему рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, установим для них интегральное представление.

С этой целью обозначим через Γ_R $(R>1)$ образ окружности $|w|=R$ на плоскости z при отображении $z=\Psi(w)$ области $D^{(-)}=\{z;\ |z|>1\}$ на область $G^{(-)}$.

* См. напр. [2] и [3].

Пусть, далее, $G_R^{(-)} \subset G^{(-)}$ есть внешняя область, ограниченная контуром Γ_R, а $G_R^{(+)}(\supset K)$ дополнительная к ней область, имеющая ту же границу Γ_R.

Пусть для $n \geqslant 0$.

$$R_n = \min\{|\Phi(\omega_0)|, |\Phi(\omega_1)|, \cdots, |\Phi(\omega_n)|\}, \tag{2.5}$$

тогда последовательность чисел $\{R_n\}_0^\infty$ $(R_n > 1)$, очевидно, невозрастающая. Поэтому при любом ρ $(1 < \rho < R_n)$ замкнутая область $G_\rho^{(+)}$ не содержит полюсов функций $\{M_k^{(\rho)}(z)\}_0^n$, иначе говоря совокупность полюсов этих функций принадлежит области $G_\rho^{(-)}$.

Лемма 1. *Пусть $1 < \rho < R_n$ — любое, тогда*

а) *для любого $z \in G_\rho^{(+)}$, в частности при $z \in K$ справедливы формулы*

$$M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n); \tag{2.6}$$

б) *для $z \in G_\rho^{(-)}$ справедливы формулы*

$$M_k^{(s)}(z) = \varphi_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n). \tag{2.7}$$

Доказательство. а) Функции

$$\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s - M_k^{(s)}(\zeta) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

голоморфны в рассмотренной области $G^{(-)}$, причем в бесконечно удаленной точке все они имеют нуль порядка, не ниже первого. Поэтому, согласно теореме Коши, имеем при любом $z \in G_\rho^{(+)}$ $(\rho > 1)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s - M_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \equiv 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.8}$$

Если для данного $n > 0$ параметр ρ выбрать из интервала $(1, R_n)$, то функции $M_k^{(s)}(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$, как уже отмечалось, не будут иметь полюсов в замкнутой области $G_\rho^{(+)}$. Поэтому имеем

$$M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{M_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \; z \in G_\rho^{(+)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

откуда и из (2.8) следуют требуемые представления (2.6).

б) Пусть z_0 — произвольная точка области $G_\rho^{(-)}$, отличная от точек $\{\omega_k\}_0^n$. Выберем $\rho_0 > \rho > 1$ таким образом, чтобы точка $z = z_0$, а также все точки $\{\omega_k\}_0^n$, отличные от $z = \infty$, лежали внутри области $G_{\rho_0}^{(+)}$. Тогда, с одной стороны, по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}d\zeta-$$

$$-\varphi_k[\Phi(z_0)][\Phi'(z_0)]^s-\sum_{j=0}^{k}{}'\operatorname*{Res}_{\zeta=\omega_j}\left\{\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\right\}, \quad (2.9)$$

где штрих означает, что суммирование распространяется на точки из совокупности $\{\omega_k\}_0^n$, отличные от $z=\infty$.

С другой стороны, из (2.6) следует также, что если $z\in G_\rho^{(+)}$, то

$$M_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}d\zeta-$$

$$-\sum_{j=0}^{k}{}'\operatorname*{Res}_{\zeta=\omega_j}\left\{\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\right\}\quad(k=0,1,2,\cdots,n). \quad (2.10)$$

Однако первое слагаемое, стоящее справа в (2.10), голоморфно всюду в области $G_{\rho_0}^{(+)}$, а второе — рациональная функция. Поэтому представ ление (2.10) остается справедливым всюду в области $G_{\rho_0}^{(+)}$ и, в частности, в точке $z=z_0$. Из (2.9) и (2.10) вытекают формулы (2.7) леммы.

В заключение отметим, что интегральные члены, стоящие в обеих формулах (2.6) и (2.7) леммы, могут быть заменой переменного интегрирования записаны также в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}dw. \quad (2.11)$$

2.2 (а) Выше была определена система рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, порожденная произвольным ограниченным континуумом K и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащая в смежной с K области $G^{(-)}$, содержащей точку $z=\infty$.

В дальнейшем необходимо исследовать вопросы разложения функций в ряды по системам $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в том важном случае, когда континуум K представляет собой замыкание односвязной области $G^{(+)}$, ограниченной замкнутой жордановой спрямляемой кривой Г. Тогда, как известно, кривая Г одновременно является полной границей для единственной смежной с континуумом $K=\overline{G^{(+)}}$ области $G^{(-)}$, содержащей точку $z=\infty$.

Итак положим, что Г — спрямляемая жорданова кривая и функции

$$w=\Phi(z)\quad(z=\Psi(w))$$

имеют тот же смысл, что и выше. Тогда справедлива следующая

Лемма 2. а) *Для любого* p $(0<p\leqslant 1)$

$$\sup_{1<r<\infty}\left|\int_0^{2\pi}|[\Psi'(re^{i\theta})]^p|\,d\theta\right|<+\infty; \quad (2.12)$$

б) *Почти для всех* $\theta \in [0, 2\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r \to 1+0} \Psi'(re^{i\theta}) = \Psi'(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi), \tag{2.13}$$

причем при любом p $(0 < p \leqslant 1)$

$$\lim_{r \to 1+0} \int_0^{2\pi} |[\Psi'(e^{i\theta})]^p - [\Psi'(re^{i\theta})]^p| \, d\theta = 0; \tag{2.14}$$

в) *Если, кроме того, окажется, что* $\Psi'(e^{i\theta}) \in L_q(0, 2\pi)$ $(q > 1)$, *то предыдущие утверждения останутся в силе, если в них заменить число* p *на* q.

Доказательство. Пусть z_0 — фиксированная точка области $G^{(+)}$, тогда преобразование $z_1 = (z - z_0)^{-1}$ отображает область $G^{(-)}$ в некоторую ограниченную область g со спрямляемой границей γ.

Функция

$$z_1 = \Psi_0(w_1) = \left[\Psi\left(\frac{1}{w_1}\right) - z_0\right]^{-1} \tag{2.15}$$

осуществляет конформное отображение круга $|w_1| < 1$ на указанную область g плоскости z_1.

При любом разбиении отрезка $[0, 2\pi]$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \theta_{n+1} = 2\pi$$

ломаная, вписанная в γ, с вершинами в точках $\Psi_0(e^{i\theta_1}), \cdots, \Psi_0(e^{i\theta_n})$ имеет длину

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} |\Psi_0(e^{i\theta_{k+1}}) - \Psi_0(e^{i\theta_k})|.$$

Так как кривая γ спрямляема, то в множестве всевозможных подразделений отрезка $[0, 2\pi]$ будем иметь $\sup\{l_n\} < +\infty$. Это значит, что функция $\Psi_0(w_1)$, будучи непрерывной в замкнутом круге $|w_1| \leqslant 1$ (как функция, осуществляющая конформное отображение круга на жорданову область), имеет ограниченное изменение на окружности $|w_1| = 1$. Поэтому, согласно известной теореме*, будем иметь $\Psi_0'(w_1) \in H_1$. Далее, так как $\Psi_0'(w_1) \neq 0$ при $|w_1| < 1$, то для любого p $(0 < p \leqslant 1)$ имеем также $[\Psi_0'(w_1)]^p \in H_1$. Итак, для любого p $(0 < p \leqslant 1)$

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |[\Psi_0'(re^{i\theta})]^p| \, d\theta \right\} < +\infty. \tag{2.12'}$$

Отсюда согласно известным свойствам функций класса H_1 можно утверждать, что почти для всех $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{r \to 1-0} \Psi_0'(re^{i\theta}) = \Psi_0'(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi) \tag{2.13'}$$

и, кроме того,

---

* См. напр. [12], стр. 462.

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}|[\Psi_0'(e^{i\theta})]^p-[\Psi_0'(re^{i\theta})]^p|\,d\theta=0. \tag{2.14'}$$

Теперь отметим, что, в силу разложения (2.2), имеем также

$$z=\Psi(w)=\tau^{-1}w+\beta_0+\frac{\beta_1}{w}+\frac{\beta_2}{w^2}+\cdots,\ w\in D^{(-)},$$

и поэтому

$$\sup_{w\in D^{(-)}}|\Psi(w)-z_0|\,|w|^{-1}=c(z_0)<+\infty, \tag{2.16}$$

Далее, дифференцируя соотношение (2.15), имеем

$$\Psi'(w)=-\left\{\frac{\Psi(w)-z_0}{w}\right\}^2\Psi_0'\left(\frac{1}{w}\right),\ w\in D^{(-)}. \tag{2.17}$$

Отсюда, в силу (2.12′)—(2.16), следует утверждение (2.12) леммы.

Наконец утверждение б) леммы соответственно следует из (2.13′) и (2.14′), если записать формулу в виде

$$\Psi'\left(\frac{1}{w_1}\right)=-w_1^2\left\{\Psi\left(\frac{1}{w_1}\right)-z_0\right\}^2\Psi_0'(w_1),\ w_1\in D^{(+)}$$

и заметить, что множитель, стоящий перед функцией $\Psi_0'(w_1)$, непрерывен в замкнутом круге $\overline{D}^{(+)}$.

Положим далее, что $\Psi'(e^{i\theta})\in L_q(0,2\pi)$ $(q>1)$, тогда из (2.17) следует, что $\Psi_0'(e^{i\theta})\in L_q(0,2\pi)$. Но поскольку $\Psi_0'(w_1)\in H_1$ по известной теореме* имеем также $\Psi_0'(w_1)\in H_q$. Отсюда следует, что $[\Psi_0'(w_1)]^q\in H_1$ и поэтому предельное равенство (2.14) остается в силе при замене p на q. Таким образом, нам остается вновь возвратиться к формуле (2.17), чтобы убедиться в справедливости утверждения б) леммы.

(в) Замкнутую спрямляемую жорданову кривую Γ отнесем к классу U_s $(0\leqslant s\leqslant 1)$, если граничные значения $\Psi'(e^{i\theta})$ функции $\Psi'(w)$, существующие почти всюду на окружности $w=e^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, согласно лемме 2, удовлетворяют условию**

$$\int_\Gamma|\Phi'(\zeta)|^{2s-1}|d\zeta|=\int_0^{2\pi}|\Psi'(e^{i\theta})|^{2(1-s)}d\theta<+\infty. \tag{2.18}$$

Заметим, что если $\Psi'(e^{i\theta})\in L_{2(1-s)}(0,2\pi)$, то, согласно лемме 2, интегралы

$$\int_{\Gamma_\rho}|\Phi'(z)|^{2s-1}|dz|=\rho\int_0^{2\pi}|\Psi'(\rho e^{i\theta})|^{2(1-s)}d\theta,\ 1<\rho<+\infty \tag{2.19}$$

при $\rho\to 1+0$ ограничены числом, не зависящим от ρ.

---

* См. напр. [11], стр. 116.

** Отметим, что во введении статьи принадлежность контура классу U_s отмечалась также условием $H_{2(1-s)}[\Gamma]<+\infty$.

Поскольку по лемме 2 $\Psi'(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi)$, то любая спрямляемая замкнутая кривая Γ входит в класс $U_{1/2}$. Легко видеть также, что для остальных значений параметра s будем иметь

$$U_s \subset U_{1/2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s < \frac{1}{2},$$

$$U_s \equiv U_{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \tag{2.20}$$

Из лемм 1 и 2 вытекает

Следствие. *Если $\Gamma \in U_s$, то для функций системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ имеют место следующие формулы представления:*

а) *При* $z \in G^{(+)}$

$$M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z}\,dw \quad (k = 0, 1, 2, \cdots); \tag{2.21}$$

б) *При* $z \in G^{(-)}$

$$M_k^{(s)}(z) - \varphi_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z}\,dw \tag{2.22}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Действительно, сперва заметим, что поскольку особенности функции $\varphi_k(w)$ лежат в точках $w = 1/\bar{\alpha}_j = \Phi(\omega_j)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, k)$, то она непрерывна в любом замкнутом кольце $1 \leqslant |w| \leqslant \rho < R_k$, где

$$R_k = \min_{0 \leqslant j \leqslant k}\{|\Phi(\omega_j)|\}.$$

Рассмотрим далее функцию

$$\frac{\varphi_k(w)}{\Psi(w) - z}, \quad z \overline{\in} \Gamma \tag{2.23}$$

и отметим, что она непрерывна в каждом кольце $1 \leqslant |w| \leqslant \rho$, где при $z \in G^{(+)}$, $\rho < R_k$, а при $z \in G^{(-)}$ $\rho < \min(R_k, |\Phi(z)|)$.

Принимая теперь во внимание формулу (2.14) леммы 2 и отмеченное свойство функции (2.23), при фиксированном $z \overline{\in} \Gamma$ и любом s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ будем иметь

$$\lim_{\rho \to 1+0}\int_{|w|=\rho} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z}dw = \int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z}dw =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z}d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.24}$$

Наконец, переходя к пределу в формулах (2.6) и (2.7) леммы 1, ввиду (2.11) и (2.24), получим требуемые представления (2.21) и (2.22).

Докажем еще одну лемму, дающую представление о поведении всей системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в целом на плоскости z.

Лемма 3. *Пусть области $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ имеют общую границу Γ, принадлежащую классу U_s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, тогда*

а) *для любой последовательности комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty \in G^{(-)}$ имеем*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |M_k^{(s)}(z)|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(+)}; \tag{2.25}$$

б) *для любой последовательности $\{\omega_k\} \in G^{(-)}$, удовлетворяющей дополнительному условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty, \tag{2.26}$$

имеем также

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{M_k^{(s)}(z)}{B[\Phi(z)]} \right|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(-)}, \tag{2.27}$$

где

$$B[\Phi(z)] = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)} - \Phi(z)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)} \cdot \frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)} \tag{2.28}$$

— мероморфная в области $G^{(-)}$ функция с полюсами в точках последовательности $\{\omega_k\}_0^\infty$.

Доказательство. Пусть z — фиксированная точка, принадлежащая любой из областей $G^{(+)}$ или $G^{(-)}$. Тогда, определив функцию

$$\chi_s(\zeta, z) = \frac{[\Psi'(\zeta)]^{1-s}}{\Psi(\zeta) - z}, \quad \zeta \in D^{(-)}, \tag{2.29}$$

ввиду того, что $\Gamma \subset U_s$, имеем

$$e^{i\theta}\chi_s(e^{i\theta}; z) \in L_2(0, 2\pi). \tag{2.30}$$

Для коэффициентов Фурье функции (2.30) относительно системы $\{\varphi_k(\zeta)\}_0^\infty$ получим

$$a_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \overline{\zeta\chi_s(\zeta; z)} \cdot \overline{\varphi_k(\zeta)}\, |d\zeta| =$$

$$= \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi_k(\zeta)[\Psi'(\zeta)]^{1-s}}{\Psi(\zeta) - z}\, d\zeta \right\}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.31}$$

причем, согласно неравенству Бесселя,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{|\Psi'(\zeta)|^{2(1-s)}}{|\Psi(\zeta) - z|^2} |d\zeta| < +\infty, \tag{2.32}$$

поскольку $\Gamma \subset U_s$ и при $z \in G^{(\pm)}$

$$\inf_{|\zeta|=1} |\psi(\zeta) - z| > 0.$$

Но если $z \in G^{(+)}$, то из (2.31), в силу формулы (2.21), имеем

$$a_k(z) \equiv \overline{M_k^{(s)}(z)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.31'}$$

откуда, в силу неравенства (2.32), вытекает утверждение (2.25) леммы.

Если же $z \in G^{(-)}$, то из (2.31), согласно формуле (2.22), имеем

$$M_k^{(s)} = \varphi_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s + \overline{a_k(z)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

откуда следует неравенство

$$|M_k^{(s)}(z)|^2 \leqslant 2\ |\Phi'(z)|^{2s}|\varphi_k[\Phi(z)]|^2 + 2\,|a_k(z)|^2 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.33}$$

Заметим теперь, что если $\{\alpha_k\}_0^\infty$ определяется по формулам (2.3), то, согласно предложению 4° (§ 1) при условии (2.26) леммы произведение Бляшке

$$B(w) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k - w}{1 - \overline{\alpha}_k w} \cdot \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{-1}(\omega_k) - \Phi(z)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)} \frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)} \tag{2.28'}$$

равномерно сходится в каждой замкнутой части множества $D^{(-)} - \{1/\overline{\alpha}_k\}_0^\infty$. Это означает, что функция $B[\Phi(z)]$ мероморфна и отлична от нуля в области $G^{(-)}$, а ее полюсы лежат лишь в точках $\{\omega_k\}_0^\infty$.

Наконец из формул (2.4) и (2.28) следует неравенство

$$\left|\frac{\varphi_n[\Phi(z)]}{B[\Phi(z)]}\right| = \frac{(1 - |\Phi(\omega_k)|^{-2})^{1/2}}{|1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)|} \cdot \prod_{k=j}^{\infty} \left|\frac{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)}{\Phi^{-1}(\omega_k) - \Phi(z)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,(1 - |\Phi(\omega_k)|^{-2})^{1/2}, \quad z \in G^{(-)}, \quad k \geqslant k_0(z), \tag{2.34}$$

поскольку если $z \in G^{(-)}$, то

$$\left|\frac{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)}{\Phi^{-1}(\omega_k) - \Phi(z)}\right| = \left|\frac{\Phi^{-1}(z) - \Phi^{-1}(\omega_k)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi^{-1}(z)}\right| < 1$$

и при некотором целом $k_0(z)$ очевидно будем иметь

$$|\Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad k > k_0(z).$$

Из оценок (2.34), ввиду условия (2.26), следует

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\varphi_k[\Phi(z)]}{B[\Phi(z)]}\right|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(-)},$$

откуда и из неравенств (2.32) и (2.33) вытекает утверждение (2.27) леммы.

§ 3. Разложения по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$

3.1. (a) Приведем сначала некоторые определения и обозначения в дополнение к уже введенным в § 2.

Обозначим через $L_p(\Gamma)$ $(p>0)$ множество функций $g(\zeta)$, определенных почти всюду на жордановой спрямляемой границе Γ взаимнодополнительных областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ и удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Gamma} |g(\zeta)|^p \, |d\zeta| < +\infty. \tag{3.1}$$

Множество функций $g(\zeta)$, представимых в виде

$$g(\zeta) = [\Phi'(\zeta)]^{s-1/2} \tilde{g}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{3.2}$$

где $\tilde{g}(\zeta) \in L_2(\Gamma)$, обозначим через $L_2^{(s)}(\Gamma)$.

Легко видеть, что если $\Gamma \in U_s$, то всегда $L_2^{(s)} \subset L_1(\Gamma)$.

Полагая далее, что $\Gamma \in U_s$, обозначим через $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$ множество мероморфных в области $G^{(-)}$ функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z) = \frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)} [\Phi'(z)]^s \tilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right), \quad z \in G^{(-)}, \tag{3.3}$$

где $\tilde{F}(w)$ — произвольная функция из класса H_2.

Заметим, что если $F_0(z) \in E_2^{(1/2)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$, то интегралы

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \left| \frac{F_0(z)}{B[\Phi(z)]} \right|^2 |dz| = \int\limits_{\Gamma_\rho} \left| \tilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right) \right|^2 \frac{|\Phi'(z)|}{|\Phi(z)|^2} |dz| =$$

$$= \int\limits_{|w| = \rho^{-1}} |\tilde{F}(w)|^2 \, |dw|, \quad 1 < \rho < +\infty \tag{3.4}$$

ограничены числом, не зависящим от ρ.

Если же $F(z) = E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$, то очевидно имеем

$$F_0(z) \equiv [\Phi'(z)]^{1/2 - s} F(z) \in E_2^{(1/2)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$$

и поэтому интегралы

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \left| \frac{F(z)}{B[\Phi(z)]} \right| |dz| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{\Gamma_\rho} \left| \frac{F_0(z)}{B[\Phi(z)]} \right|^2 |dz| \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{\Gamma_\rho} |\Phi'(z)|^{2s-1} \, |dz| \right\}^{1/2}, \quad 1 < \rho < +\infty \tag{3.5}$$

ввиду ограниченности интегралов (3.4), также ограничены числом, не зависящим от ρ.

(в) Для рядов по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ имеет место следующий частичный аналог теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $\{c_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty. \tag{3.6}$$

Если граница Γ *областей* $G^{(+)}$ *и* $G^{(-)}$ *из класса* U_s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, *то*
а) ряд

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z), \quad z \in G^{(+)} \tag{3.7}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри области $G^{(+)}$, *определяя голоморфную функцию, представимую интегралом типа Коши*

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^{(+)}, \tag{3.8}$$

где $g(\zeta)$ — *определенная функция из класса* $L_2^{(s)}(\Gamma)$.

б) *Если, кроме того, последовательность полюсов* $\{\omega_k\}_0^{\infty}$ *системы* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty, \tag{3.9}$$

то в представлении (3.8) функция $g(\zeta)$ *почти всюду на* Γ *совпадает с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в области* $G^{(-)}$ *функции* $F(z)$ *из класса* $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$.

Доказательство. а) Из утверждения а) леммы 3, в силу условия (3.6), следует абсолютная сходимость ряда (3.7) в области $G^{(+)}$, поскольку по неравенству Буняковского

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z) \right| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} | M_k^{(s)}(z)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Далее из интегральных формул (2.18) для функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{\left\{ \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(w) \right\} [\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw. \tag{3.10}$$

Заметим еще, что согласно предложениям 1° и 2° существует функция $\rho(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ такая, что на промежутке $[0, 2\pi]$

$$\rho(e^{i\theta}) = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(e^{i\theta}). \tag{3.11}$$

При этом $\rho(e^{i\theta})$ — суть угловые граничные значения функции $\rho(w) \in H_2$, определяемой равномерно сходящимся внутри единичного круга разложением

$$\rho(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(w). \tag{3.12}$$

При $\zeta \in \Gamma$ обозначим

$$g(\zeta) = \rho[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s \tag{3.13}$$

и заметим, что $g(\zeta) \in L_2^{(s)}(\Gamma)$, так как

$$\int_{\Gamma} |\varphi[\Phi(\zeta)] \sqrt{\Phi'(\zeta)}|^2 |d\zeta| = \int_{|w|=1} |\varphi(w)|^2 |dw| < +\infty.$$

Тогда, в силу (3.10), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\left\{\varphi(w) - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(w)\right\}[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw, \quad z \in G^{(+)}. \qquad (3.14)$$

Пользуясь, наконец, формулой (3.11) и тем, что при $\Gamma \in U$, интеграл

$$\int_0^{2\pi} |\Psi'(e^{i\theta})|^{2(1-s)} d\theta$$

конечен, путем предельного перехода в тождестве (3.14) при $n \to +\infty$ заключаем, что его правая часть стремится к нулю, притом равномерно как внутри области $G^{(+)}$, так и внутри $G^{(-)}$. Итак утверждение а) теоремы установлено.

б) Согласно теореме 1 при условии

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty$$

ряд (3.12) определяет функцию $\varphi(w)$ из класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Это, в частности, означает, что существует функция $\bar{\varphi}(w) \in H_2$ такая, что угловые граничные значения функции

$$\varphi(w) = \frac{B(w)}{w} \bar{\varphi}\left(\frac{1}{w}\right) \in \bar{H}_2\{\alpha_k\}, \quad w \in D^{(-)}$$

на окружности $w = e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ почти всюду совпадают с функцией $\varphi(e^{i\theta})$, определяемой по формуле (3.11). Поэтому, положив $\zeta = \Psi(e^{i\theta}) \in \Gamma$ и пользуясь обозначением (3.13), мы заключаем, что значения $g(\zeta)$ почти всюду на Γ совпадают с угловыми граничными значениями мероморфной в области $G^{(-)}$ функции

$$F(z) = \frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)} [\Phi'(z)]^s \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right), \qquad (3.15)$$

принадлежащей классу $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$.

(с) Покажем теперь, что, в условиях (3.6) и (3.9) теоремы 4, о рядах вида (3.7) можно утверждать значительно больше. А именно: такие ряды сходятся также всюду в области $G^{(-)} - \{\omega_k\}_0^{\infty}$, определяя мероморфную в $G^{(-)}$ функцию, являющуюся в определенном смысле моногенным продолжением функции $f_i(z)$ через границу Γ на всю плоскость переменной z.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (3.6) и (3.9) теоремы 4, а* $\Gamma \in U_s$. *Тогда*

а) *ряд*

$$f_e(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z), \quad z \in G^{(-)} \tag{3.16}$$

абсолютно и равномерно сходится в любой замкнутой части множества $G^{(-)} - \{\omega_k\}_0^{\infty}$, *определяя мероморфную в области* $G^{(-)}$ *функцию, представимую в виде*

$$f_e(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + F(z), \quad z \in G^{(-)}, \tag{3.17}$$

где $g(\zeta)$ — *определенная функция из класса* $L_2^{(s)}(\Gamma)$, *почти всюду совпадающая с угловыми граничными значениями функции*

$$F(z) \in E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$$

на кривой Γ.

б) *Функции* $f_i(z)$ *и* $f_e(z)$, *определенные как суммы одного и того же ряда соответственно в областях* $G^{(+)}$ *и* $G^{(-)}$, *являются моногенными продолжениями друг друга через кривую* Γ *в том смысле, что почти для всех* $\zeta_0 \in \Gamma$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \{f_i(\zeta_0 + i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}) - f_e(\zeta_0 - i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})\} = 0 \tag{3.18}$$

равномерно относительно $\psi_0 \left(|\psi_0| < \frac{\pi}{2}\theta,\ 0<\theta<1\right)$, *где* φ_0 *есть угол наклона касательной к кривой* Γ *в точке* ζ_0.

Доказательство. а) Пользуясь интегральным представлением (2.19) системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) = [\Phi'(z)]^s \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k[\Phi(z)] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\left\{\sum_0^n c_k\varphi_k(w)\right\}[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw, \quad z \in G^{(-)}.$$

Отсюда, пользуясь обозначениями (3.12) и (3.13), имеем тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + [\Phi'(z)]^s \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k[\Phi(z)] -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\left\{\rho(w) - \sum_0^n c_k\varphi_k(w)\right\}[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw, \quad z \in G^{(-)}. \tag{3.19}$$

Заметим теперь, что, как уже было отмечено в процессе доказательства теоремы 4, при $n \to +\infty$ правая часть тождества (3.19) равномерно стремится к нулю внутри области $G^{(-)}$.

Далее, согласно теореме 1, ряд

$$\rho(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(w)$$

равномерно сходится внутри множества $D^{(-)} - \{1/\overline{\alpha}_k\}_0^{\infty}$, определяя в области $D^{(-)}$ мероморфную функцию из класса $H_2\{\alpha_k\}$

$$\rho(w) = \frac{B(w)}{w} \overline{\rho}\left(\frac{1}{w}\right), \ w \in D^{(-)}.$$

Ввиду сказанного, переходя к пределу при $n \to +\infty$, из (3.19) получим представление (3.17), где

$$F(z) = \rho[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s =$$

$$= \frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)} [\Phi'(z)]^s \overline{\rho}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right) \in E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$$

и почти всюду на Γ

$$g(\zeta) = \rho[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{(s)} = F(\zeta) \in L_2^s(\Gamma).$$

Наконец абсолютная сходимость ряда (3.16) в точках множества $G^{(-)} - \{\omega_k\}_0^{\infty}$ вытекает из условия (3.6) и из утверждения б) леммы 3.

б) При достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $|\psi_0| < \frac{\pi}{2}$, если $\zeta_0 \in \Gamma$, то

$$z_1 = \zeta_0 + i\varepsilon e^{i(\varphi_0 + \psi_0)} \in G^{(+)}, \ z_2 = \zeta_0 - i\varepsilon e^{i(\varphi_0 + \psi_0)} \in G^{(-)}.$$

Согласно известной теореме теории интегралов типа Коши, почти для всех точек $\zeta_0 \in \Gamma$ имеем*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta \right\} = g(\zeta_0), \tag{3.20}$$

притом равномерно относительно ψ_0 $\left(|\psi_0| \leqslant \frac{\pi}{2}\theta; 0 < \theta < 1\right)$.

Так как почти для всех $\zeta_0 \in \Gamma$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(z_2) = g(\zeta_0),$$

то наше утверждение (3.18) следует из представлений (3.8) и (3.17), в силу предельной формулы (3.20).

3.2. (a) Чтобы установить теорему разложения по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ приведем несколько дополнительных определений.

Пусть, как и выше, $G^{(+)}$ — область, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ. Принято говорить, что голоморфная в области $G^{(+)}$ функция $f(z)$ принадлежит классу $E_p(G^{(+)})$ $(p > 0)$, если существует последовательность контуров $\Gamma_n \in G^{(+)}$, сходящихся к Γ, и таких, что

* См. [11], стр. 190.

$$\sup_{1<n<\infty}\left\{\int\limits_{\Gamma_n}|f(z)|^p\,|dz|\right\}<+\infty. \tag{3.21}$$

Известно, что любая функция $f(z)\in E_p(G^{(+)})$ имеет почти всюду на границе Γ угловые граничные значения $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)$. Известно также, что класс $E_1(G^{(+)})$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых посредством своих угловых граничных значений $f(\zeta)$ интегралом Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in G^{(+)}. \tag{3.22}$$

Легко видеть, что $E_p(G^{(+)})\subset E_1(G^{(+)})$ $(p>1)$, и поэтому формула (3.22), в частности, имеет место также для любой функции $f(z)\in E_2(G^{(+)})$.

Полагая далее, что $\Gamma\in U_s$, обозначим через $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ множество голоморфных в области $G^{(+)}$ функций, представимых в виде интеграла типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv K(z;\ g),\ z\in G^{(+)}, \tag{3.23}$$

где $g(\zeta)$ — некоторая функция из класса $L_2^{(s)}(\Gamma)$, т. е. такая, что

$$g(\zeta)=[\Phi'(\zeta)]^{s-1/2}\,\tilde{g}(\zeta),\ \tilde{g}(\zeta)\in L_2(\Gamma).$$

Очевидно, что если $f(z)\in E_2(G^{(+)})$, то имеем

$$f(z)=K(z;f),\ z\in G^{(+)},$$

где $f(\zeta)\in L_2^{(1/2)}(\Gamma)=L_2(\Gamma)$.

Теорема 6. *Пусть* $\Gamma\in U_s$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$ *и последовательность полюсов* $\{\omega_k\}_0^\infty$, *порождающая систему* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})=+\infty. \tag{3.24}$$

Тогда любая функция

$$f(z)=K(z;\ g)\in K_2^{(s)}(G^{(+)})$$

допускает абсолютно и равномерно сходящееся внутри области $G^{(+)}$ *разложение*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z),\quad z\in G^{(+)}, \tag{3.25}$$

где

$$c_k(g)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}g(\zeta)\,[\Phi'(\zeta)]^{1-s}\,\overline{\varphi_k[\Phi(\zeta)]}\,\frac{d\zeta}{\Phi(\zeta)}=$$

---

* См. [11], стр. 203—209.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s \overline{\varphi_k(w)} \frac{dw}{w}, \tag{3.26}$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g)|^2 < +\infty. \tag{3.27}$$

Доказательство. Положив, что точка $z \in G^{(+)}$ фиксирована, рассмотрим функцию

$$\chi_s(\zeta; z) = \frac{[\Psi'(\zeta)]^{1-s}}{\Psi(\zeta) - z}, \tag{3.28}$$

голоморфную в области $D^{(-)} = \{\zeta; |\zeta| > 1\}$. Тогда функция

$$\chi_s^*(\zeta; z) = \frac{1}{\zeta} \overline{\chi_s\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}; z\right)} \tag{3.28'}$$

очевидно голоморфна в круге $D^{(+)} = \{\zeta; |\zeta| < 1\}$. Докажем, что при каждом $z \in G^{(+)}$, как функция от ζ, $\chi_s^*(\zeta; z) \in H_2$.

В самом деле, обозначая

$$d(z) = \inf_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z| > 0,$$

для любого $|\zeta| = \rho > 1$ будем иметь

$$|\Psi(w) - z| \geqslant d(z).$$

Поэтому

$$\lim_{\rho \to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\chi_s(\rho e^{i\theta}; z)|^2 \, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant [d(z)]^{-2} \lim_{\rho \to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\Psi'(\rho e^{i\theta})|^{2(1-s)} \, d\theta < +\infty, \tag{3.29}$$

поскольку при $\Gamma \in U_s$, как уже было указано выше [2.2 (в)], интегралы справа в (2.23) ограничены числом, не зависящим от ρ.

Однако, по (3.28′) при $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |\chi_s^*(re^{i\theta}; z)|^2 \, d\theta = \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left| \chi_s\left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}; z\right)\right|^2 d\theta,$$

откуда, ввиду (3.29), следует, что $\chi_s^*(\zeta; z) \in H_2$.

Далее, имея в виду способ выбора (2.3) последовательности $\{\alpha_k\}_0^\infty$, порождающей систему $\{\varphi_k(\zeta)\}_0^\infty$, в силу условия (3.24) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) = +\infty.$$

Следовательно, согласно предложению 3° (§ 1), система $\{\varphi_k(w)\}_0^\infty$ замкнута в классе функций H_2. Отсюда следует, что, обозначая

$$a_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\chi_s^*(\zeta;\, z)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (k=0,\, 1,\, 2,\cdots),$$

будем иметь разложение

$$\chi_s^*(\zeta;\, z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)\,\varphi_k(\zeta), \quad z\in G^{(+)},$$

сходящееся равномерно внутри круга $D^{(+)}=\{w;\ |w|<1\}$ и в среднем на ее границе $|w|=1$.

Из формул (2.31′) и (3.28′) вытекает, что это разложение можно записать в виде

$$\chi_s\left(\frac{1}{\overline{\zeta}};\, z\right)=\sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z)\,\overline{\zeta\varphi_k(\zeta)}, \quad z\in G^{(+)}.$$

Наконец обозначая $\overline{\zeta}^{-1}=w$ и принимая во внимание значение (3.28) функции $\chi_s(w;\, z)$, приходим к заключению: *разложение*

$$\chi_s(w;\, z)=\frac{[\psi'(w)]^{1-s}}{\psi(w)-z}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z)\left\{\frac{1}{\overline{w}}\,\varphi_k\!\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)\right\}, \ w\in D^{(-)},\ z\in G^{(+)} \tag{3.30}$$

сходится в среднем на окружности $|w|=1$ *и равномерно внутри области* $D^{(-)}$ *при любом фиксированном* $z\in G^{(+)}$.

Теперь после замены переменной интегрирования $\zeta=\Psi(w)$ для функции $f(z)=K(z;\, g)$ получим представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\Psi(w)][\Psi'(w)]}{\Psi(w)-z}\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\chi_s(w;z)\,dw, \ z\in G^{(+)}. \tag{3.31}$$

При этом, так как $g(\zeta)\in L_2^{(s)}(F)$, т. е.

$$g(\zeta)=[\Phi'(\zeta)]^{s-1/2}\tilde{g}(\zeta), \quad \tilde{g}(\zeta)\in L_2(\Gamma),$$

то

$$\int\limits_{|w|=1}|g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s|^2\,|dw|=\int\limits_{\Gamma}|\tilde{g}(\zeta)|^2\,|d\zeta|<+\infty. \tag{3.32}$$

Подставляя теперь разложение (3.30) функции $\chi_s(w;\, z)$ в формулу (3.31), заметив при этом, что это разложение сходится в среднем на окружности $|w|=1$, получим требуемое разложение (3.25)—(3.26). При этом ряд (3.27) сходится в силу условия (3.32) и неравенства Бесселя. Наконец из условия (3.27), в силу теоремы 4, заключаем, что разложение (3.25) сходится равномерно и абсолютно внутри области $G^{(+)}$. Итак, теорема доказана.

(в) Отметим, что условие (3.24) не только достаточно, но и необходимо в остальных условиях теоремы 6. Этот факт, установленный впервые Г. Ц. Тумаркиным для системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, вытекает немедленно из теоремы 4.

В самом деле, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-|\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty$$

и если функция $f_0(z)$ допускает разложение вида (3.25)—(3.26), то, согласно теореме 4, существует функция $g_0(\zeta)\in L_2^{(s)}(\Gamma)$ такая, что

$$f_0(z)=K(z; g_0)\in K_2^{(s)}(G^{(+)}),$$

причем почти всюду на Γ функция $g_0(\zeta)$ совпадает с угловыми граничными значениями некоторой функции $F_0(z)$ из класса $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$.

Это значит, что при нарушении условия (3.24) теоремы произвольная функция класса $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ не разлагается в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, т. е. условие это необходимо.

(с) В заключение сделаем следующее замечание о единственности разложений по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$.

Независимо от того выполняется или нет условие (3.24) имеет место следующее утверждение.

Если некоторая функция

$$f(z)=K(z; g)\in K_2^{(s)}(G^{(+)})$$

разлагается в ряд вида (3.25)—(3.26), а также в ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \overset{*}{c}_k M_k^{(s)}(z), \quad z\in G^{(+)}, \tag{3.33}$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\overset{*}{C}_k|^2 < +\infty, \tag{3.34}$$

то

$$\overset{*}{c}_k = c_k(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\overline{\varphi_k(w)}\,\frac{dw}{w} \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \tag{3.35}$$

В самом деле, если функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (3.25)—(3.26), то, обозначая

$$\varphi_0(w)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)\,w^k, \; g_0(\zeta)=[\Phi'(\zeta)]^s\,\varphi[\Phi(\zeta)], \; \zeta\in\Gamma, \tag{3.36}$$

согласно теореме 4, будем иметь

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \; z\in G^{(+)}. \tag{3.37}$$

Аналогично из (3.33)—(3.34) следует, что если обозначить

$$\rho^*(w)=\sum_{k=0}^{\infty} \overset{*}{c}_k w^k, \quad g^*(\zeta)=[\Phi'(\zeta)]^s \rho^*[\Phi(\zeta)], \quad \zeta\in\Gamma, \tag{3.36'}$$

то имеем еще

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g^*(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \quad z\in G^{(+)}. \tag{3.37'}$$

Из формул (3.36), (3.36′) и (3.37), (3.37′) вытекает тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\Phi'(\zeta)]^s\{\rho^*[\Phi(\zeta)]-\rho_0[\Phi(\zeta)]\}}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0, \quad z\in G^{(+)}. \tag{3.38}$$

С другой стороны, очевидно, что интеграл (3.38) в области $G^{(-)}$ представляет аналитическую функцию, имеющую порядок $O\left(\frac{1}{z}\right)$ в окрестности точки $z=\infty$. Поэтому тождество (3.38) приводит нас к заключению, что функция

$$[\Phi'(\zeta)]^s\{\rho^*[\Phi(\zeta)]-\rho_0[\Phi(\zeta)]\}, \quad \zeta\in\Gamma$$

аналитически продолжается во всю область $G^{(-)}$, притом так, что при $z\to\infty$

$$[\Phi'(z)]^s\{\rho^*[\Phi(z)]-\rho_0[\Phi(z)]\}=O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Поскольку в области $G^{(-)}$ $\Phi'(z)\neq 0$, причем $\Phi'(\infty)>0$, то функция $\rho^*[\Phi(z)]-\rho_0[\Phi(z)]$ также голоморфна всюду в области $G^{(-)}$ и имеет порядок z^{-1} при $z=\infty$.

Иначе говоря голоморфная в круге $D^{(-)}$ функция

$$\rho^*(w)-\rho_0(w)=\sum_{k=0}^{\infty}\{\overset{*}{c}_k-c_k(g)\}w^k$$

аналитически продолжима на всю плоскость w, т. е. является целой, причем при $w\to\infty$ она имеет порядок $O(\Psi^{-1}(w))=O(w^{-1})$. Отсюда по теореме Лиувилля следует тождество $\rho^*(w)\equiv\rho_0(w)$ и тем самым формулы (3.35).

§ 4. Разложения по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ (продолжение)

4.1. (а) Продолжая пользоваться обозначениями, введенными в §§ 2 и 3, в данном параграфе мы проводим дальнейшее исследование разложений функций по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$, в принципиально отличном от теоремы 6 случае, когда последовательность ее полюсов $\{\omega_k\}_0^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty. \tag{4.1}$$

Докажем сначала одну важную для дальнейшего лемму.

Лемма 4. *Пусть $\Gamma \in U_s$ $(0 < s \leqslant 1)$ и последовательность комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty \in G^{(-)}$, порождающая систему $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, удовлетворяет условию (4.1).*

Тогда при каждом $z \in G^{(+)}$ всюду в области $D^{(-)} = \{w: |w| > 1\}$ и почти всюду на ее границе $|w| = 1$ справедливо представление

$$\chi_s(w; z) = \frac{1}{w}\Gamma\left(\frac{1}{w}; z\right) + \frac{1}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w}; z\right), \tag{4.2}$$

где в области $D^{(+)} = \{\zeta; |\zeta| < 1\}$

$$\Gamma(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z)\,\overline{\varphi}_k(\zeta) \in H_2, \tag{4.3}$$

$$\omega(\zeta; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{B(t)\,[\Psi'(t)]^{1-s}}{[\Psi(t) - z]\,(1 - t\zeta)}\,dt \in H_2, \tag{4.4}$$

$$B(\zeta) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k - \zeta}{1 - \overline{\alpha}_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{-1}(\omega_k) - \zeta}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\,\zeta}\cdot\frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)}. \tag{4.5}$$

При этом разложение (4.3) сходится к функции $\Gamma(\zeta; z)$ равномерно относительно ζ внутри круга $D^{(+)}$ и в среднем к ее граничным значениям на окружности $|\zeta| = 1$.

Доказательство. Пользуясь тождеством (1.3), а также формулами (2.31), (2.31′) и (3.28), 3.28′), при $\zeta \in G^{(+)}$ и $z \in G^{(+)}$ имеем

$$\frac{1}{\zeta}\overline{\chi_s\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}; z\right)} = \chi_s^*(\zeta; z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \frac{\chi_s^*(t; z)}{1 - \zeta\overline{t}}\,|dt| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{M_k^{(s)}(z)}\,\varphi_k(z) + \frac{B_{n+1}(\zeta)}{2\pi}\int_{|t|=1} \frac{\overline{B_{n+1}(t)}\,\chi_s^*(t; z)}{1 - \zeta\overline{t}}\,|dt|, \tag{4.6}$$

где

$$B_{n+1}(\zeta) = \prod_{k=0}^{n} \frac{\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)} - \zeta}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\,\zeta}\cdot\frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)}. \tag{4.5′}$$

Далее, переходя в формуле (4.6) к сопряженным величинам и заметив при этом, что

$$\overline{B_{n+1}(\zeta)} = \left[B_{n+1}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\right]^{-1}$$

и при $|t| = 1$

$$\overline{\chi_s^*(t; z)} = t\chi_s(t; z),$$

после замены переменной $\overline{\zeta}^{-1} = w$ получим при $z \in G^{(+)}$ и $w \in D^{(-)}$

$$\chi_s(w; z) = \sum_{k=0}^{n} M_k^{(s)}(z)\left\{\frac{1}{w}\overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{w}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{[B_{n+1}(w)]^{-1}}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{B_{n+1}(t)\,\chi_s(t; z)}{w - t}\,dt \equiv J_n^{(1)} + J_n^{(2)}. \tag{4.7}$$

Поскольку

$$\chi_s(w; z) = \frac{[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z},$$

то, заметив, что $\zeta = \Psi(w) \in G^{(-)}$ — любое, тождество (4.7) можем записать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{n} M_k^{(s)}(z)\, R_k^{(s)}(\zeta) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{2\pi i B_{n+1}[\Phi(\zeta)]} \int_{\Gamma} \frac{B_{n+1}[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)[\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]}\, d\eta \tag{4.8}$$

при любом $\zeta \in G^{(-)}$ и $z \in G^{(+)}$, где

$$R_k^{(s)}(\zeta) = \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \cdot \bar{\varphi}_k\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) =$$

$$= \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^{1/2}}{\Phi(\zeta) - \alpha_k} \cdot \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{B_k[\Phi(\zeta)]} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.9}$$

Отметим, что система $\{R_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ голоморфных в области $G^{(-)}$ функций ортонормальна на кривой Γ с весом $|\Phi'(\zeta)|^{2s-1} \in L_2(\Gamma)$.

В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\Phi'(\zeta)|^{2s-1}\, R_p^{(s)}(\zeta)\, \overline{R_q^{(s)}(\zeta)}\, |d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \overline{\varphi_p(t)}\, \varphi_q(t)\, |dt| = \delta_{p,q} \quad (p, q = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.10}$$

Заметим теперь, что поскольку $\chi_s(e^{i\theta}; z) \in L_2(0; 2\pi)$, то пользуясь предложениями 4°—5°—6° (§ 1) и поступая так же, как и при доказательстве теоремы Уолша 7° (§ 1), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi i B(w)} \int_{|t|=1} \frac{B(t)\chi_s(t; z)}{w - t}\, dt, \quad z \in G^{(+)},\ w \in D^{(-)}. \tag{4.11}$$

Далее, вследствие условия $\Gamma \in U_s$, если $|w| \neq 1$ и $z \in G^{(+)}$, то

$$\frac{B(e^{i\theta})[\Psi'(e^{i\theta})]^{1-s}}{[\Psi(e^{i\theta}) - z](w - e^{i\theta})} \in L_2(0; 2\pi).$$

Поэтому легко видеть, что при каждом фиксированном $z \in G^{(+)}$ интеграл

$$\omega(\zeta; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{B(t)[\Psi'(t)]^{1-s}}{[\Psi(t) - z](1 - t\zeta)}\, dt$$

как функция от ζ в области $D^{(+)}$ принадлежит классу H_2.

Итак, из (4.11) следует при $z \in G^{(+)}$ и $w \in D^{(-)}$, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{(2)} = \frac{1}{wB(w)}\, \omega\left(\frac{1}{w}; z\right). \tag{4.12}$$

С другой стороны, согласно лемме 3,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |M_k^{(s)}(z)|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(+)}$$

и, поскольку система $\{\bar{\varphi}_k(\zeta)\}_0^{\infty}$ также ортонормальна на окружности $|\zeta|=1$, то утверждения теоремы о природе сходимости ряда

$$\Gamma(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z)\bar{\varphi}_k(\zeta), \quad z \in G^{(+)}$$

относительно переменной ζ и о том, что $\Gamma(\zeta; z) \in H_2$, непосредственно следуют из теоремы 1. Поэтому из (4.7) выводим, что для любого $z \in G^{(+)}$

$$\lim_{n \to \infty} J_n^{(1)} = \frac{1}{w}\Gamma\left(\frac{1}{w}; z\right), \quad w \in D^{(-)}. \tag{4.13}$$

Переходя к пределу в тождестве (4.7) при $n \to \infty$, ввиду (4.12) и (4.13), получим формулу (4.2) леммы для $z \in G^{(+)}$ и $w \in D^{(-)}$. Наконец, поскольку тождество (4.2) имеет место для всех $w \in D^{(-)}$, причем отдельные его слагаемые, очевидно, почти для всех точек окружности $|w|=1$ имеют граничные значения, принадлежащие классу $L_2(0; 2\pi)$, то оно справедливо также почти всюду на этой окружности.

Отметим, что аналогичным переходом к пределу в тождестве (4.8) при $n \to \infty$, поличим соотношение

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z) R_k^{(s)}(\zeta) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{2\pi i B[\Phi(\zeta)]} \int_{\Gamma} \frac{B[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)[\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]} d\eta, \quad z \in G^{(+)}, \tag{4.14}$$

справедливое для всех $\zeta \in G^{(-)}$ и почти всех $\zeta \in \Gamma$.

(в) Как уже было отмечено в дополнительном замечании к теореме 6, в случае сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) \tag{4.15}$$

произвольная функция класса $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ не допускает разложения в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$.

Докажем основную теорему данного параграфа, содержащую явное выражение для разности

$$f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) M_k^{(s)}(z)$$

в случае сходимости ряда (4.15), для любой функции $f(z) = K(z; g) \in K_2^{(s)}(G^{(+)})$.

Теорема 7. *Пусть* $\Gamma \in U_s$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ *и последовательность комлексных чисел* $\{\omega_k\}_0^{\infty} \in G^{(-)}$, *порождающая систему* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$, *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty.$$

Тогда любая функция

$$f(z)=K(z;\ g)\in K_2^{(s)}(G^{(+)}) \tag{4.16}$$

допускает разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w};\ z\right)dw,\quad z\in G^{(+)}, \tag{4.17}$$

где

$$c_k(g)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}g\,[\Psi\,(w)][\Psi'(w)]^s\overline{\varphi_k(w)}\,\frac{dw}{w}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}g\,(\zeta)\ R_k^{(s)}\ (\zeta)\,d\zeta\quad (k=0,1,2,\cdots), \tag{4.18}$$

$$R_k^{(s)}(\zeta)=\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)}\cdot\varphi_k\,[\Phi\,(\zeta)],\ \zeta\in\Gamma. \tag{4.19}$$

Кроме того, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(g)|^2<+\infty, \tag{4.20}$$

а ряд, стоящий в правой части (4.17), сходится абсолютно и равномерно внутри области $G^{(+)}$.

Наконец, при $w=e^{i\theta}$ *в формуле (4.17) под* $\omega\left(\frac{1}{w};\ z\right)$ *следует понимать граничное значение функции*

$$\omega\,(\zeta;\ z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)\,[\Psi'(t)]^{1-s}}{[\Psi(t)-z](1-\zeta t)}\,dt\in H_1 \tag{4.21}$$

в точке $\zeta=e^{-i\theta}$.

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 6 мы опирались на формулу (3.31)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\chi_s\,(w;\ z)\,dw,\ \ z\in G^{(+)}.$$

Отсюда, пользуясь тождеством (4.2) леммы 4, справедливой почти всюду на окружности $|w|=1$, получим представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right)\frac{dw}{w}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w};\ z\right)dw,\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.22}$$

С другой стороны, пользуясь обозначением (4.18), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right)\frac{dw}{w}=\sum_{k=0}^{n}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\left\{\Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right)-\sum_{k=0}^{n}M_k^{(s)}(z)\,\bar{\varphi}_k\left(\frac{1}{w}\right)\right\}\frac{dw}{w}\equiv$$

$$\equiv S_n^{(1)}(z)+S_n^{(2)}(z),\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.23}$$

Ввиду того, что $g(\zeta)\in L_2^{(s)}(\Gamma)$, т. е.

$$\int\limits_{|w|=1}|g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s|^2\,|dw|<+\infty, \tag{4.24}$$

для функции $S_n^{(2)}(z)$ получим оценку

$$|S_n^{(2)}(z)|\leqslant\frac{c_0}{2\pi}\left\{\int\limits_{|w|=1}\left|\Gamma(w;\ z)-\sum_{k=0}^{n}M_k^{(s)}(z)\,\bar{\varphi}_k(w)\right|^2|dw|\right\}^{1/2},\quad z\in G^{(+)}, \tag{4.25}$$

где c_0 не зависит от n.

Но, согласно лемме 4, при $n\to+\infty$ интеграл (4.24) стремится к нулю при любом $z\in G^{(+)}$. Поэтому после предельного перехода при $n\to\infty$ из тождества (4.23) получим, что справедливо разложение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right)\frac{dw}{w}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z),\quad z\in G^{(+)}, \tag{4.26}$$

причем сходимость ряда (4.20) следует из условия (4.24), в силу формул (4.18) и неравенства Бесселя. Ряд же (4.26) сходится абсолютно и равномерно внутри области $G^{(+)}$ согласно теореме 4.

Из (4.22) и (4.26) следует представление (4.17). Таким образом, теорема полностью доказана.

4.2. (а) Обозначим через $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ класс голоморфных в области $G^{(+)}$ функций, допускающих разложение вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,M_k^{(s)}(z),\quad z\in G^{(+)}, \tag{4.27}$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.$$

Согласно теореме 6 классы $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ и $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ совпадают в случае расходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1}),$$

а если он сходится, имеет место строгое включение

$$\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})\subset K_2^{(s)}(G^{(+)}).$$

Из теоремы 7 непосредственно получается

Следствие. *При условии*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty$$

класс $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ *совпадает с множеством тех функций* $f(z)\in K_2^{(s)}(G^{(+)})$, *для которых выполняются условия:*

а) *имеет место представление*

$$f(z)=K(z;\ g),\quad z\in G^{(+)};$$

б) *функция* $g(\zeta)$ — *из класса* $L_2^{(s)}(\Gamma)$ *и такова, что*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)][\psi'(w)]^s}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w};\ z\right)dw\equiv 0,\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.27'}$$

(в) характеристику класса $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ можно сформулировать в более обозримой форме.

С этой целью обозначим через $\widetilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$ множество функций $g(\zeta)$ из класса $L_2^{(s)}(\Gamma)$, почти всюду на Γ совпадающих с угловыми граничными значениями некоторой функции $F(z)$ из класса $E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$, т. е. с граничными значениями мероморфных функций вида

$$F(z)=\frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)}[\Phi'(z)]^s\widetilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right),\quad z\in G^{(-)},$$

где $\widetilde{F}(w)\in H_2$.

Другая характеристика класса $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ дается следующей теоремой.

Теорема 8. *При условии*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty$$

класс $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ *совпадает с множеством тех функций* $f(z)\in K_2^{(s)}(G^{(+)})$, *для которых при некотором* $g(\zeta)\in\widetilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$ *имеет место представление*

$$f(z)=K(z;\ g),\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.28}$$

Доказательство. Пусть $f(z)\in\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$, т. е. имеет место разложение вида (4.28). Тогда по теореме 4 функция $f(z)$ допускает представление (4.28), где $g(\zeta)\in\widetilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$.

Обратно, пусть функция $f(z)$ допускает представление вида (4.28), где $g(\zeta) \in \tilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$, т. е. почти всюду на Γ имеем

$$g(\zeta) = \frac{B[\Phi(\zeta)]}{\Phi(\zeta)}[\Phi'(\zeta)]^s \tilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right),$$

где $\tilde{F}(w)$ — некоторая функция из класса H_2. Тогда будем иметь

$$U(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \frac{g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w}; z\right)dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \tilde{F}\left(\frac{1}{w}\right)\omega\left(\frac{1}{w}; z\right)\frac{dw}{w^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\tilde{F}(\zeta)\,\omega(\zeta; z)\,d\zeta. \qquad (4.29)$$

Но, согласно лемме 9, при любом $z \in G^{(+)}$ имеем $\omega(\zeta; z) \in H_2$, и, поскольку $\tilde{F}(\zeta) \in H_2$, то

$$\tilde{F}(\zeta)\,\omega(\zeta; z) \in H_1, \quad z \in G^{(+)}.$$

Поэтому из (4.29) легко вытекает также, что при любом r $(0<r<1)$

$$U(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\tilde{F}(\zeta)\,\omega(\zeta; z)\,d\zeta, \quad z \in G^{(+)}. \qquad (4.30)$$

Подставляя теперь в (4.30) значение функции $\omega(\zeta; z)$ из формулы (4.21), после очевидно допустимой замены порядка интегрирования, получим

$$U(z) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)[\Psi'(t)]^{1-s}}{\Psi(t)-z}\left\{\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{1-t\zeta}d\zeta\right\}dt. \qquad (4.31)$$

Однако, так как $\tilde{F}(\zeta) \in H_2$, то очевидно, что при всех $|t| = 1$

$$\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{1-t\zeta}\,d\zeta \equiv 0.$$

Отсюда и из (4.31) следует тождество

$$U(z) \equiv 0; \ z \in G^{(+)},$$

и значит, ввиду приведенного выше следствия теоремы 7, можем утверждать, что $f(z) \in \tilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$. Теорема доказана.

(c) Наконец, приведем обращение теоремы 5, что вместе с тем является также значительным усилением теоремы 8.

Обозначим через $\lambda_2\{G^{(+)}; G^{(-)}; \omega_k\}$ класс функций $f(z)$, определенных на множестве

$$G\{\omega_k\} = G^{(+)} + G^{(-)} - \{\omega_k\}_0^\infty$$

и удовлетворяющих условиям:

1) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^{(-)},$$

2) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+F(z),\ z\in G^{(-)},$$

где $F(z)\in E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$, причем почти для всех $\zeta\in\Gamma$, $g(\zeta)=F(\zeta)$.

Теорема 9. *Класс* $\lambda_2\{G^{(-)};\ G^{(-)};\ \omega_k\}$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *представимых на* $G\{\omega_k\}$ *в виде ряда*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kM_k^{(s)}(z),\ z\in G\{\omega_k\},\tag{4.32}$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.$$

Доказательство. Что ряды вида (4.32) сходятся на множестве $G\{\omega_k\}$ и представляют функции класса $\lambda_2\{G^{(+)};\ G^{(-)};\ \omega_k\}$ было уже установлено нами в теоремах 4 и 5.

Обратно, если $f(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ G^{(-)};\ \omega_k\}$, то из свойств 1) и 2) следует, что имеем также: $f(z)\in\tilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$. Поэтому согласно теоремам 7 и 8, справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z),\ z\in C^{(+)}.$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(g)|^2<+\infty,$$

Однако, согласно теореме 5, этот же ряд сходится и на множестве $G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^{\infty}$, притом к сумме

$$f_e(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+F_0(z),$$

где $F_0(z)\in E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$ и $g_0(\zeta)=F_0(\zeta)$ почти для всех $\zeta\in\Gamma$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $f_e(z)\equiv f(z)$, $z\in G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^{\infty}$.

С этой целью, во-первых, заметим, что по той же теореме 5 и в принятых там обозначениях почти для всех $\zeta_0\in\Gamma$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{f(\zeta_0+i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})-f_e(\zeta_0-i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})\right\}=0,\tag{4.33}$$

поскольку, очевидно, $f_i(z)\equiv f(z)$, $z\in G^{(+)}$.

Во-вторых, заметим еще, что из представлений 1) и 2) функции $f(z)$ следует также, что почти для всех $\zeta_0\subset\Gamma$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{f(\zeta_0+i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})-f(\zeta_0-i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})\right\}=0.\tag{4.34}$$

Из (4.33) – (4.34) вытекает, что мероморфная в области $G^{(-)}$ функция $f_e(z) - f(z)$ почти всюду на Γ имеет нулевые угловые граничные значения.

Отсюда по общей теореме единственности для мероморфных функций вытекает, что $f_e(z) = f(z)$.

Возникает вопрос: в случае, когда контур Γ неспрямляем, либо, в более общем случае, когда $\overline{G}^{+} = K$ есть произвольный ограниченный континуум, в каких классах функций система $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ продолжает оставаться базисом в том или ином смысле?

По-видимому поставленный вопрос представляет особый интерес в том случае, когда последовательность полюсов $\{\omega_k\}_0^\infty$ системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ удовлетворяет условию (4.1).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР и Ереванский
государственный университет

Поступило 30.XI.1966

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՖԻՔՍ ԲԵՎԵՌՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐՈՎ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ամփոփում

Հեղինակի մի աշխատանքում [1] կառուցված էր $\{M_k(z)\}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ ռացիոնալ կոտորակների հատուկ սիստեմ. $\{\omega_k\}_1^\infty$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ ֆիքսած բևեռներով, որոնք ընկած են փակ Ժորդանյան ուղղելի եզր ունեցող $G^{(+)}$ միակապ տիրույթից դուրս։ Այդ սիստեման իրենից ներկայացնում էր Ֆաբերի բազմանդամների սիստեմի բնական ընդհանրացումը այն դեպքի համար, երբ բոլոր բևեռները կուտակված չեն $z = \infty$ կետում, այլ ընկած են տված $\{\omega_k\}_1^\infty$ կետերի հաջորդականության վրա։

Ներկա հոդվածում բերված են ֆիքսած բևեռներ ունեցող ռացիոնալ կոտորակների սիստեմներով վերլուծության վերաբերյալ հեղինակի նոր հետազոտությունների ընդարձակ շարադրանքը։

M. M. DŽRBAŠIAN

EXPANSIONS BY THE SYSTEMS OF RATIONAL FUNCTIONS WITH FIXED POLES

Summary

In author's earlier paper [1] a special system $\{M_k(z)\}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ of rational functions with fixed set $\{\omega_k\}_1^\infty$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ of poles lying outside of a simply connected domain $G^{(+)}$ with close Jordanian rectifiable boundary Γ, was constructed. That system presents a natural generalization of the system of Faber polynomial, in the sence, that

the poles constitute a prescribed sequence $\{\omega_k\}_1^\infty$ rather than condence at $z=\infty$.

This paper describes author's latest research in the field of expansion by the sets of rational fractions with fixed poles.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О разложимости аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 1 (1957), 21—29.
2. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, М.—Л. (1955).
3. *G. Faber.* Über polynomische Entwicklungen, Math. Annalen, 57 (1903), 389—408, 64 (1907), 116—135.
4. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Известия АН Арм.ССР, 4, № 1, (1961), 9—31.
5. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 143, № 1 (1962), 17—20.
6. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, Москва (1961).
7. *T. Takenaka.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japanese Journal of Mathematics, 2 (1925), 129—145.
8. *E. Malmquist.* Sur la dètermination d'une classe de fonctions analytoque par leurs valeurs dans un ensemble donnè de points, Comptes rendus du sixième congrés (1925) des mathématiciens Scandinaves, Kopenhagen, 253—259.
9. *М. М. Джрбашян.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 9, № 7 (1956).
10. *М. М. Джрбашян.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности, Известия АН Арм.ССР, Математика, 1, № 1 (1966), 3—24.
11. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, Москва (1950).
12. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва (1952).