ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 6, 1966 Математика

И. С. САРГСЯН

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Введение

Пусть $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, определенные на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — вещественные, непрерывно дифференцируемые функции на той же полупрямой. Рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x)\,u_1=0, \tag{0.1}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0, \tag{0.2}$$

$$u_1(x, 0)=f_1(x),\ \ u_2(x,0)=f_2(x). \tag{0.3}$$

Система (0.1) — (0.2) является одномерным аналогом нестационарной системы Дирака в релятивистской квантовой теории.

Изучение асимптотического поведения спектральной функции и вопросов разложения по собственным функциям одномерной стационарной системы Дирака, т. е. задачи

$$\frac{dy_2}{dx}+p(x)\,y_1=\lambda y_1, \tag{0.4}$$

$$-\frac{dy_1}{dx}+r(x)\,y_2=\lambda y_2, \tag{0.5}$$

$$y_2(0)-hy_1(0)=0, \tag{0.6}$$

методами, аналогичными методам, разработанными Б. М. Левитаном [1] и В. А. Марченко [2[для уравнения Шредингера, основано на предварительном исследовании задачи (0.1) + (0.2) + (0.3).

В настоящей работе выводятся явные формулы для решения задачи (0.1) + (0.2) + (0.3). Эти формулы нами уже использованы при изучении асимптотического поведения спектральной функции и ее производных, а также вопросов разложения и суммирования дифференцированных разложений по собственным функциям задачи (0.4) + (0.5) + + (0.6); полученные в этом направлении результаты изложены в заметках автора [5—8].

Приведем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть функции $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют вышеуказанным требованиям. Тогда решение задачи* $(0.1)+(0.2)+(0.3)$ $u(x, t; f)=\begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t)\end{pmatrix}$ *дается формулами:*

I. *при* $0<t<x$

$$u_1(x,t)=k(x,t)\{f_1(x+t)+if_2(x+t)\}+l(x,t)\{f_1(x-t)-if_2(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K(x,t,s)f_1(s)+L(x,t,s)f_2(s)\}\,ds, \quad (0.7)$$

$$u_2(x,t)=k(x,t)\{f_2(x+t)-if_1(x+t)\}+l(x,t)\{f_2(x-t)+if_1(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M(x,t,s)f_1(s)+N(x,t,s)f_2(s)\}\,ds. \quad (0.8)$$

II. *при* $t<0$, $0<-t<x$

$$u_1(x,t)=k(x,t)\{f_1(x+t)+if_2(x+t)\}+l(x,t)\{f_1(x-t)-if_2(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{\tilde K(x,-t,s)f_1(s)+\tilde L(x,-t,s)f_2(s)\}\,ds, \quad (0.9)$$

$$u_2(x,t)=k(x,t)\{f_2(x+t)-if_1(x+t)\}+l(x,t)\{f_2(x-t)+if_1(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}\{\tilde M(x,-t,s)f_1(s)+\tilde N(x,-t,s)f_2(s)\}\,ds, \quad (0.10)$$

где положено

$$k(x,t)=\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int\limits_0^t[p(x+\tau)+r(x+\tau)]\,d\tau\right\},$$

$$l(x,t)=\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int\limits_0^t[p(x-\tau)+r(x-\tau)]\,d\tau\right\},$$

а функции $\{K(x,t,s),\ L(x,t,s)\}$ *и* $\{M(x,t,s),\ N(x,t,s)\}$ *удовлетворяют системе*

$$i\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial s}+p(s)K(x,t,s)=0, \quad (0.11)$$

$$i\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial K}{\partial s}+r(s)L(x,t,s)=0 \quad (0.12)$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$\left.\begin{aligned} K(x,t,x+t)+iL(x,t,x+t)&=\frac{1}{2}i\{p(x+t)-r(x+t)\}k(x,t),\\ K(x,t,x-t)-iL(x,t,x-t)&=\frac{1}{2}i\{p(x-t)-r(x-t)\}l(x,t),\end{aligned}\right| \quad (0.13)$$

$$\left.\begin{aligned} N(x,t,x+t)-iM(x,t,x+t)&=\frac{1}{2}\,i\{r(x+t)-p(x+t)\}\,k(x,t),\\ N(x,t,x-t)+iM(x,t,x-t)&=\frac{1}{2}\,i\{r(x-t)-p(x-t)\}\,l(x,t)\end{aligned}\right|. \tag{0.14}$$

Функции же $\{\tilde{K}(x,-t,s),\ \tilde{L}(x,-t,s)\}$ *и* $\{\tilde{M}(x,-t,s),\ \tilde{N}(x,-t,s)\}$ *удовлетворяют системе* (0.11) + (0.12) *и условиям на характеристиках, соответственно,* (0.14) *и* (0.13).

Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном как угодно, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — по формулам*

$$f_1(-x)=\alpha(x)f_1(x)+\beta(x)f_2(x)+\int_0^x\{P(x,s)f_1(s)+R(x,s)f_2(s)\}\,ds, \tag{0.15}$$

$$f_2(-x)=\alpha(x)f_2(x)-\beta(x)f_1(x)+\int_0^x\{Q(x,s)f_1(s)+H(x,s)f_2(s)\}\,ds, \tag{0.16}$$

где

$$\alpha(x)=\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x[p(\tau)+r(\tau)]\,d\tau\right\},$$

$$\beta(x)=-\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x[p(\tau)+r(\tau)]\,d\tau\right\},$$

а функции $P(x,s)$, $R(x,s)$, $Q(x,s)$ и $H(x,s)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} P'_x(x,s)+H'_s(x,s)&=\{r(x)-p(-s)\}\,Q(x,s),\\ H'_x(x,s)+P'_s(x,s)&=\{r(-s)-p(x)\}\,R(x,s),\\ Q'_x(x,s)-R'_s(x,s)&=\{p(-s)-p(x)\}\,P(x,s),\\ R'_x(x,s)-Q'_s(x,s)&=\{r(x)-r(-s)\}\,H(x,s)\end{aligned}$$

и условиям

$$\begin{aligned} H(x,x)-P(x,x)&=\alpha'(x)-\beta(x)\{p(-x)-r(x)\},\\ R(x,x)+Q(x,x)&=-\beta'(x)-\alpha(x)\{r(-x)-r(x)\},\end{aligned}$$

$$R(x,0)-hP(x,0)=0,\ H(x,0)-hQ(x,0)=0\ \left(h=\frac{f_2(0)}{f_1(0)}\right).$$

Если $f_1(0)=0$, то следует взять $h=0$.

---

* В совместной работе Б. М. Левитана и автора [4] показано, что это продолжение непрерывно вместе с производной первого порядка.

III. *при* $0<x<t$

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) - if_2(x+t)\} + l_1(x, t)\{f_1(t-x) -$$

$$- if_2(t-x)\} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x+t}\{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{t-x}\{K_1(x, t, s) f_1(s) + L_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \qquad (0.17)$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l_1(x, t)\{f_2(t-x) +$$

$$+ if_1(t-x)\} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x+t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{t-x}\{M_1(x, t, s) f_1(s) + N_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \qquad (0.18)$$

где

$$l_1(x, t) = \{\alpha(t-x) + i\beta(t-x)\}\, l(x, t),$$

а функции $K_1(x, t, s)$, $L_1(x, t, s)$, $M_1(x, t, s)$ *и* $N_1(x, t, s)$ *выражаются через функции* $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$, $N(x, t, s)$, $P(x, s)$, $R(x, s)$, $Q(x, s)$ *и* $H(x, s)$ *элементарно.*

Для полноты изложения в работе приведен полный текст вышеупомянутой совместной работы Б. М. Левитана и автора, что составляет часть параграфа 4.

Поясним в общих чертах сущность метода работы.

Сначала строится система интегральных уравнений, эквивалентная задаче (0.1) + (0.2) + (0.3). Интегральные уравнения оказываются уравнениями типа уравнения Вольтерра. Затем система интегральных уравнений решается методом последовательных приближений. Решения задаются формулами (0.7)—(0.8) и (0.9)—(0.10) при $0<t<x$ и $t<0$, $0<-t<x$ соответственно. Для построения решения при $0<x<t$ строится оператор преобразования, с помощью которого удается продолжить решения на отрицательную полуось с сохранением класса, т. е. непрерывно вместе с производными первого порядка. Тогда решение дается формулами (0.17)—(0.18).

В заключение искренне благодарю проф. Б. М. Левитана за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

§ 1. Вывод формулы для решения задачи Коши

В этом параграфе мы выведем формулу для решения задачи Коши

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x)\, u_1 = 0, \qquad (1.1)$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0, \tag{1.2}$$

$$u_1(x,t)|_{t=0}=f_1(x), \tag{1.3}$$

$$u_2(x,t)|_{t=0}=f_2(x). \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $r(x)$ определены на полупрямой $(0,\infty)$, вещественны и суммируемы в каждом конечном интервале, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ также определены на полупрямой $(0,\infty)$ и имеют непрерывные первые производные. Продолжим функции $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном, как угодно.

Сначала рассмотрим задачу (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) при $p(x)=$ $=r(x)=0$. Тогда мы имеем

$$i\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t}+\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}=0, \tag{1.5}$$

$$i\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}-\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}=0, \tag{1.6}$$

$$u_1^{(0)}(x,t)|_{t=0}=f_1(x), \tag{1.7}$$

$$u_2^{(0)}(x,t)|_{t=0}=f_2(x). \tag{1.8}$$

Задача (1.5) + (1.6) + (1.7) + (1.8) эквивалентна двум независимым задачам относительно функций $u_1^{(0)}(x,t)$ и $u_2^{(0)}(x,t)$. В самом деле, дифференцируя уравнение (1.5) по x, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-i\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t}\right)=-i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}\right).$$

Подставляя сюда значение $\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}$ из уравнения (1.6), получим

$$\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x^2}=-i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

Далее, из уравнения (1.6) и условия (1.7) следует

$$i\left.\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}\right|_{t=0}=f_1'(x). \tag{1.10}$$

Значит, в силу (1.9), (1.8) и (1.10), для функции $u_2^{(0)}(x,t)$ получаем следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x^2}, \tag{1.11}$$

$$u_2^{(0)}(x,t)|_{t=0}=f_2(x), \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=-if_1'(x). \tag{1.13}$$

Решение задачи (1.11) + (1.12) + (1.13) дается формулой Даламбера

$$u_2^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} - \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x+t} f_1'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} - \frac{1}{2} i \{f_1(x+t) - f_1(x-t)\}. \qquad (1.14)$$

Поступая аналогичным образом, т. е. дифференцируя (1.6) по x и подставляя в полученное уравнение значение $\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}$ из уравнения (1.5), для функции $u_1^{(0)}(x, t)$ находим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(i \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}\right) = i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial t^2}. \qquad (1.15)$$

Далее, из уравнения (1.5), в силу (1.8), находим условие

$$i \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = - \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}\bigg|_{t=0} = - f_2'(x). \qquad (1.16)$$

Поэтому уравнение (1.15) совместно с условиями (1.7) и (1.16) для функции $u_1^{(0)}(x, t)$ определяют следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x^2},$$

$$u_1^{(0)}(x, t)\big|_{t=0} = f_1(x),$$

$$\frac{\partial u_1^{(0)}(x, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = i f_2'(x).$$

Применяя формулу Даламбера, получаем

$$u_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x+t} f_2'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_2(x+t) - f_2(x-t)\}. \qquad (1.17)$$

Итак, доказано, что решение задачи (1.5) + (1.6) + (1.7) + (1.8) даются по формулам (1.17) и (1.14), т. е.

$$u_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_2(x+t) - f_2(x-t)\}, \qquad (1.18\text{а})$$

$$u_2^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_1(x+t) - f_1(x-t)\}. \qquad (1.18\text{в})$$

Рассмотрим теперь неоднородную систему с однородными начальными условиями

$$i \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} = F_1(x, t), \qquad (1.18)$$

$$i\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = F_2(x, t), \tag{1.19}$$

$$\bar{u}_1(x, t)|_{t=0} = 0, \tag{1.20}$$

$$\bar{u}_2(x, t)|_{t=0} = 0. \tag{1.20'}$$

Составим задачи Коши для функций $\bar{u}_1(x, t)$ и $\bar{u}_2(x, t)$ независимо друг от друга. С этой целью дифференцируем уравнение (1.18) по t, а уравнение (1.19) по x. Имеем

$$i\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t}\right) + \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t}. \tag{1.21}$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x}. \tag{1.22}$$

Из уравнений (1.21) и (1.22) относительно функции $\bar{u}_1(x, t)$ получаем следующее окончательное уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} = -i\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x}. \tag{1.23}$$

Далее, из уравнения (1.18) и начального условия (1.20′) следует

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t}\right|_{t=0} = -i\left.\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}\right|_{t=} - iF_1(x, t)\Big|_{t=0} = -iF_1(x, 0). \tag{1.24}$$

Поэтому уравнение (1.23) совместно с начальными условиями (1.20) и (1.24) для функции $\bar{u}_1(x, t)$ определяют следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} = -i\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x},$$

$$\bar{u}_1(x, t)|_{t=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_1(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -iF_1(x, 0).$$

Решение этой задачи дается формулой (см. [3], стр. 158):

$$\bar{u}_1(x, t) = -\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x+t} F_1(y, 0)\,dy + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\left\{\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left[-i\frac{\partial F_1(y, \tau)}{\partial \tau} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial F_2(y, \tau)}{\partial y}\right]dy\right\}. \tag{1.25}$$

Составим теперь задачу Коши для функции $\bar{u}_2(x, t)$. Аналогично предыдущему, дифференцируем уравнение (1.19) по t, а уравнение (1.18) по x. Тогда

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t}, \\ i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}. \end{aligned}\right| \tag{1.26}$$

Равенства (1.26) для функции $\tilde{u}_2(x, t)$ определяют уравнение

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial x^2} = -i\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}. \tag{1.27}$$

Далее, из уравнения (1.19) и начального условия (1.20) следует

$$\left.\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t}\right|_{t=0} = -i\left.\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x}\right|_{t=0} - iF_2(x,t)\Big|_{t=0} = -iF_2(x,0). \tag{1.28}$$

Тогда уравнение (1.27) совместно с начальными условиями (1.20) и (1.28) для функции $\tilde{u}_2(x, t)$ определяют следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial x^2} = -i\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x},$$

$$\tilde{u}_2(x,t)/_{t=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -iF_2(x,0).$$

Решение этой задачи дается формулой

$$\tilde{u}_2(x,t) = -\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x+t} F_2(y,0)\,dy - \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left[i\frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial y}\right] dy. \tag{1.29}$$

Преобразуем теперь формулы (1.25) и (1.29). Сначала преобразуем второй интеграл формулы (1.25). Имеем

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left[-i\frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial\tau} + \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial y}\right] dy =$$

$$= -\frac{1}{2}i\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial\tau}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial y}\,dy = J_1 + J_2. \tag{1.30}$$

Непосредственным интегрированием для J_2 получим

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_0^t \{F_2(x+t-\tau, \tau) - F_2(x-t+\tau, \tau)\}\, d\tau. \tag{1.31}$$

Меняя порядок интегрирования в J_1 и интегрируя, находим

$$J_1 = -\frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} dy \int_0^{y-(x-t)} \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau - \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} dy \int_0^{x+t-y} \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} F_1(y, y-x+t)\, dy + \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} F_1(y, 0)\, dy - \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} F_1(y, x+t-$$

$$-y)\, dy + \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} F_1(y, 0)\, dy = \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x+t} F_1(y, 0)\, dy - \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} F_1(y, y-x+$$

$$+t)\, dy - \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} F_1(y, x+t-y)\, dy. \tag{1.32}$$

В силу (1.30), (1.31) и (1.32) формула (1.25) принимает вид

$$\bar{u}_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \{F_2(x+t-\tau, \tau) - F_2(x-t+\tau, \tau)\}\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} F_1(y, y-x-t)\, dy - \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} F_1(y, x+t-y)\, dy. \tag{1.33}$$

Преобразуем теперь формулу (1.29). Сначала преобразуем второй интеграл этой формулы, т. е. интеграл

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left[i \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial y} \right] dy = I_1 + I_2. \tag{1.34}$$

Меняя порядок интегрирования, а затем интегрируя, получим

$$I_1 = -\frac{1}{2} i \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial \tau}\, dy = -\frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} dy \int_0^{y-(x-t)} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} i \int_x^{x+t} dy \int_0^{x+t-y} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau = -\frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} F_2(y, y-x+t)\, dy +$$

$$+\frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} F_2(y, 0)\, dy - \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} F_2(y, x+t-y)\, dy + \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} F_2(y, 0)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x+t} F_2(y, 0)\, dy - \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} F_2(y, y-x+t)\, dy - \frac{1}{2} i \int_x^{x+t} F_2(y, x+t-y)\, dy.$$

$$\tag{1.35}$$

Непосредственным интегрированием для I_2 получим

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int_0^t \{F_1(x+t-\tau,\tau) - F_1(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau. \tag{1.36}$$

В силу равенств (1.34), (1.35) и (1.36) формула (1.29) примет вид

$$\tilde{u}_2(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \{F_1(x+t-\tau,\tau) - F_1(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x} F_2(y,y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int_{x}^{x+t} F_2(y,-y+x+t)\,dy. \tag{1.37}$$

Итак, доказано, что решения задачи (1.18)+(1.19)+(1.20)+(1.20′) даются формулами (1.33) и (1.37), т. е.

$$\tilde{u}_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \{F_2(x+t-\tau,\tau) - F_2(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x} F_1(y,y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int_{x}^{x+t} F_1(y,-y+x-t)\,dy, \tag{1.38^a}$$

$$\tilde{u}_2(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \{F_1(x-t+\tau,\tau) - F_1(x+t-\tau,\tau)\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x} F_2(y,y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int_{x}^{x+t} F_2(y,-y+x+t)\,dy. \tag{1.38^b}$$

Вернемся теперь к задаче (1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4). Перепишем ее в следующем виде:

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = -p(x)\,u_1(x,t),$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = -r(x)\,u_2(x,t),$$

$$u_1(x,t)|_{t=0} = f_1(x),$$

$$u_2(x,t)|_{t=0} = f_2(x).$$

Положим

$$F_1(x,t) = -p(x)\,u_1(x,t), \tag{1.38}$$

$$F_2(x,t) = -r(x)\,u_2(x,t). \tag{1.38′}$$

Считая функции $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$ в равенствах (1.38) и (1.38′) известными и учитывая линейность системы (1.1)+(1.2), нетрудно убедиться, что решения задачи (1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4) $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задаются формулами

$$u_1(x, t) = u_1^{(0)}(x, t) + \tilde{u}_1(x, t),$$

$$u_2(x, t) = u_2^{(0)}(x, t) + \tilde{u}_2(x, t),$$

где $u^{(0)}(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^{(0)}(x, t) \\ u_2^{(0)}(x, t) \end{pmatrix}$ и $\tilde{u}(x, t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(x, t) \\ \tilde{u}_2(x, t) \end{pmatrix}$, соответственно, являются решениями задач (1.5)+(1.6) + (1.7) + (1.8) и (1.18) + (1.19) + +(1.20) + (1.20′). Поэтому, в силу формул (1.18ª), (1.18ᵇ), (1.38) и (1.38′), для решения задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) получим формулы

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_2(x+t) - f_2(x-t)\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \{r(x+t-\tau)\, u_2(x+t-\tau, \tau) - r(x-t+\tau)\, u_2(x-t+\tau, \tau)\}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} p(\tau)\, u_1(\tau, \tau - x + t)\, d\tau + \frac{1}{2} i \int_{x}^{x+t} p(\tau)\, u_1(\tau, x + t - \tau)\, d\tau, \tag{1.39}$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} - \frac{1}{2} i \{f_1(x+t) - f_1(x-t)\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \{p(x+t-\tau)\, u_1(x+t-\tau, \tau) - p(x-t+\tau)\, u_1(x-t+\tau, \tau)\}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} r(\tau)\, u_2(\tau, \tau - x + t)\, d\tau + \frac{1}{2} i \int_{x}^{x+t} r(\tau)\, u_2(\tau, x + t - \tau)\, d\tau. \tag{1.40}$$

Таким образом, для решения задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) мы построили эквивалентную ей систему интегральных уравнений (1.39) + (1.40). Эти уравнения являются уравнениями типа Вольтерра и поэтому могут быть решены методом последовательных приближений. Сначала приведем их к более удобному для исследования виду. Заменяя переменную в первых интегралах, мы находим

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_2(x+t) - f_2(x-t)\} +$$

$$+ \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} p(s)\, u_1(s, s - x + t)\, ds + \frac{1}{2} i \int_{x}^{x+t} p(s)\, u_1(s, x + t - s)\, ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} r(s)\, u_2(s, s - x + t)\, ds + \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} r(s)\, u_2(s, x + t - s)\, ds, \tag{1.39′}$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} - \frac{1}{2} i \{f_1(x+t) - f_1(x-t)\} +$$

$$+\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,u_2(s, s-x+t)\,ds+\frac{1}{2}i\int\limits_{x}^{x+t} r(s)\,u_2(s, x+t-s)\,ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} p(s)\,u_1(s, s-x+t)\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} p(s)\,u_1(s, x+t-s)\,ds. \quad (1.40')$$

Пусть функции $u_1^{(0)}(x, t)$ и $u_2^{(0)}(x, t)$ определяются по формулам

$$u_1^{(0)}(x, t)=\frac{1}{2}\{f_1(x+t)+f_1(x-t)\}+\frac{1}{2}i\{f_2(x+t)-f_2(x-t)\}, \quad (1.41)$$

$$u_2^{(0)}(x, t)=\frac{1}{2}\{f_2(x+t)+f_2(x-t)\}-\frac{1}{2}i\{f_1(x+t)-f_1(x-t)\}. \quad (1.42)$$

При $p\geqslant 1$ $(p=1, 2, 3,\cdots)$ положим

$$u_1^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} p(s)\,u_1^{(p-1)}(s, s-x+t)\,ds+\frac{1}{2}i\int\limits_{x}^{x+t} p(s)\,u_1^{(p-1)}(s, x+$$

$$+t-s)\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)u_2^{(p-1)}(s, s-x+t)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} r(s)u_2^{(p-1)}(s, s-x+t)\,ds, \quad (1.43)$$

$$u_2^{(p)}(x, t)=\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,u_2^{(p-1)}(s, s-x+t)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}i\int\limits_{x}^{x+t} r(s)\,u_2^{(p-1)}(s, x+t-s)\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} p(s)u_1^{(p-1)}(s, s-x+t)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} p(s)\,u_1^{(p-1)}(s, x+t-s)\,ds. \quad (1.44)$$

Тогда из равномерной сходимости последовательных приближений, доказательство которой мы опускаем, считая его общеизвестным, следует, что решение системы интегральных уравнений (1.39′)+(1.40′) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются равенствами

$$u_1(x, t)=u_1^{(0)}(x, t)+u_1^{(1)}(x, t)+u_1^{(2)}(x, t)+\cdots \quad (1.45)$$

$$u_2(x, t)=u_2^{(0)}(x, t)+u_2^{(1)}(x, t)+u_2^{(2)}(x, t)+\cdots. \quad (1.46)$$

Покажем, что каждую из функций $u_1^{(p)}(x, t)$ и $u_2^{(p)}(x, t)$, $p=1, 2, \cdots$, можно представить в виде

$$u_1^{(p)}(x, t)=k_1^{(p)}(x, t)\,f_1(x+t)+l_1^{(p)}(x, t)\,f_1(x-t)+m_1^{(p)}(x, t)\,f_2(x+t)+$$

$$+n_1^{(p)}(x, t)\,f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K_p(x, t, s)\,f_1(s)+L_p(x, t, s)\,f_2(s)\}\,ds, \quad (1.47)$$

$$u_2^{(p)}(x,t)=k_2^{(p)}(x,t)f_1(x+t)+l_2^{(p)}(x,t)\,f_1(x-t)+m_2^{(p)}(x,t)\,f_2(x+t)+$$
$$+\,n_2^{(p)}(x,t)\,f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M_p(x,t,s)\,f_1(s)+N_p(x,t,s)\,f_2(s)\}\,ds. \quad (1.48)$$

Положим

$$J_1^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,u_1^{(p-1)}(s,s-x+t)\,ds, \quad (1.49)$$

$$J_2^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)\,u_1^{(p-1)}(s,x+t-s)\,ds, \quad (1.50)$$

$$J_3^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}r(s)\,u_2^{(p-1)}(s,s-x+t)\,ds, \quad (1.51)$$

$$J_4^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}r(s)\,u_2^{(p-1)}(s,x+t-s)\,ds. \quad (1.52)$$

Тогда равенства (1.43) и (1.44) можно переписать в виде

$$u_1^{(p)}(x,t)=iJ_1^{(p)}(x,t)+iJ_2^{(p)}(x,t)-J_3^{(p)}(x,t)+J_4^{(p)}(x,t), \quad (1.53)$$

$$u_2^{(p)}(x,t)=-J_1^{(p)}(x,t)+J_2^{(p)}(x,t)+iJ_3^{(p)}(x,t)+iJ_4^{(p)}(x,t). \quad (1.54)$$

Докажем теперь формулы (1.47) и (1.48). При $p=1$ из (1.49) и (1.41) следует

$$J_1^{(1)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\left\{\frac{1}{2}[f_1(2s-x+t)+f_1(x-t)]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,i[f_2(2s-x+t)-f_2(x-t)]\right\}ds=f_1(x-t)\times$$
$$\times\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,ds-f_2(x-t)\cdot\frac{1}{4}\,i\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,ds+$$
$$+\frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t}p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]f_1(s)\,ds+\frac{1}{8}\,i\int\limits_{x-t}^{x+t}p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]f_2(s)\,ds. \quad (1.55)$$

Из равенств (1.50) и (1.41) получаем

$$J_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)\left\{\frac{1}{2}[f_1(x+t)+f_1(2s-x-t)]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,i[f_2(x+t)-f_2(2s-x-t)]\right\}ds=f_1(x+t)\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)\,ds+$$

$$+ f_2(x+t)\cdot\frac{1}{4}i\int\limits_x^{x+t} p(s)\,ds + \frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t} p\left[\frac{1}{2}(x+t-s)\right] f_1(s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{8}i\int\limits_{x-t}^{x+t} p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right] f_2(s)\,ds. \qquad (1.56)$$

Далее, из (1.51) и (1.42) мы имеем

$$J_3^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\left\{\frac{1}{2}[f_2(2s-x+t)+f_2(x-t)] - \frac{1}{2}i[f_1(2s-\right.$$

$$\left.-x+t)-f_1(x-t)]\right\} ds = f_2(x-t)\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,ds + f_1(x-t)\times$$

$$\times\frac{1}{4}i\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,ds + \frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right] f_2(s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{8}i\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right] f_1(s)\,ds. \qquad (1.57)$$

И, наконец, из равенств (1.52) и (1.42) следует

$$J_4^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} r(s)\left\{\frac{1}{2}[f_2(x+t)+f_2(2s-x-t)] - \frac{1}{2}i[f_1(x+t)-\right.$$

$$\left.-f_1(2s-x-t)]\right\} ds = f_2(x+t)\cdot\frac{1}{4}\int\limits_x^{x+t} r(s)\,ds - f_1(x+t)\times$$

$$\times\frac{1}{4}i\int\limits_x^{x+t} r(s)\,ds + \frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right] f_2(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{8}i\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right] f_1(s)\,ds, \qquad (1.58)$$

Положим

$$k_1^{(1)}(x,t) = \frac{1}{4}i\int\limits_x^{x+t}[p(s)-r(s)]\,ds, \qquad (1.59)$$

$$l_1^{(1)}(x,t) = \frac{1}{4}i\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)-r(s)]\,ds, \qquad (1.60)$$

$$m_1^{(1)}(x,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_x^{x+t}[p(s)-r(s)]\,ds, \qquad (1.61)$$

$$n_1^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)-r(s)]\,ds, \tag{1.62}$$

$$K_1(x,t,s)=\frac{1}{4}i\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]+p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]+\right.$$
$$\left.+r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]+r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}, \tag{1.63}$$

$$L_1(x,t,s)=\frac{1}{4}\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]+\right.$$
$$\left.+r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}. \tag{1.64}$$

Тогда формула (1.47) при $p=1$ следует из (1.53) в силу равенств (1.55)—(1.58) и (1.59)—(1.64).

Далее, полагая

$$k_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{x+t}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.65}$$

$$l_2^{(1)}(x,t)=-\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.66}$$

$$m_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}i\int\limits_{x}^{x+t}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.67}$$

$$n_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}i\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.68}$$

$$M_1(x,t,s)=\frac{1}{4}\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]+\right.$$
$$\left.+r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}, \tag{1.69}$$

$$N_1(x,t,s)=-\frac{1}{4}i\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]+p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]-\right.$$
$$\left.-r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}, \tag{1.70}$$

мы получим формулу (1.48) при $p=1$, в силу равенств (1.54)—(1.58).

Допустим теперь, что для $p=1,2,\cdots,q-1$ формулы (1.47) и (1.48) уже доказаны. Докажем их для $p=q$. Полагая в (1.47) $p=q-1$ и подставляя выражение для $u_1^{(q-1)}(x,t)$ в (1.49), получим

$$J_1^{(q)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,\{k_1^{(q-1)}(s,s-x+t)\,f_1(2s-x+t)+$$

$$+ l_1^{(q-1)}(s, s-x+t) f_1(x-t)\} ds + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\{m_1^{(q-1)}(s, s-x+$$

$$+t) f_2(2s-x+t) + n_1^{(q-1)}(s, s-x+t) f_2(x-t)\} ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{2s-x+t} K_{q-1}(s, s-x+t, z) f_1(z)\, dz +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{2s-x+t} L_{q-1}(s, s-x+t, z) f_2(z)\, dz\right\} ds.$$

Заменяя переменную в первых двух интегралах и изменяя порядок интегрирования в последнем интеграле так, чтобы внешний интеграл брался по z, $f_1^{(q)}(x, t)$ приведем к виду

$$f_1^{(q)}(x, t) = f_1(x-t)\cdot\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\, l_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds - f_2(x-t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\, n_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds + \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t} p\left[\frac{1}{2}(x-t+\right.$$

$$\left.+s)\right]\left\{k_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) f_1(s) + m_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{s-x+t}{2}\right) f_2(s)\right\} ds + \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}\left\{\int_{x-t}^{\frac{1}{2}(z+x-t)} p(s) K_{q-1}(s, s-x+t, z)\, ds\right\} f_1(z)\, dz +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}\left\{\int_{x-t}^{\frac{1}{2}(z+x-t)} p(s) L_{q-1}(s, s-x+t, z)\, ds\right\} f_2(z)\, dz. \tag{1.71}$$

Из равенств (1.47) и (1.50) при $p = q$ следует

$$f_2^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} p(s)\{k_1^{(q-1)}(s, x+t-s) f_1(x+t) + l_1^{(q-1)}(s, x+t-$$

$$-s) f_1(2s-x-t)\} ds + \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} p(s)\{m_1^{(q-1)}(s, x+t-s) f_2(x+t) +$$

$$+ n_1^{(q-1)}(s, x+t-s) f_2(2s-x-t)\} ds + \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} p(s)\left\{\frac{1}{2}\int_{2s-x-t}^{x+t} K_{q-1}(s, x+t-\right.$$

$$\left.-s, z) f_1(z)\, dz + \frac{1}{2}\int_{2s-x-t}^{x+t} L_{q-1}(s, x+t-s, z) f_2(z)\, dz\right\} ds.$$

Заменяя переменную в первых двух интегралах и изменяя порядок интегрирования в третьем интеграле, получим

$$J_2^{(q)}(x, t) = f_1(x+t)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} p(s)\,k_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\,ds + f_2(x+t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} p(z)\,m_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\,ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t} p\left(\frac{x+t+s}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{l_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)f_1(s) + n_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{x+t-s}{2}\right)f_2(s)\right\}ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_x^{\frac{1}{2}(x+t+z)} p(s)\,K_{q-1}(s, x+t-s, z)\,ds\right\}f_1(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_x^{\frac{1}{2}(x+t+z)} p(s)\,L_{q-1}(s, x+t-s, z)\,ds\right\}f_2(z)\,dz. \qquad (1.72)$$

Поступая аналогичным образом, из равенств (1.47), (1.51) и (1.52) для $J_3^{(q)}(x, t)$ и $J_4^{(q)}(x, t)$ получим следующие представления:

$$J_3^{(q)}(x, t) = f_1(x-t)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,l_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\,ds + f_2(x-t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,n_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\,ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left(\frac{x-t+s}{2}\right)\left\{k_2^{(q-1)}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)f_1(s) + m_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)\times$$

$$\left.\times f_2(s)\right\}ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+z)} r(s)\,M_{q-1}(s, s-x+t, z)\,ds\right\}f_1(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+z)} r(s)\,N_{q-1}(s, s-x+t, z)\,ds\right\}f_2(z)\,dz, \qquad (1.73)$$

$$J_4^{(q)}(x, t) = f_1(x+t)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} r(s)\,k_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\,ds + f_2(x+t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} r(s)\,m_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\,ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left(\frac{x+t+s}{2}\right)\left\{l_2^{(q-1)}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right) f_1(s) + n_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\times$$

$$\times f_2(s)\Big\} ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big\{\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+z)} r(s) M_{q-1}(s, x+t-s, z)\, ds\Big\} f_1(s)\, ds +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big\{\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+z)} r(s) N_{q-1}(s, x+t-s, z)\, ds\Big\} f_2(z)\, dz. \tag{1.74}$$

Теперь положим

$$k_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2} i \int\limits_{x}^{x+t} p(s) k_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} r(s) k_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds, \tag{1.75}$$

$$l_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x} p(s) l_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s) l_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds, \tag{1.76}$$

$$m_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2} i \int\limits_{x}^{x+t} p(s) m_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} r(s) m_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds, \tag{1.77}$$

$$n_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x} p(s) n_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s) n_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds, \tag{1.78}$$

$$K_q(x, t, s) = \frac{1}{2} i \Big\{ p\left(\frac{x-t+s}{2}\right) k_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) +$$

$$+ p\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\Big\} -$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{ r\left(\frac{x-t+s}{2}\right) k_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) -$$

$$- r\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)}\{ip(z)K_{q-1}(z,z-x+t,s)-r(z)M_{q-1}(z,z-x+t,s)\}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)}\{ip(z)K_{q-1}(z,x+t-z,s)+r(z)M_{q-1}(z,x+t-z,s)\}\,dz,$$

(1.79)

$$L_q(x,t,s)=\frac{1}{2}\,i\left\{p\left(\frac{x-t+s}{2}\right)m_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2},\frac{s-x+t}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+p\left(\frac{x+t+s}{2}\right)n_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2},\frac{x+t-s}{2}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\left\{r\left(\frac{x-t+s}{2}\right)m_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2},\frac{s-x+t}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-r\left(\frac{x+t+s}{2}\right)n_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2},\frac{x+t-s}{2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)}\{ip(z)L_{q-1}(z,z-x+t,s)-r(z)N_{q-1}(z,z-x+t,s)\}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)}\{ip(z)L_{q-1}(z,x+t-z,s)+r(z)N_{q-1}(z,x+t-z,s)\}\,dz. \quad (1.80)$$

Подставляя значения для функций $f_i^{(q)}(x,t)$, $i=1,2,3,4$, из равенств (1.71)—(1.74) в равенство (1.53), в силу обозначений (1.75)—(1.80), получим формулу (1.47) при $p=q$. Таким образом, формула (1.47) доказана при любом p $(p=1,2,\cdots)$.

Далее положим

$$k_2^{(q)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)\,k_1^{(q-1)}(s,x+t-s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\,i\int\limits_{x}^{x+t}r(s)\,k_2^{(q-1)}(s,x+t-s)\,ds, \quad (1.81)$$

$$l_2^{(q)}(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,l_1^{(q-1)}(s,s-x+t)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\,i\int\limits_{x-t}^{x}r(s)\,l_2^{(q-1)}(s,s-x+t)\,ds, \quad (1.82)$$

$$m_2^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} p(s)\, m_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} i \int\limits_x^{x+t} r(s)\, m_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds, \tag{1.83}$$

$$n_2^{(q)}(x, t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} p(s) n_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x} r(s)\, n_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds, \tag{1.84}$$

$$M_q(x, t, s) = \frac{1}{2}\left\{-p\left(\frac{x-t+s}{2}\right) k_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x+t+s}{2}\right) k_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{p\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)} \{-p(z) K_{q-1}(z, z-x+t, s) + ir(z) M_{q-1}(z, z-x+t, s)\}\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)} \{p(z) K_{q-1}(z, x+t-z, s) + ir(z) M_{q-1}(z, x+t-z, s)\}\, dz, \tag{1.85}$$

$$N_q(x, t, s) = \frac{1}{2}\left\{-p\left(\frac{x-t+s}{2}\right) m_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x-t+s}{2}\right) m_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{p\left(\frac{x+t+s}{2}\right) n_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x+t+s}{2}\right) n_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)} \{-p(z) L_{q-1}(z, z-x+t, s) + ir(z) N_{q-1}(z, z-x+t, s)\}\, dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)}\{p(z)\,L_{q-1}(z,x+t-z,s)+ir(z)\,N_{q-1}(z,x+t-z,s)\}\,dz. \tag{1.86}$$

Подставляя значения функций $f_i^{(q)}(x, t)$, $i=1, 2, 3, 4$, из равенств (1.71)—(1.74) в равенство (1.54) и учитывая обозначения (1.81)—(1.86), мы получим формулу (1.48) при $p=q$. Следовательно, формула (1.48) доказана при любом p $(p=1, 2,\cdots)$.

Из равенств (1.45) и (1.46), в силу формул (1.41), (1.42), (1.47) и (1.48), следует, что решение задачи (1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4) задается формулами

$$\begin{aligned}u_1(x,t)=&\frac{1}{2}\{f_1(x+t)+f_1(x-t)\}+\frac{1}{2}i\{f_2(x+t)-f_2(x-t)\}+\\&+k_1(x,t)f_1(x+t)+l_1(x,t)f_1(x-t)+m_1(x,t)f_2(x+t)+\\&+n_1(x,t)f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K(x,t,s)f_1(s)+L(x,t,s)f_2(s)\}\,ds,\end{aligned} \tag{1.87}$$

$$\begin{aligned}u_2(x,t)=&\frac{1}{2}\{f_2(x+t)+f_2(x-t)\}-\frac{1}{2}i\{f_1(x+t)-f_1(x-t)\}+\\&+k_2(x,t)f_1(x+t)+l_2(x,t)f_1(x-t)+m_2(x,t)f_2(x+t)+\\&+n_2(x,t)f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M(x,t,s)f_1(s)+N(x,t,s)f_2(s)\}\,ds,\end{aligned} \tag{1.88}$$

где

$$k_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}k_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.89}$$

$$l_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}l_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.90}$$

$$m_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}m_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.91}$$

$$n_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}n_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.92}$$

$$K(x,t,s)=\sum_{p=1}^{\infty}K_p(x,t,s), \tag{1.93}$$

$$L(x,t,s)=\sum_{p=1}^{\infty}L_p(x,t,s), \tag{1.94}$$

$$M(x,t,s)=\sum_{p=1}^{\infty}M_p(x,t,s), \tag{1.95}$$

$$N(x,t,s) = \sum_{p=1}^{\infty} N_p(x,t,s). \tag{1.96}$$

Равномерная сходимость рядов (1.89) — (1.96) следует из равномерной сходимости последовательных приближений, т. е. из равномерной сходимости рядов (1.45) и (1.46).

Отметим некоторые свойства функций $k_j(x,t)$, $l_j(x,t)$, $m_j(x,t)$ и $n_j(x,t)$, которые позволят упростить формулы (1.87) и (1.88). Из равенств (1.59)—(1.62) следует, что

$$m_1^{(1)}(x,t) = i\,k_1^{(1)}(x,t). \tag{1.97}$$

$$l_1^{(1)}(x,t) = i\,n_1^{(1)}(x,t). \tag{1.98}$$

Соответственно, из равенств (1.65)—(1.68) получим

$$m_2^{(1)}(x,t) = ik_2^{(1)}(x,t), \tag{1.99}$$

$$l_2^{(1)}(x,t) = i\,n_2^{(1)}(x,t). \tag{1.100}$$

Покажем, что равенства (1.97)—(1.100) справедливы и для функций $k_j^{(p)}(x,t)$, $l_j^{(p)}(x,t)$, $m_j^{(p)}(x,t)$ и $n_j^{(p)}(x,t)$ $(j=1, 2)$ при любом p, т. е. справедливы равенства

$$m_j^{(p)}(x,t) = ik_j^{(p)}(x,t) \quad (j=1, 2;\ p=1, 2, \cdots), \tag{1.101}$$

$$l_j^{(p)}(x,t) = in_j^{(p)}(x,t) \quad (j=1, 2;\ p=1, 2, \cdots). \tag{1.102}$$

Действительно, допустим, что для $p=1, 2, \cdots, q-1$ равенства (1.101) и (1.102) уже доказаны и докажем их справедливость при $p=q$. Равенство (1.101) при $p=q$ для $j=1$ следует из (1.75) и (1.77), а для $j=2$ — из равенств (1.81) и (1.83). Соответственно, равенство (1.102) при $p=q$ для $j=1$ следует из равенств (1.76) и (1.78), а для $j=2$— из (1.82) и (1.84).

Тогда, учитывая определения функций $k_j(x,t)$, $l_j(x,t)$, $m_j(x,t)$ и $n_j(x,t)$, $j=1, 2$, т. е. равенства (1.89)—(1.92), в силу (1.101) и —(1.102), заключаем, что

$$m_j(x,t) = ik_j(x,t), \tag{1.103}$$

$$l_j(x,t) = in_j(x,t) \quad (j=1, 2). \tag{1.104}$$

Отметим еще одно свойство функций $k_j(x,t)$, $l_j(x,t)$, $m_j(x,t)$ и $n_j(x,t)$, $j=1, 2$. Из (1.59)—(1.62), (1.65)—(1.68), (1.75)—(1.78) и (1.81)—(1.84) непосредственно следует, что при любом p имеют место следующие равенства

$$k_j^{(p)}(x,0) = l_j^{(p)}(x,0) = m_j^{(p)}(x,0) = n_j^{(p)}(x,0) = 0, \ j=1, 2.$$

Поэтому, в силу (1.89)—(1.92),

$$k_j(x,0) = l_j(x,0) = m_j(x,0) = n_j(x,0) = 0, \ j=1, 2. \tag{1.105}$$

Далее положим

$$k(x,t) = \frac{1}{2} + k_1(x,t), \tag{1.106}$$

$$l(x, t) = \frac{1}{2} + l_1(x, t), \tag{1.107}$$

$$m(x, t) = \frac{1}{2} + m_2(x, t), \tag{1.108}$$

$$n(x, t) = \frac{1}{2} + n_2(x, t). \tag{1.109}$$

Тогда, в силу (1.105), имеем

$$k(x, 0) = l(x, 0) = m(x, 0) = n(x, 0) = \frac{1}{2}. \tag{1.110}$$

Учитывая равенства (1.103)—(1.104) и обозначения (1.106)—(1.109), решение задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4), т. е. формулы (1.87) и (1.88), можно представить в виде

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) - \\ - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{1.111}$$

$$u_2(x, t) = m(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + n(x, t)\{f_2(x-t) + \\ + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\}\, ds. \tag{1.112}$$

§ 2. Сведение к задаче Гурса

Рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x) u_1 = 0, \tag{2.1}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} + r(x) u_2 = 0, \tag{2.2}$$

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_2(x, 0) = f_2(x). \tag{2.3}$$

Пусть решение этой задачи дается формулами (1.111) и (1.112) Выясним каким условиям должны удовлетворять функции $k(x, t)$, $l(x, t)$, $m(x, t)$, $n(x, t)$, $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$, чтобы функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, определенные формулами (1.111) и (1.112), давали решение задачи (2.1) + (2.2) + (2.3). В настоящем параграфе будет показано, что для функций $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ получаются задачи Гурса, а функции $k(x, t)$, $l(x, t)$, $m(x, t)$ и $n(x, t)$ удается явно вычислить, притом

$$m(x, t) \equiv k(x, t); \quad n(x, t) \equiv l(x, t).$$

Из формул (1.111) и (1.112) следует, что, в силу равенств (1.110), начальные условия (2.3) выполняются автоматически.

Обозначим через $u(x, t; f)$ решение задачи (2.1) + (2.2) + (2.3), и пусть нам уже известно, что вектор—функция $u(x, t; f) = \begin{pmatrix} u_1(x, t; f) \\ u_2(x, t; f) \end{pmatrix}$ представляется по формулам (1.111) — (1.112). Обозначим через T_t следующую матрицу второго порядка:

$$T^t \equiv \begin{pmatrix} -i\dfrac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -i\dfrac{d}{dt} \end{pmatrix},$$

а через B_x матрицу

$$B_x \equiv \begin{pmatrix} p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(x) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что

$$B_x u(x, t; f) = u(x, t; B_x f).$$

В самом деле, нетрудно убедиться, что левая и правая части этого равенства удовлетворяют одной и той же задаче Коши

$$B_x v = T_t v,$$

$$v|_{t=0} = B_x f.$$

Поэтому требуемое равенство следует из единственности решения задачи Коши.

Таким образом, систему (2.1) можно записать в виде

$$T_t u = u(x, t; B_x f). \tag{2.4}$$

В левой и правой частях уравнения (2.4) стоят двухкомпонентные векторы, поэтому это уравнение равносильно системе двух уравнений, соединяющих соответствующие компоненты этих векторов.

Теперь, используя формулы (1.111) и (1.112), найдем компоненты правой и левой частей уравнения (2.4). Для нахождения первой компоненты левой части дифференцируем формулу (1.111) по t и умножаем на $-i$ (см. определение матрицы T_t). Имеем

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial u_1(x, t; f)}{\partial t} = &-i\left\{k_t'(x, t) + \frac{1}{2}K(x, t, x+t)\right\}f_1(x+t) - \\ &- ik(x, t)\, f_1'(x+t) - i\left\{l_t'(x, t) + \frac{1}{2}L(x, t, x-t)\right\}f_1(x-t) + \\ &+ il(x, t)\, f_1'(x-t) + \left\{k_t'(x, t) - \frac{1}{2}iL(x, t, x+t)\right\}f_2(x+t) - \\ &-\left\{l_t'(x, t) + \frac{1}{2}iL(x, t, x-t)\right\}f_2(x-t) + k(x, t)\, f_2'(x+t) + l(x, t) f_2'(x- \\ &- t) - \frac{1}{2}\, i\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K_t'(x, t, s)\, f_1(s) + L_t'(x, t, s)\, f_2(s)\}\, ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для нахождения второй компоненты левой части уравнения (2.4) дифференцируем формулу (1.112) по t и умножаем на $-i$

$$-i\frac{\partial u_2(x,t;f)}{\partial t} = -i\left\{m_t'(x,t)+\frac{1}{2}N(x,t,x+t)\right\}f_2(x+t)-$$

$$-im(x,t)f_2'(x+t)-i\left\{n_t'(x,t)+\frac{1}{2}N(x,t,x-t)\right\}f_2(x-t)+$$

$$+in(x,t)f_2'(x-t)-\left\{m_t'(x,t)+\frac{1}{2}iM(x,t,x+t)\right\}f_1(x+t)+$$

$$+\left\{n_t'(x,t)-\frac{1}{2}iM(x,t,x-t)\right\}f_1(x-t)-m(x,t)f_1'(x+t)-$$

$$-n(x,t)f_1'(x-t)-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x+t}\{M_t'(x,t,s)f_1(s)+N_t'(x,t,s)f_2(s)\}\,ds. \tag{2.6}$$

Для вычисления первой компоненты правой части уравнения (2.4), в силу определения матрицы B_x, в формуле (1.111) следует функцию $f_1(x)$ заменить на $p(x)f_1(x)+f_2'(x)$, а $f_2(x)$ на $-f_1'(x)+r(x)f_2(x)$. Тогда, интегрируя еще полученные в правой части интегралы по частям, мы получим

$$u_1(x,t;B_xf)=p(x+t)k(x,t)f_1(x+t)+k(x,t)f_2'(x+t)-$$

$$-ik(x,t)f_1'(x+t)+ir(x+t)k(x,t)f_2(x+t)+p(x-t)l(x,t)f_1(x-$$

$$-t)+l(x,t)f_2'(x-t)-il(x,t)f_1'(x-t)-ir(x-t)l(x,t)f_2(x-t)-$$

$$-\frac{1}{2}L(x,t,x+t)f_1(x+t)+\frac{1}{2}L(x,t,x-t)f_1(x-t)+\frac{1}{2}K(x,t,x+$$

$$+t)f_2(x+t)-\frac{1}{2}K(x,t,x-t)f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{L_s'(x,t,s)+p(s)\times$$

$$\times K(x,t,s)\}f_1(s)ds+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{-K_s'(x,t,s)+r(s)L(x,t,s)\}f_2(s)\,ds. \tag{2.7}$$

Аналогично предыдущему, заменяя в формуле (1.112) функцию $f_1(x)$ опять на $p(x)f_1(x)+f_2'(x)$, а $f_2(x)$ — на $-f_1'(x)+r(x)f_2(x)$ и интегрируя по частям, для второй компоненты получим следующее выражение:

$$u_2(x,t;B_xf)=-m(x,t)f_1'(x+t)+r(x+t)m(x,t)f_2(x+t)-$$

$$-im(x,t)f_2'(x+t)-ip(x+t)m(x,t)f_1(x+t)-n(x,t)f_1'(x-t)+$$

$$+r(x-t)n(x,t)f_2(x+t)+ip(x-t)n(x,t)f_1(x-t)+$$

$$+in(x,t)f_2'(x-t)+\frac{1}{2}M(x,t,x+t)f_2(x+t)-$$

$$-\frac{1}{2}M(x, t, x-t)\, f_2(x-t)-\frac{1}{2}N(x, t, x+t)\, f_1(x+t)+$$

$$+\frac{1}{2}N(x, t, x-t)\, f_1(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{N_s'(x, t, s)+p(s)\, M(x, t, s)\}\times$$

$$\times f_1(s)\, ds+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x-t}\{-M_s'(x, t, s)+r(s)\, N(x, t, s)\}\, f_2(s)\, ds. \tag{2.8}$$

Так как вектор-функция $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x)\end{pmatrix}$ произвольна, то, в силу уравнения (2.4), в выражениях (2.5) и (2.7) (соответственно, в выражениях (2.6) и (2.8)) коэффициенты при $f_1(x+t)$, $f_1(x-t)$, $f_2(x+t)$, $f_2(x-t)$ и подынтегральные выражения должны совпадать (коэффициенты при производных $f_1'(x+t)$, $f_1'(x-t)$, $f_2'(x+t)$ $f_2'(x-t)$ взаимно уничтожаются). Итак, приравнивая в выражениях (2.5) и (2.7) коэффициенты при $f_1(x+t)$, $f_1(x-t)$, $f_2(x+t)$ и $f_2(x-t)$, соответственно, получим

$$-ik_t'(x, t)-\frac{1}{2}iK(x, t, x+t)=p(x+t)\, k(x, t)-\frac{1}{2}L(x, t, x+t),$$

$$-il_t'(x, t)-\frac{1}{2}iK(x, t, x-t)=p(x-t)\, l(x, t)+\frac{1}{2}L(x, t, x-t),$$

$$k_t'(x, t)-\frac{1}{2}iL(x, t, x+t)=ir(x+t)\, k(x, t)+\frac{1}{2}K(x, t, x+t),$$

$$-l_t'(x, t)-\frac{1}{2}iL(x, t, x-t)=-ir(x-t)\, l(x, t)-\frac{1}{2}K(x, t, x-t).$$

Из первого и третьего равенств получаем следующую систему для определения функции $k(x, t)$:

$$k_t'(x, t)-ip(x+t)\, k(x, t)=-\frac{1}{2}\{K(x, t, x+t)+iL(x, t, x+t)\}, \tag{2.9}$$

$$k_t'(x, t)-ir(x+t)\, k(x, t)=\frac{1}{2}\{K(x, t, x+t)+iL(x, t, x+t)\}, \tag{2.10}$$

а второе и четвертое равенства определяют следующую систему для функции $l(x, t)$:

$$l_t'(x, t)-ip(x-t)\, l(x, t)=-\frac{1}{2}\{K(x, t, x-t)-iL(x, t, x-t)\}, \tag{2.11}$$

$$l_t'(x, t)-ir(x-t)\, l(x, t)=\frac{1}{2}\{K(x, t, x-t)-iL(x, t, x-t)\}. \tag{2.12}$$

Суммируя равенства (2.9) и (2.10), для определения $k(x, t)$ окончательно получим уравнение

$$2k_t'(x, t) - i\{p(x+t) + r(x+t)\} k(x, t) = 0. \tag{2.13}$$

Присоединим к уравнению условие (1.110), т. е.

$$k(x, 0) = \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

Из уравнения (2.13), в силу начального условия (2.14), для функции $k(x, t)$ находим следующее выражение:

$$k(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2} i \int_0^t [p(x+\tau) + r(x+\tau)]\, d\tau\right\}. \tag{2.15}$$

Теперь, суммируя равенства (2.11) и (2.12), получим

$$2l_t'(x, t) - i\{p(x-t) + r(x-t)\} l(x, t) = 0.$$

Решая это уравнение и учитывая условие (1.110), т. е. $l(x, 0) = \frac{1}{2}$, получим

$$l(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2} i \int_0^t [p(x-\tau) + r(x-\tau)]\, d\tau\right\}. \tag{2.16}$$

Вычитая из равенства (2.10) равенство (2.9) (соответственно, из равенства (2.12) равенство (2.11)) для функций $K(x, t, s)$ и $L(x, t, s)$ получим соотношения

$$K(x, t, x+t) + iL(x, t, x+t) = \frac{1}{2} i\{p(x+t) - r(x+t)\} k(x, t), \tag{2.17}$$

$$K(x, t, x-t) - iL(x, t, x-t) = \frac{1}{2} i\{p(x-t) - r(x-t)\} l(x, t). \tag{2.18}$$

И, наконец, приравнивая подынтегральные выражения в равенствах (2.5) и (2.7), для функций $K(x, t, s)$ и $L(x, t, s)$, как функций переменных s и t, получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$i\frac{\partial K(x, t, s)}{\partial t} + \frac{\partial L(x, t, s)}{\partial s} + p(s) K(x, t, s) = 0, \tag{2.19}$$

$$i\frac{\partial L(x, t, s)}{\partial t} - \frac{\partial K(x, t, s)}{\partial s} + r(s) L(x, t, s) = 0. \tag{2.20}$$

Система (2.19) — (2.20) совместно с условиями (2.17) и (2.18) для функций $K(x, t, s)$ и $L(x, t, s)$ определяет задачу Гурса.

Далее, приравнивая коэффициенты при $f_1(x+t)$, $f_1(x-t)$, $f_2(x+t)$ и $f_2(x-t)$ в выражениях (2.6) и (2.8), соответственно, получим

$$-m_t'(x,t)-\frac{1}{2}iM(x,t,x+t)=-ip(x-t)\,m(x,t)-$$
$$-\frac{1}{2}N(x,t,x+t),$$

$$n_t'(x,t)-\frac{1}{2}iM(x,t,x-t)=ip(x-t)\,n(x,t)+\frac{1}{2}N(x,t,x-t),$$

$$-im_t'(x,t)-\frac{1}{2}iN(x,t,x+t)=r(x+t)\,m(x,t)+\frac{1}{2}M(x,t,x+t),$$

$$-in_t'(x,t)-\frac{1}{2}i\,N(x,t,x-t)=r(x-t)\,n(x,t)-\frac{1}{2}M(x,t,x-t).$$

Из первого и третьего равенств для определения функции $m(x,t)$ получаем систему

$$m_t'(x,t)-ip(x+t)\,m(x,t)=\frac{1}{2}\{N(x,t,x+t)-iM(x,t,x+t)\},\tag{2.21}$$

$$m_t'(x,t)-ir(x+t)\,m(x,t)=-\frac{1}{2}\{N(x,t,x+t)-iM(x,t,x+t)\},\tag{2.22}$$

а второе и четвертое равенства определяют следующую систему для определения функции $n(x,t)$:

$$n_t'(x,t)-ip(x-t)\,n(x,t)=\frac{1}{2}\{N(x,t,x-t)+iM(x,t,x-t)\},\tag{2.23}$$

$$n_t'(x,t)-ir(x-t)\,n(x,t)=-\frac{1}{2}\{N(x,t,x-t)+iM(x,t,x-t)\}.\tag{2.24}$$

Суммируя уравнения (2.21) и (2.22), находим

$$2m_t'(x,t)-i\{p(x+t)+r(x+t)\}\,m(x,t)=0.\tag{2.25}$$

Решая уравнение (2.25) и учитывая условие (1.110), т. е. $m(x,0)=\frac{1}{2}$, для функции $m(x,t)$ получим выражение

$$m(x,t)=\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int_0^t[p(x+\tau)+r(x+\tau)]\,d\tau\right\}.\tag{2.26}$$

Поступая аналогичным образом, из уравнений (2.23) и (2.24) и условия $n(x,0)=\frac{1}{2}$ получим

$$n(x,t)=\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int_0^t[p(x-\tau)+r(x-\tau)]\,d\tau\right\}.\tag{2.27}$$

Теперь, вычитая из равенства (2.21) равенство (2.22) (соответственно из равенства (2.23) равенство (2.24)) и подставляя в полученном равенстве явное выражение функции $m(x, t)$ из (2.26) (соответственно явное выражение функции $n(x, t)$ из (2.27)), для функций $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ получим следующие соотношения:

$$N(x, t, x+t) - iM(x, t, x+t) = \frac{1}{2} i\{r(x+t) - p(x+t)\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [p(x+\tau) + r(x+\tau)]\, d\tau\right\}, \tag{2.28}$$

$$N(x, t, x-t) + iM(x, t, x-t) = \frac{1}{2} i\{r(x-t) - p(x-t)\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [p(x-\tau) + r(x-\tau)]\, d\tau\right\}. \tag{2.29}$$

И, наконец, приравнивая подынтегральные выражения в равенствах (2.6) и (2.8), для функций $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ (как функций переменных s и t) мы получим следующую систему

$$i\frac{\partial M(x, t, s)}{\partial t} + \frac{\partial N(x, t, s)}{\partial s} + p(s)\, M(x, t, s) = 0, \tag{2.30}$$

$$i\frac{\partial N(x, t, s)}{\partial t} - \frac{\partial M(x, t, s)}{\partial s} + r(s)\, N(x, t, s) = 0. \tag{2.31}$$

Система (2.30) + (2.31) совместно с соотношениями (2.28) и (2.29) для функций $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ определяет задачу Гурса.

Заметим, что из (2.15), (2.16), (2.26) и (2.27) следует

$$m(x, t) = k(x, t); \; n(x, t) = l(x, t). \tag{2.32}$$

Далее, полагая в формулах (2.17) и (2.18) $t = 0$, имеем

$$K(x, 0, x) + iL(x, 0, x) = \frac{1}{2} i\{p(x) - r(x)\},$$

$$K(x, 0, x) - iL(x, 0, x) = \frac{1}{2} i\{p(x) - r(x)\}.$$

Из последних соотношений следуют нужные в дальнейшем равенства, справедливые в каждой точке непрерывности функций $p(x)$ и $r(x)$, а именно

$$K(x, 0, x) = \frac{1}{2} i[p(x) - r(x)]; \; L(x, 0, x) = 0. \tag{2.33}$$

Поступая аналогичным образом, из равенств (2.28) и (2.29) получим соотношения

$$N(x, 0, x) = -\frac{1}{2} i[p(x) - r(x)]; \; M(x, 0, x) = 0. \tag{2.34}$$

В частности, при $x = 0$ из (2.33) и (2.34) следует

$$K(0, 0, 0) = -N(0, 0, 0) = \frac{1}{2}[p(0) - r(0)]. \tag{2.35}$$

И, наконец, учитывая (2.32), решение задачи (2.1) + (2.2) + (2.3), выражаемое формулами (1.111) и (1.112), можно переписать в следующем окончательном виде:

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) -$$

$$- if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{2.36}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t)\{f_2(x-t) +$$

$$+ if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x-t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\}\, ds. \tag{2.37}$$

Формулы (2.36) и (2.37) при исследовании вопросов асимптотического поведения спектральной функции и вопросов разложения по собственным функциям одномерной системы Дирака, т. е. системы (0.4) + (0.5) + (0.6) (см. введение), будут играть исключительно важную роль.

§ 3. Оператор-матрица преобразования

Пусть A и B — два линейных дифференциальных оператора, E_1 и E_2 — два линейных функциональных пространства.

Определение. *Линейный непрерывный оператор X, отображающий пространство E_1 в E_2 называется* оператором преобразования, *если он удовлетворяет следующим двум условиям:*

1. $AX = XB$, (3.1)

2. *Существует обратный оператор X^{-1}.*

Пусть

$$A \equiv \begin{pmatrix} p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(x) \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

причем $p(x)$, $r(x)$, $p_1(x)$ и $r_1(x)$ — вещественные функции, суммируемые в каждом конечном интервале $(0 \leqslant x < b \leqslant \infty)$.

E_1 есть совокупность непрерывно дифференцируемых двухкомпонентных вектор-функций $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, определенных на интервале $[0, b)$ и удовлетворяющих граничному условию

$$f_2(0) - hf_1(0) = 0, \tag{3.3}$$

где h — конечное действительное число.

E_2 есть совокупность непрерывно дифференцируемых двухкомпонентных вектор-функций $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$, определенных на том же интервале $[0, b)$ и удовлетворяющих граничному условию

$$g_2(0) - h_1 g_1(0) = 0, \tag{3.4}$$

где h_1 — конечное действительное число.

Оператор-матрицу X будем искать в виде (см. [4])

$$X[f(x)] =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) + \int\limits_0^x \{P(x,s) f_1(s) + R(x,s) f_2(s)\} ds, & (3.5) \\ \gamma(x) f_1(x) + \delta(x) f_2(x) + \int\limits_0^x \{Q(x,s) f_1(s) + H(x,s) f_2(s)\} ds. & (3.6) \end{array} \right.$$

Вычислим компоненты вектор-функции $AX[f(x)]$. Из определения оператора-матрицы A и выражений (3.5), (3.6) следует

$$AX[f(x)]_1 = p(x)\alpha(x) f_1(x) + p(x)\beta(x) f_2(x) + p(x)\int\limits_0^x P(x,s) f_1(s)\, ds +$$

$$+ p(x)\int\limits_0^x R(x,s) f_2(s)\, ds + \gamma'(x) f_1(x) + \gamma(x) f_1'(x) + \delta'(x) f_2(x) +$$

$$+ \delta(x) f_2'(x) + Q(x,x) f_1(x) + H(x,x) f_2(x) +$$

$$+ \int\limits_0^x \{Q_x'(x,s) f_1(s) + H_x'(x,s) f_2(s)\} ds; \tag{3.7}$$

$$AX[f(x)]_2 = -\alpha'(x) f_1(x) - \alpha(x) f_1'(x) - \beta'(x) f_2(x) - \beta(x) f_2'(x) -$$

$$- P(x,x) f_1(x) - R(x,x) f_2(x) - \int\limits_0^x P_x'(x,s) f_1(s)\, ds -$$

$$- \int\limits_0^x R_x'(x,s) f_2(s)\, ds + r(x)\gamma(x) f_1(x) + r(x)\delta(x) f_2(x) +$$

$$+ r(x)\int\limits_0^x \{Q(x,s) f_1(s) + H(x,s) f_2(s)\} ds. \tag{3.8}$$

Вычислим теперь компоненты вектор-функции $XB[f(x)]$. В силу определения операторов X и B имеем

$$XB[f(x)]_1 = \alpha(x) p_1(x) f_1(x) + \alpha(x) f_2'(x) - \beta(x) f_1'(x) +$$

$$+ \beta(x) r_1(x) f_2(x) + \int\limits_0^x P(x,s)\{p_1(s) f_1(s) + f_2'(s)\} ds +$$

$$+ \int\limits_0^x R(x,s)\{-f_1'(s) + r_1(s) f_2(s)\} ds; \tag{3.9}$$

$$XB[f(x)]_2 = \gamma(x)\,p_1(x)\,f_1(x) + \gamma(x)\,f_2'(x) - \delta(x)\,f_1'(x) + \\ + \delta(x)\,r_1(x)\,f_2(x) + \int\limits_0^x Q(x,s)\,\{p_1(s)\,f_1(s) + \\ + f_2'(s)\}\,ds + \int\limits_0^x H(x,s)\,\{-f_1'(s) + r_1(s)\,f_2(s)\}\,ds. \tag{3.10}$$

Согласно условию (3.1) соответствующие компоненты вектор-функций $AX[f(x)]$ и $XB[f(x)]$ должны быть равны, т. е. равны выражения (3.7)—(3.9) и (3.8)—(3.10). Поэтому, приравнивая выражения (3.7) и (3.9), а затем приводя подобные члены, интегрируя по частям интегралы в выражении (3.9), содержащие производные $f_1'(s)$ и $f_2'(s)$ и учитывая условие (3.3), получим

$$\{\alpha(x)\,[p(x) - p_1(x)] + \gamma'(x) + Q(x,x) + R(x,x)\}\,f_1(x) + \\ + \{\beta(x)\,[p(x) - r_1(x)] + \delta'(x) + H(x,x) - P(x,x)\}\,f_2(x) + \\ + [\gamma(x) + \beta(x)]\,f_1'(x) + [\delta(x) - \alpha(x)]\,f_2'(x) + [hP(x,0) - \\ - R(x,0)]\,f_1(0) + \int\limits_0^x \{P(x,s)\,p(x) + Q_x'(x,s) - P(x,s)\,p_1(s) - \\ - R_s'(x,s)\}\,f_1(s)\,ds + \int\limits_0^x \{R(x,s)\,p(x) + H_x'(x,s) - R(x,s)\,r_1(s) + \\ + P_s'(x,s)\}\,f_2(s)\,ds = 0. \tag{3.11}$$

Поступая аналогично, из выражений (3.8) и (3.10) получим

$$\{\gamma(x)\,[p_1(x) - r(x)] + \alpha'(x) + P(x,x) - H(x,x)\}\,f_1(x) + \\ + \{\delta(x)\,[r_1(x) - r(x)] + \beta'(x) + R(x,x) + Q(x,x)\}\,f_2(x) + \\ + [\alpha(x) - \delta(x)]\,f_1'(x) + [\gamma(x) + \beta(x)]\,f_2'(x) + [H(x,0) - hQ(x,0)]\,f_1(0) + \\ + \int\limits_0^x \{Q(x,s)\,p_1(s) + H_s'(x,s) - Q(x,s)\,r(x) + P_x'(x,s)\}\,f_1(s)\,ds + \\ + \int\limits_0^x \{H(x,s)\,r_1(s) - Q_s'(x,s) - H(x,s)\,r(x) + R_x'(x,s)\}\,f_2(s)\,ds = 0. \tag{3.12}$$

Так как $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция, то в тождествах (3.11) и (3.12) коэффициенты при $f_1(x), f_2(x), f_1'(x), f_2'(x)$, $f_1(0)$ и подынтегральные круглые скобки равны нулю. Следовательно, приравнивая к нулю подынтегральные коэффициенты при $f_1(x)$, $f_2(x)$ и коэффициенты при $f_1(0)$, относительно функций $P(x,s)$, $R(x,s)$, $Q(x,s)$ и $H(x,s)$ получим следующую систему:

$$\frac{\partial P(x,s)}{\partial x}+\frac{\partial H(x,s)}{\partial s}=[r(x)-p_1(s)]\,Q(x,s), \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial H(x,s)}{\partial x}+\frac{\partial P(x,s)}{\partial s}=[r_1(s)-p(x)]\,R(x,s), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial Q(x,s)}{\partial x}-\frac{\partial R(x,s)}{\partial s}=[p_1(s)-p(x)]\,P(x,s), \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial R(x,s)}{\partial x}-\frac{\partial Q(x,s)}{\partial s}=[r(x)-r_1(s)]\,H(x,s), \tag{3.16}$$

$$R(x,0)-hP(x,0)=0, \tag{3.17}$$

$$H(x,0)-hQ(x,0)=0. \tag{3.18}$$

Далее, приравнивая к нулю коэффициенты при $f_1(x)$ и $f_2(x)$, относительно функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ получим систему

$$\alpha'(x)+\gamma(x)[p_1(x)-r(x)]=H(x,x)-P(x,x), \tag{3.19}$$

$$-\delta'(x)+\beta(x)[r_1(x)-p(x)]=H(x,x)-P(x,x), \tag{3.20}$$

$$\beta'(x)+\delta(x)[r_1(x)-r(x)]=-R(x,x)-Q(x,x), \tag{3.21}$$

$$\gamma'(x)+\alpha(x)[p(x)-p_1(x)]=-R(x,x)-Q(x,x). \tag{3.22}$$

И, наконец, приравнивая к нулю коэффициенты при $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$, получим равенства $\alpha(x)-\delta(x)=0$, $\beta(x)+\gamma(x)=0$, т. е.

$$\delta(x)=\alpha(x),\quad \gamma(x)=-\beta(x). \tag{3.22'}$$

Поэтому система (3.19) + (3.20) + (3.21) + (3.22) принимает вид

$$\alpha'(x)-\beta(x)[p_1(x)-r(x)]=H(x,x)-P(x,x), \tag{3.23}$$

$$\alpha'(x)-\beta(x)[p(x)-r_1(x)]=P(x,x)-H(x,x), \tag{3.24}$$

$$\beta'(x)+\alpha(x)[r_1(x)-r(x)]=-R(x,x)-Q(x,x), \tag{3.25}$$

$$\beta'(x)-\alpha(x)[p(x)-p_1(x)]=R(x,x)+Q(x,x). \tag{3.26}$$

Из системы (3.23) + (3.24) + (3.25) + (3.26) можно найти явные выражения для функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ через функции $p(x)$, $r(x)$, $p_1(x)$ и $r_1(x)$. В самом деле, суммируя уравнения (3.23) и (3.24) (соответственно (3.25) и (3.26)), получим систему

$$2\alpha'(x)+\beta(x)[p(x)-p_1(x)+r(x)-r_1(x)]=0, \tag{3.27}$$

$$2\beta'(x)-\alpha(x)[p(x)-p_1(x)+r(x)-r_1(x)]=0. \tag{3.28}$$

Положим

$$q(x)=p(x)-p_1(x)+r(x)-r_1(x). \tag{3.29}$$

Тогда систему (3.27) + (3.28) можно переписать в виде

$$2\alpha'(x)=-q(x)\beta(x), \tag{3.30}$$

$$2\beta'(x)=-q(x)\alpha(x). \tag{3.31}$$

Из (3.30) + (3.31) следует

$$2\alpha(x)\alpha'(x)+2\beta(x)\beta'(x)=0,$$

т. е.

$$\{\alpha^2(x) - \beta^2(x)\}' = 0;$$

отсюда, после интегрирования в пределах от 0 до x, получим

$$\alpha^2(x) + \beta^2(x) = \alpha^2(0) + \beta^2(0). \tag{3.32}$$

Вычислим $\alpha(0)$ и $\beta(0)$. Пусть вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ непрерывно дифференцируема и

$$f_1(0) = 1, \ f_2(0) = h. \tag{3.33}$$

Тогда $f(x)$ удовлетворяет условию (3.3) и поэтому $f(x) \in E_1$. Далее, пусть

$$X[f(x)] = g(x), \tag{3.34}$$

где вектор-функция $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ — элемент пространства E_2 и, значит, удовлетворяет граничному условию (3.4). Тогда из равенства (3.34), в силу определения оператор-матрицы X, т. е. в силу выражений (3.5) и (3.6), при $x = 0$ имеем (см. (3.22'))

$$g_1(0) = \alpha(0) f_1(0) + \beta(0) f_2(0), \tag{3.35}$$

$$g_2(0) = -\beta(0) f_1(0) + \alpha(0) f_2(0). \tag{3.36}$$

Умножая уравнение (3.35) на число h_1, а затем вычитая из уравнения (3.36) и учитывая граничное условие (3.4) и условия (3.33), находим

$$\beta(0) = \frac{h - h_1}{1 + hh_1} \alpha(0).$$

Положим

$$\alpha(0) = 1. \tag{3.37}$$

Тогда

$$\beta(0) = \frac{h - h_1}{1 + h_1 h}. \tag{3.38}$$

Поэтому

$$\alpha^2(0) + \beta^2(0) = \frac{(1 + h^2)(1 + h_1^2)}{(1 + hh_1)^2} = \varkappa^2. \tag{3.39}$$

Теперь, решая систему (3.30) + (3.31) и учитывая выражения (3.37), (3.38) и (3.39), для функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ получаем явные выражения

$$\alpha(x) = \varkappa \sin\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau + \arcsin\frac{1}{\varkappa} \right\}, \tag{3.40}$$

$$\beta(x) = \varkappa \cos\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau + \arcsin\frac{1}{\varkappa} \right\}, \tag{3.41}$$

где функция $q(\tau)$ определяется по формуле (3.29), а число $\varkappa$—(3.39).

Далее положим

$$P(x, 0) = \varphi(x), \tag{3.42}$$

$$Q(x, 0) = \psi(x), \tag{3.43}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Тогда система уравнений (3.13) + (3.14) + (3.15) + (3.16) совместно с условиями (3.17) + (3.18) + (3.42) + (3.43) для функций $P(x, s)$, $R(x, s)$, $Q(x, s)$ и $H(x, s)$ определяет задачу Коши. Эта задача разрешима. Существование и единственность решения этой задачи можно доказать, например, методом последовательных приближений. Решая эту задачу и используя равенства (3.1), мы получим систему интегро--дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому, проделывая вычисления в обратном порядке, мы докажем, что оператор-матрица X, определенная по формулам (3.5) + (3.6), в которых ядра $P(x, s)$, $R(x, s)$, $Q(x, s)$ и $H(x, s)$ являются решениями задачи Коши (3.13) — (3.18)+(3.42)+(3.43), удовлетворяет соотношению (3.1). Существование обратного оператора X^{-1} следует из построения оператора X.

§ 4. Решение смешанной задачи на полупрямой

Пусть $p(x)$ и $r(x)$ — действительные функции, определенные на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на той же полупрямой $(0, \infty)$. Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном, как угодно, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — пока неопределенным образом (в дальнейшем мы уточним способ продолжения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$).

При сделанных предположениях относительно функций $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$-i\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x)u_1, \tag{4.1}$$

$$-i\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + r(x)u_2, \tag{4.2}$$

$$u_1(x, t)/_{t=0} = f_1(x), \tag{4.3}$$

$$u_2(x, t)/_{t=0} = f_2(x), \tag{4.4}$$

$$[u_2(x, t) - h\,u_1(x, t)]/_{x=0} = 0. \tag{4.5}$$

Обозначим через $u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$ решение задачи (4.1)—(4.5). Согласно формулам (2.36) и (2.37) решение задачи (4.1)—(4.4) можно представить в виде

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) - \\ - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K(x, t, s)f_1(s) + L(x, t, s)f_2(s)\}\,ds, \tag{4.6}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t)\{f_2(x-t) +$$

$$+ if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds. \tag{4.7}$$

Рассмотрим теперь применение операторов преобразования к продолжению решения системы (4.1) + (4.2) на отрицательную полуось. Будет показано как выразить решение $u(x, t)$ в точке $-x$ в виде линейного оператора над $u(s, t) = \begin{pmatrix} u_1(s, t) \\ u_2(s, t) \end{pmatrix}$, $0 \leqslant s \leqslant x$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} p(-x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(-x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(x) \end{pmatrix} \quad (x \geqslant 0). \tag{4.8}$$

Предположим, что функции $p(x)$ и $r(x)$ продолжены на отрицательную полуось так, что

$$p(-0) = p(+0), \quad r(-0) = r(+0), \tag{4.9}$$

т. е. продолжения в нуле непрерывны. Далее обозначим через X оператор-матрицу преобразования, отображающий пространство E_h непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, удовлетворяющих граничному условию (4.5), т. е.

$$f_2(0) - hf_1(0) = 0 \tag{4.10}$$

на пространство E_h. Согласно (3.1)

$$AX = XB.$$

Пусть вектор-функция $u^+(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^+(x, t) \\ u_2^+(x, t) \end{pmatrix}$ является решением смешанной задачи (4.1) — (4.5) на полупрямой $(0, \infty)$. В силу условия (4.5) при каждом фиксированном t вектор-функция $u^+(x, t)$ принадлежит пространству E_h, поэтому над $u^+(x, t)$ можно применить оператор X, в силу определения которого, т. е. в силу равенств (3.5) и (3.6), имеем (учитывая (3.22))

$$X[u^+]_1 = \alpha(x) u_1^+(x, t) + \beta(x) u_2^+(x, t) + \int_0^x [P(x, s) u_1^+(s, t) +$$

$$+ R(x, s) u_2^+(s, t)] ds. \tag{4.11}$$

$$X[u^+]_2 = \alpha(x) u_2^+(x, t) - \beta(x) u_1^+(x, t) + \int_0^x [Q(x, s) u_1^+(s, t) +$$

$$+ H(x, s) u_2^+(s, t)] ds. \tag{4.12}$$

Продолжения функций $u_1^+(x, t)$ и $u_2^+(x, t)$ на отрицательную полуось определим по формулам

$$u_1(-x, t) \equiv u_1^-(x, t) = X[u^+]_1, \tag{4.13}$$

$$u_2(-x, t) \equiv u_2^-(x, t) = X[u^+]_2, \tag{4.14}$$

т. е., в силу выражений (4.11) и (4.12), положим

$$u_1^-(x, t) = \alpha(x)\, u_1^+(x, t) + \beta(x)\, u_2^+(x, t) + \int_0^x [P(x, s)\, u_1^+(s, t) +$$

$$+ R(x, s)\, u_2^+(s, t)]\, ds, \tag{4.15}$$

$$u_2^-(x, t) = \alpha(x)\, u_2^+(x, t) - \beta(x)\, u_1^+(x, t) + \int_0^x \{Q(x, s)\, u_1^+(s, t) +$$

$$+ H(x, s)\, u_2^+(s, t)\}\, ds. \tag{4.16}$$

Покажем, что функции $u_1^-(x, t)$ и $u_2^-(x, t)$ удовлетворяют системе (4.1) + (4.2) на отрицательной полуоси. В самом деле, из определения оператор-матрицы A, т. е. из (4.8), следует

$$A[u^-]_1 = \frac{\partial u_2^-}{\partial x} + p(-x)\, u_1^-.$$

Тогда, полагая в последнем равенстве (вернее в левой его части) выражение u_1^- из равенств (4.13) и (4.14) и учитывая условие (4.10), мы приходим к равенству

$$\frac{\partial u_2^-}{\partial x} + p(-x)\, u_1^- = AX[u_1^+] = XB[u^+]_1. \tag{4.17}$$

Вычислим $XB[u^+]_1$. Для этого, в силу определения оператор-матрицы B (см. (4.81)), следует в правой части равенства (4.11) заменить функцию $u_1^+(x, t)$ на $\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)\, u_1^+(x, t)$, а функцию $u_2^+(x, t)$ — на $-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + r(x)\, u_2^+(x, t)$. Поэтому

$$XB[u^+]_1 = \alpha(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)\, u_1^+(x, t)\right] + \beta(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} +\right.$$

$$\left.+ r(x)\, u_2^+(x, t)\right] + \int_0^x P(x, s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial s} + p(s)\, u_1^+(s, t)\right] ds +$$

$$+ \int_0^x R(x, s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial s} + r(s)\, u_2^+(s, t)\right] ds. \tag{4.18}$$

Так как функции $u_1^+(x, t)$ и $u_2^+(x, t)$ являются решениями системы (4.1)+(4.2), то равенство (4.18) можно записать так

$$XB[u^+]_1 = \alpha(x)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right] + \beta(x)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right] + \int_0^x \left\{P(x, s)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right] +\right.$$

$$+ R(x, s)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right]\Bigg\} ds = -i\frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{\alpha(x)\, u_1^+(x, t) + \beta(x)\, u_2^+(x, t) +$$

$$+ \int_0^x [P(x, s)\, u_1^+(s, t) + R(x, s)\, u_2^+(s, t)]\, ds\Bigg\}. \tag{4.19}$$

Из равенств (4.17) и (4.19), в силу (4.15), следует

$$\frac{\partial u_2^-}{\partial x} + p(-x)\, u_1^- = -i\frac{\partial u_1^-}{\partial t},$$

т. е. удовлетворяется уравнение (4.1) при $x < 0$. Аналогично,

$$A[u^+]_2 = -\frac{\partial u_1^-}{\partial x} + r(-x)\, u_2^- = AX[u^+]_2 = XB[u^+]_2 = \alpha(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + r(x)\, u_2^+\right] - \beta(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)\, u_1^+\right] + \int_0^x \Bigg\{Q(x, s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(s)\, u_1^+\right] +$$

$$+ H(x, s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + r(x)\, u_2^+\right]\Bigg\} ds = \alpha(x)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right] - \beta(x)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right] +$$

$$+ \int_0^x \Bigg\{Q(x, s)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right] + H(x, s)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right]\Bigg\} ds = -i\frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{\alpha(x) u_2^+(x, t) -$$

$$- \beta(x)\, u_1^+(x, t) + \int_0^x [Q(x, s)\, u_1^+(s, t) + H(x, s)\, u_2^+(s, t)]\, ds\Bigg\} =$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial t} X[u^+]_2 = -i\frac{\partial u_2^-}{\partial t},$$

т. е.

$$-\frac{\partial u_1^-}{\partial x} + r(-x)\, u_2^- = -i\frac{\partial u_2^-}{\partial t}.$$

Значит удовлетворяется и уравнение (4.2) при $x < 0$.

Покажем теперь, что продолжения функций $u_1^+(x, t)$ и $u_2^+(x, t)$ на отрицательную полуось непрерывны вместе с первыми производными. Действительно, полагая в формулах (4.15) и (4.16) $x = +0$, получим

$$u_1^-(-0, t) = \alpha(0)\, u_1^+(+0, t) + \beta(0)\, u_2^+(+0, t), \tag{4.20}$$

$$u_2^-(-0, t) = \alpha(0)\, u_2^+(+0, t) - \beta(0)\, u_1^+(+0, t). \tag{4.21}$$

Далее, в нашем случае $h = h_1$, в силу чего из равенства (3.39) находим, что $\varkappa = 1$. Тогда из равенств (3.40) и (3.41) следует, что $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$. Поэтому непрерывность продолжения следует из (4.20) и (4.21).

Покажем, что, если коэффициенты системы (4.1)+(4.2) продолжены на отрицательную полуось непрерывно, т. е. если выполняются равенства (4.9), то непрерывно не только продолжение решения, но и его первая производная.

В самом деле, из равенств (4.10), (4.13) и (4.14) имеем

$$A[u^-] = XB[u^+].$$

Используя явный вид операторов A, B и X, согласно (4.8), (4.11) и (4.12), последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial u_2^-}{\partial x} + p(-x)u_1^- = \alpha(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)u_1^+\right] + \beta(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + r(x)u_2^+\right] +$$
$$+ \int_0^x \left\{P(x,s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial s} + p(s)u_1^+\right] + R(x,s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial s} + r(s)u_2^+\right]\right\}ds. \tag{4.22}$$

$$-\frac{\partial u_1^-}{\partial x} + r(-x)u_2^- + \alpha(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + r(x)u_2^+\right] - \beta(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)u_1^+\right] +$$
$$+ \int_0^x \left\{Q(x,s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial s} + p(s)u_1^+\right] + H(x,s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial s} + r(s)u_2^+\right]\right\}ds. \tag{4.23}$$

Теперь, полагая в равенствах (4.22) и (4.23) $x = +0$ и используя непрерывность функций $p(x)$ и $r(x)$ в нуле, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}u_2(-x,t)/_{x=0} + p(0)u_1(-0,t) = \alpha(0)\left[\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} +\right.$$
$$\left. + p(0)u_1(+0,t)\right] + \beta(0)\left[-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} + r(0)u_2(+0,t)\right], \tag{4.24}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}u_1(-x,t/_{x=0} + r(0)u_2(-0,t) = \alpha(0)\left[-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} +\right.$$
$$\left. + r(0)u_2(+0,t)\right] + -\beta(0)\left[\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} + p(0)u_1(+0,t)\right]. \tag{4.25}$$

Так как $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$, $u_1(-0,t) = u_1(+0,t)$, $u_2(-0,t) = u_2(+0,t)$, то из равенств (4.24) и (4.25) следует

$$\frac{\partial u_1(-x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0}, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial u_2(-x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0}, \tag{4.27}$$

т. е. в нуле непрерывны и первые производные продолжения.

Формулы (4.15) и (4.16) можно использовать для продолжения начальных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (см. условие (4.3) и (4.4)). В самом деле, полагая в формулах (4.15) и (4.16) $t = 0$ и учитывая начальные условия (4.3) и (4.4), находим

$$f_1(-x) = \alpha(x)f_1(x) + \beta(x)f_2(x) + \int_0^x \{P(x,s)f_1(s) + R(x,s)f_2(s)\}\,ds, \tag{4.28}$$

$$f_2(-x) = \alpha(x) f_2(x) - \beta(x) f_1(x) + \int_0^x \{Q(x, s) f_1(s) + H(x, s) f_2(s)\} ds. \tag{4.29}$$

Непрерывность продолжений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и их первых производных следует из равенств (4.26), (4.27), (4.28) и (4.29), если в них положить $x = +0$.

Вернемся теперь к задаче (4.1) + (4.2) + (4.3) + (4.4) + (4.5).

Если $x > t > 0$, то решение задачи (4.1)—(4.5) совпадает с решением задачи (4.1)—(4.4) и, следовательно, дается формулами (4.6) и (4.7). А если $x < t$, то нужно использовать продолжения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрицательную полуось по формулам (4.28) и (4.29), притом следующим образом: интервал интегрирования в формулах (4.6) и (4.7) $(x - t, x + t)$ разбиваем на два интервала: $(x - t, 0)$ и $(0, x + t)$, а затем, в интегралах по интервалу $(x - t, 0)$, $x - t < 0$, переменную интегрирования s заменяем на $-s$, а значения функций $f_1(-s)$ и $f_2(-s)$ соответственно по формулам (4.28) и (4.29). Аналогично, заменяем значения функций $f_1(x - t)$ и $f_2(x - t)$ в слагаемых, стоящих вне интегралов в правых частях формул (4.6) и (4.7). Тогда после несложных преобразований, которые мы опускаем, для решения задачи (4.1)—(4.5) при $0 < x < t$ получаем формулы

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x + t) + if_2(x + t)\} + l_1(x, t)\{f_1(t - x) - \\ - if_2(t - x)\} + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\} ds + \\ + \frac{1}{2}\int_0^{t-x} \{K_1(x, t, s) f_1(s) + L_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \tag{4.30}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x + t) - if_1(x + t)\} + l_1(x, t)\{f_2(t - x) + \\ + if_1(t - x)\} + \frac{1}{2}\int_0^{t+x} \{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds + \\ + \frac{1}{2}\int_0^{t-x} \{M_1(x, t, s) f_1(s) + N_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \tag{4.31}$$

где

$$l_1(x, t) = l(x, t)\{\alpha(t - x) + i\beta(t - x)\} = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int_0^{t-x} [p(\tau) + \\ + r(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} i \int_0^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau\right\}, \; K_1(x, t, s) = \alpha(s) K(x, t, -s) - \\ - \beta(s) L(x, t, -s) + 2l(x, t)[P(t - x, s) - iR(t - x, s)] +$$

$$+\int_{s}^{t-x}\{K(x,t,-\tau)P(\tau,s)+L(x,t,-\tau)R(\tau,s)\}d\tau,$$

$$L_1(x,t,s)=\beta(s)K(x,t,-s)+\alpha(s)L(x,t,-s)+2l(x,t)[Q(t-x,s)-$$
$$-iH(t-x,s)]+\int_{s}^{t-x}\{K(x,t,-\tau)Q(\tau,s)+L(x,t,-\tau)H(\tau,s)\}d\tau,$$

$$M_1(x,t,s)=\alpha(s)M(x,t,-s)-\beta(s)N(x,t,-s)+2l(x,t)[R(t-x,s)+$$
$$+iP(t-x,s)]+\int_{x}^{t-x}\{M(x,t,-\tau)P(\tau,s)+N(x,t,-\tau)R(\tau,s)\}d\tau,$$

$$N_1(x,t,s)=\beta(s)M(x,t,-s)+\alpha(s)N(x,t,-s)+2l(x,t)[H(t-x,s)+$$
$$+iQ(t-x,s)]+\int_{s}^{t-x}\{M(x,t,-\tau)Q(\tau,s)+N(x,t,-\tau)H(\tau,s)\}d\tau.$$

§ 5. Решение задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) при $t<0$

Пусть теперь $t<0$. Положим $\tau=-t$. Тогда система (1.1)—(1.2) принимает вид

$$i\frac{\partial u_1}{\partial\tau}-\frac{\partial u_2}{\partial x}-p(x)u_1=0, \tag{5.1}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial\tau}+\frac{\partial u_1}{\partial x}-r(x)u_2=0. \tag{5.2}$$

Введем новые функции, полагая

$$u_1(x,-\tau)\equiv v_2(x,\tau), \tag{5.3}$$

$$u_2(x,-\tau)\equiv v_1(x,\tau), \tag{5.4}$$

$$-r(x)\equiv q(x),\ -p(x)\equiv h(x), \tag{5.5}$$

$$f_1(x)\equiv g_2(x),\ f_2(x)\equiv g_1(x). \tag{5.6}$$

В силу обозначений (5.3)—(5.6), задачу (1.1)—(1.4), с учетом (5.1) и (5.2), можно записать так:

$$i\frac{\partial v_1}{\partial\tau}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+q(x)v_1=0, \tag{5.7}$$

$$i\frac{\partial v_2}{\partial\tau}-\frac{\partial v_1}{\partial x}+h(x)v_2=0, \tag{5.8}$$

$$v_1(x,0)=g_1(x),\ v_2(x,0)=g_2(x). \tag{5.9}$$

Решение задачи (5.7)+(5.8)+(5.9), как уже доказано в параграфе 2, дается формулами (2.36) и (2.37), т. е.

$$v_1(x,\tau)=\bar{k}(x,\tau)\{g_1(x+\tau)+ig_2(x+\tau)\}+\bar{l}(x,\tau)\{g_1(x-\tau)-$$
$$-ig_2(x-\tau)\}+\frac{1}{2}\int_{x-\tau}^{x+\tau}\{\bar{K}(x,\tau,s)g_1(s)+\bar{L}(x,\tau,s)g_2(s)\}ds, \tag{5.10}$$

$$v_3(x, \tau) = \bar{k}(x, \tau)\{g_2(x+\tau) - ig_1(x+\tau)\} + \bar{l}(x, \tau)\{g_2(x-\tau) +$$

$$+ ig_1(x-\tau)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\tau}^{x+\tau}\{\bar{M}(x, \tau, s)\, g_1(s) + \bar{N}(x, \tau, s)\, g_2(s)\}\, ds, \tag{5.11}$$

где, согласно формулам (2.15) и (2.16),

$$\bar{k}(x, \tau) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int\limits_0^\tau [h(x+\sigma) + q(x+\sigma)]\, d\sigma\right\}, \tag{5.12}$$

$$\bar{l}(x, \tau) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int\limits_0^\tau [h(x-\sigma) + q(x-\sigma)]\, d\sigma\right\}. \tag{5.13}$$

Вычислим значения функций $\bar{k}(x, \tau)$ и $\bar{l}(x, \tau)$, возвращаясь от τ, $h(x)$ и $q(x)$, соответственно, к $-t$, $-p(x)$ и $-r(x)$. Имеем

$$\bar{k}(x, -t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int\limits_0^{-t}[-p(x+\sigma) - r(x+\sigma)]\, d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^t [p(x-\sigma) + r(x-\sigma)]\, d\sigma\right\},$$

откуда, в силу (2.16), следует, что

$$\bar{k}(x, \tau) = \bar{k}(x, -t) = l(x, t). \tag{5.14}$$

Аналогичным образом получим

$$\bar{l}(x, -t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int\limits_0^{-t}[-p(x-\sigma) - r(x-\sigma)]\, d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int\limits_0^t [p(x+\sigma) + r(x+\sigma)]\, d\sigma\right\},$$

что, согласно (2.15), равносильно равенству

$$\bar{l}(x, \tau) = \bar{l}(x, -t) = k(x, t). \tag{5.15}$$

Далее, выписывая задачу, аналогичную (2.19) + (2.20) + (2.17) + (2.18) для функций $K(x, \tau, s)$ и $L(x, \tau, s)$, а затем возвращаясь от τ, $h(x)$ и $q(x)$, соответственно, к $-t$, $-p(x)$ и $-r(x)$ получим следующую задачу:

$$i\frac{\partial\bar{K}(x, -t, s)}{\partial t} - \frac{\partial\bar{L}(x, -t, s)}{\partial s} + r(x)\bar{K}(x, -t, s) = 0, \tag{5.16}$$

$$i\frac{\partial\bar{L}(x, -t, s)}{\partial t} + \frac{\partial\bar{K}(x, -t, s)}{\partial s} + p(x)\bar{L}(x, -t, s) = 0, \tag{5.17}$$

$$\bar{K}(x, -t, x+t) - i\bar{L}(x, -t, x+t) = -i\{r(x+t) - p(x+t)\}\, k(x, t), \tag{5.18}$$

$$\widetilde{K}(x,-t,x-t)-i\widetilde{L}(x,-t,x-t)=-i\ \{r(x-t)-p(x-t)\}\ l(x,t). \tag{5.19}$$

Так как $k(x,0)=l(x,0)=\frac{1}{2}$, то, полагая в равенствах (5.18) и (5.19) $t=0$, а затем складывая (вычитая), мы, соответственно, получим

$$\widetilde{K}(x,\ 0,x)=\frac{1}{2}\,i\ \{p(x)-r(x)\},\ \widetilde{L}(x,0,x)=0. \tag{5.20}$$

Выписывая теперь задачу, аналогичную (2.30) + (2.31) + (2.28) + (2.29) для функций $\widetilde{M}(x,t,s)$ и $\widetilde{N}(x,t,s)$, а затем возвращаясь от τ, $h(x)$ и $q(x)$, соответственно, к $-t$, $-p(x)$ и $-r(x)$, получим

$$i\,\frac{\partial\widetilde{N}(x,-t,s)}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{M}(x,-t,s)}{\partial s}+p(s)\,\widetilde{N}(x,-t,s)=0, \tag{5.21}$$

$$i\,\frac{\partial\widetilde{M}(x,-t,s)}{\partial t}-\frac{\partial\widetilde{N}(x,-t,s)}{\partial s}+r(s)\,\widetilde{M}(x,-t,s)=0, \tag{5.22}$$

$$\widetilde{N}(x,-t,\ x+t)+i\widetilde{M}(x,-t,\ x+t)=i\{r(x+t)-p(x+t)\}\,k(x,\ t), \tag{5.23}$$

$$\widetilde{N}(x,-t,x-t)-i\widetilde{M}(x,-t,x-t)=i\{r(x-t)-p(x-t\}\,l(x,\ t). \tag{5.24}$$

Поступая так же, как и при получении равенств (5.20), из (5.23) и (5.24) имеем

$$\widetilde{N}(x,0,x)=\frac{1}{2}\,i\{r(x)-p(x)\},\ M(x,0,\ x)=0.$$

Заменяя в формулах (5.10) и (5.11) τ на $-t$ и учитывая равенства (5.3), (5.4), (5.6), (5.14) и (5.15), получим $(t<0)$

$$u_1(x,t)=k(x,t)\ \{f_1(x+t)+if_2(x+t)\}+l(x,t)\ \{f_1(x-t)-$$
$$-if_2(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}\{\widetilde{N}(x,-t,s)\,f_1(s)+M(x,-t,s)\,f_2(s)\}\,ds,$$

$$u_2(x,t)=k(x,t)\ \{f_2(x+t)-if_1(x+t)\}+l(x,t)\ \{f_2(x-t)+$$
$$+if_1(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}\{\widetilde{L}(x,-t,s)\,f_1(s)+\widetilde{K}(x,-t,s)\,f_2(s)\}\,ds.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 24.IX.1966

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԴԻՐԱԿԻ ՄԻԱՉԱՓ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՇՈՒ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է Կոշու հետևյալ խնդիրը՝

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x)\,u_1=0,$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0,$$

$$u_1(x,0)=f_1(x),\ u_2(x,0)=f_2(x),$$

որտեղ $p(x)$ *և* $r(x)$ *ֆունկցիաներն իրական են, որոշված են* $(0,\infty)$ *կիսաառանցքի վրա և հանրագումարելի են ամեն մի վերջավոր ինտերվալում, իսկ* $f_1(x)$ *և* $f_2(x)$ *ֆունկցիաները նույնպես իրական են և անընդհատ դիֆերենցելի են նույն կիսաառանցքի վրա։*

Աշխատության մեջ ստացված են բացահայտ բանաձևեր ուսումնասիրվող Կոշու խնդրի լուծման համար, որոնք արտահայտված են (0.7)—(0.10) և (0.17)—(0.18) բանաձևերում (տես հիմնական տեքստի ներածությունը)։

I. S. SARGSIAN

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE DIMENSIONAL DYRAC SYSTEM

Summary

The following Cauchy problem is investigated

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x)\,u_1=0,$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0,$$

$$u_1(x,0)=f_1(x),\ u_2(x,0)=f_2(x),$$

with $p(x)$ and $r(x)$ defined on $(0,\infty)$, real valued and summable, as for $f_1(x)$ and $f_2(x)$, they are assumed to be real-valued and to posess continous first derivatives on $(0,\infty)$. Explicit solution for this problem is obtained (see formulae (0.7)—(0.10) and (0.17)—(0.18)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Левитан.* Приложение III к книге Э. Ч. Титчмарша — Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, I, Издательство ИЛ, Москва (1960).
2. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифферен-

циальных операторов второго порядка, Труды Моск. матем. общества, I (1952), 327—420.

3. *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, Гостехиздат, М.—Л. (1951).
4. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* О продолжении решений одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 165, № 6 (1965).
5. *И. С. Саргсян.* Асимптотическое поведение спектральной матрицы одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 5 (1966).
6. *И. С. Саргсян.* Разложение по собственным функциям одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 6 (1966).
7. *И. С. Саргсян.* Суммирование производных спектральной матрицы одномерной системы Дирака, ДАН Арм.ССР, XLII, № 4 (1966).
8. *И. С. Саргсян.* Теорема о равносуммируемости дифференциальных разложений по собственным функциям одномерной системы Дирака, ДАН Арм.ССР, XLII, № 5 (1966).
9. *И. С. Саргсян.* О решении задачи Коши для одномерной нестационарной системы Дирака, ДАН Арм.ССР, XLII, № 3 (1966).