ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 6, 1966 Математика

Л. А. МАТЕВОСЯН

О ПОВЕРХНОСТЯХ В ПРИВОДИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Рассмотрим поверхность X_m в приводимом пространстве V_n. Риманово пространство V_n приводимо, если в некоторой системе координат его метрика распадается на самостоятельные части, зависящие каждая от своих переменных

$$ds^2 = ds_0^2 + ds_1^2 + \cdots + ds_q^2,$$

где ds_0^2 — эвклидова метрика, а ds_r^2 $(r = 1, 2, \cdots, q)$ — неодномерные и неприводимые метрики.

В настоящей статье поверхность X_m рассматривается в приводимом пространстве с метрикой

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2. \tag{1.1}$$

В работе [1] А. П. Норден доказал, что приводимое пространство с метрикой (1.1) есть риманово пространство, допускающее декартову композицию двух многообразий, позиции которых вполне ортогональны, причем самостоятельные метрики, на которые распадается метрика этого пространства, определяют внутренние геометрии позиций.

Обозначим первое базовое многообразие через M_{n_1}, а второе — через M_{n_2}, где $n_1 + n_2 = n$. Координаты M_{n_1} обозначим через u^a $(a, b, c, d = 1, 2, \cdots, n_1)$, координаты M_{n_2} — через $u^{\bar a}$ $(\bar a, \bar b, \bar c, \bar d = n_1 + 1, \cdots, n)$, а за криволинейные координаты V_n берем адаптированные координаты $(u^a, u^{\bar a})$ (ср. [1], стр. 119).

Поверхность X_m в приводимом пространстве V_n можно рассматривать как геометрическое место точек, находящихся во взаимнооднозначном соответствии с некоторыми наборами точек A и $\bar A$, где A — любая точка подмногообразия M_{m_1} многообразия M_{n_1}, а $\bar A$ — любая точка подмногообразия M_{m_2} многообразия M_{n_2}, причем $m_1 \leqslant n_1$, $m_2 \leqslant n_2$. Набор точек A и $\bar A$ обозначим через $(A, \bar A)$. О точках A и $\bar A$, участвующих в одном наборе $(A, \bar A)$, будем говорить, что они находятся в связи.

Если $m = m_1 + m_2$, то точки X_m находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными наборами $(A, \bar A)$ точек A и $\bar A$. Тогда многообразия M_{m_1} и M_{m_2} находятся в свободной композиции. В общем случае $m \leqslant m_1 + m_2$ многообразия M_{m_1} и M_{m_2} находятся в несвободной композиции.

Возьмем некоторую точку A многообразия M_{m_1}. Эта точка находится в связи с точками $\bar{A}$ подмногообразия $M_{\bar{p}}$ многообразия M_{m_2} $(0 \leqslant \bar{p} \leqslant m_2)$. Это многообразие $M_{\bar{p}}$ назовем слоем многообразия M_{m_2}, соответствующим точке A. Такие точки A заполняют подмногообразие M_p многообразия M_{m_1} $(0 \leqslant p \leqslant m_1)$.

Многообразие M_{m_1} можно считать t-параметрическим семейством многообразий M_p, однократно покрывающим многообразие M_{m_1}. Следовательно будем иметь

$$t + p = m_1. \tag{1.2}$$

При изменении t параметров изменяется M_p и, следовательно, $M_{\bar{p}}$. Таким образом, в многообразии M_{m_2} получим семейство слоев $M_{\bar{p}}$, зависящее от тех же t параметров. Назовем M_p слоем многообразия M_{m_1}. Слои M_p и $M_{\bar{p}}$, соответствующие тем же значениям этих t параметров, назовем соответственными.

Покажем, что t-параметрическое семейство слоев $M_{\bar{p}}$ покрывает, хотя бы однократно, многообразие M_{m_2}. Для этого достаточно показать, что любая точка $\bar{A}$ многообразия M_{m_2} принадлежит хотя бы одному слою $M_{\bar{p}}$ этого семейства, что легко доказывается. Действительно, пусть $\bar{A}$ — любая точка многообразия M_{m_2}. В наборах $(A, \bar{A})$ эта точка $\bar{A}$ находится в связи с некоторыми точками A многообразия M_{m_1}. Зафиксируем одну из этих точек A и обозначим ее через A_1. Так как t-параметрическое семейство слоев M_p заполняет многообразие M_{m_1}, то точка A_1 принадлежит некоторому слою $\underset{1}{M}_p$. Слой $\underset{1}{M}_{\bar{p}}$, соответствующий слою $\underset{1}{M}_p$, содержит точку $\bar{A}$.

Таким образом, t-параметрическое семейство слоев $M_{\bar{p}}$ покрывает многообразие M_{m_2}, и, в общем случае, может быть неоднократно. Значит, $m_2 \leqslant \bar{p} + t$.

В настоящей работе рассматривается тот частный случай, когда

$$m_2 = \bar{p} + t. \tag{1.3}$$

Ясно, что для поверхности X_m имеем:

$$m = \bar{p} + p + t. \tag{1.4}$$

Из (1.2), (1.3) и (1.4) получим

$$p = m - m_2, \tag{1.5}$$

$$\bar{p} = m - m_1, \tag{1.6}$$

$$t = m_1 + m_2 - m. \tag{1.7}$$

Таким образом, рассмотрим такую поверхность X_m, для которой многообразия M_{m_1} и M_{m_2} расслаиваются так, что многообразие M_{m_1} однократно покрывается $m_1 + m_2 - m$-параметрическим семейством слоев $M_{m - m_2}$, а многообразие M_{m_2} однократно покрывается семейством слоев $M_{m - m_1}$, зависящих от тех же параметров.

Уравнения M_{m_1} в M_n следующие

$$u^a = u^a (v^{\rho_1}), \tag{1.8}$$

где v^{ρ_1} $(\rho_1, \sigma_1, \tau_1, \mu_1 = 1, 2, \cdots, m_1)$ — криволинейные координаты M_{m_1}.

Аналогично, уравнения M_{m_2} в M_{n_2} запишутся так

$$u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}} (\overline{v}^{\rho_2}), \tag{1.9}$$

где $\overline{v}^{\rho_2}$ $(\rho_2, \sigma_2, \tau_2, \mu_2 = m - m_2 + 1, \cdots, m)$ — криволинейные координаты M_{m_2}. Так как многообразие M_{m_1} покрывается однократно $m_1 + m_2 - m$-параметрическим семейством слоев M_{m-m_2}, то ее криволинейные координаты v^{ρ_1} $(\rho_1 = 1, 2, \cdots, m_1)$ можно выбрать так, чтобы $m - m_2$ из них являлись внутренними координатами слоя, а остальные — параметрами семейства.

Не нарушая общности, первые $m - m_2$ из координат v^{ρ_1} $(\rho_1 = 1, 2, \cdots, m_1)$ можно считать внутренними координатами слоя M_{m-m_2} и обозначить через v^i $(i, j, k, l = 1, 2, \cdots, m - m_2)$, а последние $m_1 + m_2 - m$ координаты — параметрами семейства слоев M_{m-m_2} и обозначить через v^ρ $(\rho, \sigma, \tau, \mu = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$. Рассуждая аналогично, из координат $\overline{v}^{\rho_2}$ $(\rho_2 = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$ последние $m - m_1$ можно считать внутренними координатами слоя M_{m-m_1} и обозначить через $\overline{v}^{\overline{i}}$ $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}, \overline{l} = m_1 + 1, \cdots, m)$, а первые $m_1 + m_2 - m$ координаты — параметрами семейства слоев M_{m-m_1} и обозначить через $\overline{v}^\rho$ $(\rho, \sigma, \tau, \mu = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$. Так как слои M_{m-m_2} и M_{m-m_1} соответствуют друг другу, то можно положить $v^\rho = \overline{v}^\rho$ и уравнения (1.8) и (1.9) переписать в виде

$$u^a = u^a (v^i, v^\rho), \tag{1.10}$$

$$u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}} (v^\rho, \overline{v}^{\overline{i}}). \tag{1.11}$$

Точки поверхности X_m находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными наборами $(A, \overline{A})$ точек A и $\overline{A}$, принадлежащих соответственным слоям M_{m-m_2} и M_{m-m_1}, т. е. точек $A(v^i, v^\rho)$ и $\overline{A}(v^\rho, \overline{v}^{\overline{i}})$. Следовательно, параметры v^i, v^ρ, $\overline{v}^{\overline{i}}$ можно выбрать как криволинейные координаты X_m в V_n. Так как $(u^a, u^{\overline{a}})$ являются криволинейными координатами V_n, то уравнения (1.10) и (1.11) вместе являются уравнениями поверхности X_m в V_n. Поскольку координаты $\overline{v}^{\overline{i}}$ $(\overline{i} = m_1 + 1, \cdots, m)$ отличаются от координат v^i $(i = 1, 2, \cdots, m - m_2)$, v^ρ $(\rho = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$ своими номерами, заменим их через $v^{\overline{i}}$ и уравнения поверхности X_m запишем в виде

$$u^a = u^a (v^i, v^\rho), \quad u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}} (v^\rho, v^{\overline{i}}). \tag{1.12}$$

2. Обозначим первую позицию через V_{n_1}, а вторую — через V_{n_2}. Криволинейными координатами V_{n_1} и V_{n_2} можно считать соответственно

$$u^a \ (a, b, c, d = 1, 2, \cdots, n_1) \text{ и } u^{\overline{a}} \ (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} = n_1 + 1, \cdots, n).$$

Любой индекс, принадлежащий совокупности индексов i, ρ и $\overline{i}$, обозначим через α $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \cdots, m)$.

Касательные векторы X_m будем обозначать через $(\xi^a_\alpha, \xi^{\bar a}_\alpha)$, т. е.

$$\xi^a_\alpha = \frac{\partial u^a}{\partial v^\alpha}, \quad \xi^{\bar a}_\alpha = \frac{\partial u^{\bar a}}{\partial v^\alpha}.$$

Так как уравнения поверхности X_m имеют вид (1.12), то касательными векторами будут векторы $(\xi^a_l, 0)$, $(\xi^a_\rho, \xi^{\bar a}_\rho)$, $(0, \xi^{\bar a}_{\bar l})$.

За нормальные векторы X_m выберем векторы $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$, $(\underset{s}{\nu^a}, \underset{s}{\nu^{\bar a}})$, $(0, \underset{s_2}{\nu^{\bar a}})$, определяемые следующими уравнениями:

$$\underset{s_1}{\nu^a}\, \xi^b_{\rho_1} g_{ab} = 0, \tag{2.1}$$

$$\underset{s_2}{\nu^{\bar a}}\, \xi^{\bar b}_{\rho_2} g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.2}$$

$$\underset{s}{\nu^a}\, \xi^b_l g_{ab} = 0, \tag{2.3}$$

$$\underset{s}{\nu^{\bar a}}\, \xi^{\bar b}_{\bar l} g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.4}$$

$$\underset{s}{\nu^a}\, \xi^b_\rho g_{ab} + \underset{s}{\nu^{\bar a}}\, \xi^{\bar b}_\rho g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.5}$$

$$\underset{s}{\nu^a}\, \underset{s_1}{\nu^b}\, g_{ab} = 0, \tag{2.6}$$

$$\underset{s}{\nu^{\bar a}}\, \underset{s_2}{\nu^{\bar b}}\, g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.7}$$

$$(p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 = 1, 2, \cdots, n_1 - m_1), \ (p, q, r, s, t = n_1 - m_1 + 1, \cdots, n_1 + m_2 - m), \ (p_2, q_2, r_2, s_2, t_2 = n_1 + m_2 - m + 1, \cdots, n - m),$$

где g_{ab} и $g_{\bar a \bar b}$ — метрические тензоры V_{n_1} и V_{n_2} соответственно. В дальнейшем буквами p, q, r, s, t обозначаются номера нормальных векторов типа $(\underset{s}{\nu^a}, \underset{s}{\nu^{\bar a}})$, в отличие от первого пункта, где эти буквы имели другое значение.

Поверхность, определяемую уравнениями

$$u^a = u^a (v^{\rho_1}), \tag{2.8}$$

назовем проекцией X_m на V_{n_1} или первой проекцией X_m и обозначим через $'X_{m_1}$.

Аналогично, поверхность, определяемую уравнениями

$$u^{\bar a} = u^{\bar a} (v^{\rho_2}), \tag{2.9}$$

назовем проекцией X_m на V_{n_2} или второй проекцией X_m и обозначим через $'\overline{X}_{m_2}$.

В дальнейшем, если речь идет о поверхностях $'X_{m_1}$, $'\overline{X}_{m_2}$ и X_m, то всегда предполагается, что они рассматриваются в V_{n_1}, V_{n_2} и V_n соответственно, пока не оговорено противное.

Касательными векторами $'X_{m_1}$ будут векторы $\xi^a_{\rho_1}$, а касательными векторами $'\overline{X}_{m_2}$ — векторы $\xi^{\overline{a}}_{\rho_2}$. Из (2.1) и (2.2) видно, что $\underset{s_1}{\nu^a}$ являются нормальными векторами $'X_{m_1}$, а $\underset{s_2}{\nu^{\overline{a}}}$ — нормальными векторами $'\overline{X}_{m_2}$.

Сравнивая (2.1) и (2.6), получим

$$\underset{s}{\nu^a} = \underset{s}{\lambda^{\sigma_1}} \xi^a_{\sigma_1} \tag{2.10}$$

и, аналогично,

$$\underset{s}{\nu^{\overline{a}}} = \underset{s}{\overline{\lambda}^{\sigma_2}} \xi^{\overline{a}}_{\sigma_2}. \tag{2.11}$$

Используя (2.10) и (2.11), из (2.3), (2.4) и (2.5) имеем соответственно

$$\underset{s}{\lambda^{\rho_1}}\, 'g_{\rho_1 i} = 0, \tag{2.12}$$

$$\underset{s}{\overline{\lambda}^{\rho_2}}\, '\overline{g}_{\rho_2 \overline{i}} = 0, \tag{2.13}$$

$$\underset{s}{\lambda^{\rho_1}}\, 'g_{\rho_1 \sigma} + \underset{s}{\overline{\lambda}^{\rho_2}}\, '\overline{g}_{\rho_2 \sigma} = 0, \tag{2.14}$$

где $'g_{\rho_1 \sigma_1}$ и $'\overline{g}_{\rho_2 \sigma_2}$ — метрические тензоры $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$ соответственно. Нормальные векторы X_m выберем единичными и ортогональными, т. е.

$$\underset{s_1}{\nu^a}\, \underset{t_1}{\nu^b}\, g_{ab} = g_{s_1 t_1} = \begin{cases} 0, & \text{если } s_1 \neq t_1 \\ 1, & \text{если } s_1 = t_1, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\underset{s_2}{\nu^{\overline{a}}}\, \underset{t_2}{\nu^{\overline{b}}}\, g_{\overline{a}\,\overline{b}} = g_{s_2 t_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } s_2 \neq t_2 \\ 1, & \text{если } s_2 = t_2, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\underset{s}{\nu^a}\, \underset{t}{\nu^b}\, g_{ab} + \underset{s}{\nu^{\overline{a}}}\, \underset{t}{\nu^{\overline{b}}}\, g_{\overline{a}\,\overline{b}} = g_{st} = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq t \\ 1, & \text{если } s = t. \end{cases} \tag{2.17}$$

Опускание и поднятие индексов s_1, s и s_2 производится тензорами $g_{s_1 t_1}$, g_{st} и $g_{s_2 t_2}$ соответственно.

Используя (2.10) и (2.11), из (2.17) получим

$$\underset{s}{\lambda^{\rho_1}}\, \underset{t}{\lambda^{\sigma_1}}\, 'g_{\rho_1 \sigma_1} + \underset{s}{\overline{\lambda}^{\rho_2}}\, \underset{t}{\overline{\lambda}^{\sigma_2}}\, '\overline{g}_{\rho_2 \sigma_2} = g_{st}. \tag{2.18}$$

3. Найдем связь между основными величинами поверхности и ее проекцией.

Легко видеть, что

$$g_{i\rho_1} = 'g_{i\rho_1}, \quad g_{\overline{i}\rho_2} = '\overline{g}_{\overline{i}\rho_2}, \quad g_{\rho\sigma} = 'g_{\rho\sigma} + '\overline{g}_{\rho\sigma}, \quad g_{i\overline{j}} = 0, \tag{3.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор X_m. В дальнейшем основные величины поверхностей X_m, $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$ будем обозначать одинаковыми буквами с добавлением для поверхности $'X_{m_1}$ знака (') штрих слева, а для поверхности $'\overline{X}_{m_2}$ — знака (') штрих слева и надчеркиванием, как это уже сделано в (3.1).

Основные уравнения X_m ([3], стр. 193) распадаются на

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \xi^a_\beta = \overset{s_1}{b}_{\alpha\beta} \underset{s_1}{\nu}^a + \overset{s}{b}_{\alpha\beta} \underset{s}{\nu}^a, \tag{3.2}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \xi^{\bar a}_\beta = \overset{s}{b}_{\alpha\beta} \underset{s}{\nu}^{\bar a} + \overset{s_2}{b}_{\alpha\beta} \underset{s_2}{\nu}^{\bar a}, \tag{3.3}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \underset{s_1}{\nu}^a = - \underset{s_1}{b}^{\sigma_1}_\alpha \xi^a_{\sigma_1} + \underset{\cdot s_1}{\overset{s_1}{n}}{}_\alpha \underset{s_1}{\nu}^a + \underset{\cdot s_1}{\overset{s}{n}}{}_\alpha \underset{s}{\nu}^a, \tag{3.4}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \underset{s_2}{\nu}^{\bar a} = - \underset{s_2}{b}^{\sigma_2}_\alpha \xi^{\bar a}_{\sigma_2} + \underset{\cdot s_2}{\overset{s}{n}}{}_\alpha \underset{s}{\nu}^{\bar a} + \underset{\cdot s_2}{\overset{s_2}{n}}{}_\alpha \underset{s_2}{\nu}^{\bar a}, \tag{3.5}$$

с условиями интегрируемости

$$\overset{\bullet}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \xi^a_\alpha \xi^b_\beta \xi^c_\gamma \xi^d_\delta R_{abcd} + \xi^{\bar a}_\alpha \xi^{\bar b}_\beta \xi^{\bar c}_\gamma \xi^{\bar d}_\delta R_{\bar a \bar b \bar c \bar d} + 2 \overset{s_3}{b}_{\gamma[\alpha} \underset{s_3}{b}_{\beta]\delta}, \tag{3.6}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \underset{s_3}{b}_{\beta\gamma} - \overset{\bullet}{\nabla}_\beta \underset{s_3}{b}_{\alpha\gamma} = - \xi^a_\alpha \xi^b_\beta \xi^c_\gamma \underset{s_3}{\nu}^d R_{abcd} - \xi^{\bar a}_\alpha \xi^{\bar b}_\beta \xi^{\bar c}_\gamma \underset{s_3}{\nu}^{\bar d} R_{\bar a \bar b \bar c \bar d} + 2 \overset{t_3}{b}_{\gamma[\beta} \underset{t_3 s_3}{n}{}_{\alpha]}, \tag{3.7}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_{[\alpha} \underset{t_3 s_3}{n}{}_{\beta]} + g^{\gamma\delta} \underset{t_3}{b}_{\gamma[\beta} \underset{s_3}{b}_{\alpha]\delta} + g^{p_3 r_3} \underset{p_3 t_3}{n}{}_{[\beta} \underset{r_3 s_3}{n}{}_{\alpha]} = \frac{1}{2} \xi^a_\alpha \xi^b_\beta \underset{t_3}{\nu}^c \underset{s_3}{\nu}^d R_{abcd} +$$

$$+ \frac{1}{2} \xi^{\bar a}_\alpha \xi^{\bar b}_\beta \underset{t_3}{\nu}^{\bar c} \underset{s_3}{\nu}^{\bar d} R_{\bar a \bar b \bar c \bar d}, \tag{3.8}$$

где через s_3 обозначен любой из совокупности индексов s_1, s, s_2, т. е. (p_3, q_3, r_3, s_3, $t_3 = 1, 2, \cdots, n - m$). Уравнение (3.2) в развернутом виде, при $\alpha = \rho_1$, $\beta = \sigma_1$ имеет вид,

$$\partial_{\rho_1} \xi^a_{\sigma_1} - \overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1\sigma_1} \xi^a_{\tau_1} + G^a_{bc} \xi^b_{\rho_1} \xi^c_{\sigma_1} = b_{\rho_1\sigma_1} \underset{s_1}{\nu}^a + \overset{s}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s}{\nu}^a. \tag{3.9}$$

Так как $\xi^a_{\sigma_1}$ есть касательные, а $\underset{s_1}{\nu}^a$ — нормальные векторы $'X_{m_1}$, имеем

$$\partial_{\rho_1} \xi^a_{\sigma_1} - {}'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1\sigma_1} \xi^a_{\tau_1} + G^a_{bc} \xi^b_{\rho_1} \xi^c_{\sigma_1} = {}'\overset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s_1}{\nu}^a. \tag{3.10}$$

Вычитая (3.10) из (3.9) и используя (2.10), получим

$$\overset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} = {}'\overset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} \tag{3.11}$$

и

$${}'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1\sigma_1} - \overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1\sigma_1} = \overset{s}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s}{\lambda}^{\tau_1}. \tag{3.12}$$

Аналогично

$$\overset{s_2}{b}_{\rho_2\sigma_2} = {}'\overset{s_2}{\bar b}_{\rho_2\sigma_2}, \tag{3.13}$$

и

$${}'\overset{\bullet}{\bar G}{}^{\tau_2}_{\rho_2\sigma_2} - \overset{\bullet}{G}{}^{\bar\tau_2}_{\rho_2\sigma_2} = \overset{s}{\bar b}_{\rho_2\sigma_2} \underset{s}{\bar\lambda}^{\tau_2}, \tag{3.14}$$

(3.2) в развернутом виде при $\beta = \bar i$ запишется так

$$- \overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar i \alpha} \xi^a_{\sigma_1} = \overset{s_1}{b}_{\bar i \alpha} \underset{s_1}{\nu}^a + \overset{s}{b}_{\bar i \alpha} \underset{s}{\nu}^a,$$

откуда, используя (2.10), получим

$$\overset{s}{b}_{\bar i\alpha}=0, \tag{3.15}$$

и

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar i\alpha}=\overset{s}{b}_{\bar i\alpha}\underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}. \tag{3.16}$$

Аналогично получим

$$\overset{s}{b}_{i\beta}=0, \tag{3.17}$$

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_2}_{i\beta}=\overset{s}{b}_{i\beta}\underset{s}{\bar\lambda}{}^{\sigma_2}. \tag{3.18}$$

Свертывая (2.16) и (2.18) с $\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}$ и $\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}$ соответственно и складывая, получим

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar i\alpha}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_2}_{i\beta}\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}=\overset{s}{b}_{\bar i\alpha}\underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}+\overset{s}{b}_{i\beta}\underset{s}{\bar\lambda}{}^{\sigma_2}\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}.$$

Отсюда, согласно (2.12) и (2.13), при $\alpha=j$, $\beta=\bar i$ имеем

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma}_{\bar i j}\left(\underset{s}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\mu_1\sigma}+\underset{s}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\mu_2\sigma}\right)=\overset{s}{b}_{\bar i j}\left(\underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}+\underset{s}{\bar\lambda}{}^{\sigma_2}\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}\right)$$

или, используя (2.14) и (2.18), получим

$$\underset{t}{b}_{\bar i j}=0. \tag{3.19}$$

Подставляя выражение $\underset{t}{b}_{\bar i j}$ из (3.19) в (3.16), при $\alpha=j$ получим

$$\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar i j}=0 \tag{3.20}$$

и, аналогично,

$$\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_2}_{\bar i j}=0. \tag{3.21}$$

Свертывая (3.12) и (3.18) с $\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}$ и $\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}$ соответственно и складывая, при $\rho_1=j$, $\beta=\sigma_1$, получим

$${}'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{j\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}-\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{j\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_2}_{j\sigma_1}\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}=\overset{s}{b}_{j\sigma_1}\left(\underset{s}{\lambda}{}^{\tau_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}+\underset{s}{\bar\lambda}{}^{\tau_2}\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\tau_2\mu_2}\right)$$

или, используя (2.12), (2.13) (2.18), будем иметь

$$\underset{t}{b}_{j\sigma_1}={}'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau}_{j\sigma_1}{}'g_{\tau\mu_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}. \tag{3.22}$$

Точно так же

$$\underset{t}{b}_{\bar j\sigma_1}={}'\overset{\bullet}{\bar G}{}^{\tau}_{\bar j\sigma_1}{}'\bar g_{\tau\mu_2}\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}. \tag{3.23}$$

Свертывая (3.12) с $\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}$ при $\rho_1=\rho$, $\sigma_1=\sigma$, а (3.14) с $\underset{t}{\bar\lambda}{}^{\mu_2}{}'\bar g_{\tau_2\mu_2}$ при $\rho_2=\rho$, $\sigma_2=\sigma$, складывая полученные равенства и используя (2.12), (2.13), (2.14) и (2.18), получим

$$\underset{t}{b}_{\rho_2} = \left({}'\overset{\bullet}{G}_{\rho_2} - {}'\overset{\bullet}{\overline{G}}_{\rho_2}\right){}'g_{\sigma_1\rho_1}\underset{t}{\lambda}^{\sigma_1}. \tag{3.24}$$

Легко видеть, что

$$\underset{s_1}{\overset{\bullet}{\nabla}_{\rho_1}} \nu^a = {}'\underset{s_1}{\overset{\bullet}{\nabla}_{\rho_1}} \nu^a.$$

где ${}'\overset{\bullet}{\nabla}$ — символ смешанного ковариантного дифференцирования в V_{n_1}. Имея в виду это равенство, из (3.4) при $\alpha = \rho_1$, $s_3 = s_1$ имеем

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}\xi^a_{\sigma_1} + \underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\rho_1}\underset{t_1}{\nu}^a + \underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_1}\underset{t}{\nu}^a = -{}'\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}\xi^a_{\sigma_1} + {}'\underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\rho_1}\underset{t_1}{\nu}^a. \tag{3.25}$$

Свертывая (3.25) с $\underset{p_1}{\nu}^b g_{ab}$ и используя (2.1), (2.6) и (2.15), получим

$$\underset{p_1 s_1}{n}{}_{\rho_1} = {}'\underset{p_1 s_1}{n}{}_{\rho_1} \tag{3.26}$$

и

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1} + \underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_1}\underset{t}{\lambda}^{\sigma_1} = -{}'\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}. \tag{3.27}$$

Аналогично

$$\underset{p_2 s_2}{n}{}_{\rho_2} = {}'\underset{p_2 s_2}{\overline{n}}{}_{\rho_2}. \tag{3.28}$$

$$-\underset{s_2}{b}{}^{\sigma_2}_{\rho_2} + \underset{\cdot s_2}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_2}\underset{t}{\overline{\lambda}}^{\sigma_2} = -{}'\underset{s_2}{\overline{b}}{}^{\sigma_2}_{\rho_2}. \tag{3.29}$$

Из (3.15), (3.4) при $\alpha = \overline{l}$, $s_3 = s_1$ имеем

$$\partial_{\overline{l}}\underset{s_1}{\nu}^a = \underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\overline{l}}\underset{t_1}{\nu}^a + \underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\overline{l}}\underset{t}{\nu}^a \tag{3.30}$$

и, аналогично,

$$\partial_l \underset{s_2}{\nu}^{\overline{a}} = \underset{\cdot s_2}{\overset{t}{n}}{}_l\underset{t}{\nu}^{\overline{a}} + \underset{\cdot s_2}{\overset{t_2}{n}}{}_l\underset{t_2}{\nu}^{\overline{a}}. \tag{3.31}$$

Легко видеть, что

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \underset{s_1}{\nu}^{\overline{a}} = 0. \tag{3.32}$$

Используя (3.32), из (3.5) при $s_3 = s_1$ получим

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_2}_{\alpha}\xi^{\overline{a}}_{\sigma_2} + \underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_\alpha\underset{t}{\nu}^{\overline{a}} + \underset{\cdot s_1}{\overset{t_2}{n}}{}_\alpha\underset{t_2}{\nu}^{\overline{a}} = 0. \tag{3.33}$$

Откуда, согласно (2.10)

$$\underset{\cdot s_1}{\overset{t_2}{n}}{}_\alpha = 0, \tag{3.34}$$

и

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_2}_{\alpha} + \underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_\alpha\underset{t}{\overline{\lambda}}^{\sigma_2} = 0. \tag{3.35}$$

Аналогично получим $\underset{\cdot s_2}{\overset{t_1}{n}}{}_\alpha = 0$, что совпадает с (3.34) и

$$-\underset{s_2}{b}{}^{\alpha_1}_{\alpha} + \underset{\cdot s_2}{\overset{+}{n}}{}_{\alpha}\, \underset{t}{\lambda}{}^{\alpha_1} = 0. \tag{3.36}$$

Используя (3.15) и (3.34), из (3.33) при $\alpha = \bar{i}$ получим

$$\underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\bar{i}}\, \underset{t}{\nu}{}^{\bar{a}} = 0. \tag{3.37}$$

Ранг матрицы $\|\underset{t}{\nu}{}^{\bar{a}}\|$ равен $m_1 + m_2 - m$, так как в противном случае число нормалей $(\underset{s}{\nu}{}^{a}, \underset{s}{\nu}{}^{\bar{a}})$ можно уменьшить путем выбора другой системы нормальных векторов, а это невозможно, в силу (2.1)—(2.7). Из (3.37) имеем

$$\underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\bar{i}} = 0 \tag{3.38}$$

и, аналогично,

$$\underset{\cdot s_2}{\overset{t}{n}}{}_{i} = 0. \tag{3.39}$$

Подставляя выражение $\underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\bar{i}}$ из (3.38) в (3.30), получим

$$\partial_{\bar{i}}\, \underset{s_1}{\nu}{}^{a} = \underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}}\, \underset{t_1}{\nu}{}^{a}\,. \tag{3.40}$$

Покажем, что $\underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}} = 0$. Действительно, выберем другую систему нормальных векторов так, чтобы нормальные векторы $(\underset{s}{\nu}{}^{a}, \underset{s}{\nu}{}^{\bar{a}})$ и $(0, \underset{s_2}{\nu}{}^{\bar{a}})$ оставались неизменными, а нормальные векторы $(\underset{s_1}{\nu}{}^{a}, 0)$ менялись по закону

$$\underset{s_1}{\tilde{\nu}}{}^{a} = \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}\, \underset{t_1}{\nu}{}^{a}\,, \tag{3.41}$$

где $det \left\| \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}} \right\| \neq 0$.

Из (3.41), используя (3.40), получим

$$\partial_{\bar{i}}\, \underset{s_1}{\tilde{\nu}}{}^{a} = \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar{i}}\, \underset{t_1}{\nu}{}^{a} + \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}\, \underset{\cdot t_1}{\overset{p_1}{n}}{}_{\bar{i}}\, \underset{p_1}{\nu}{}^{a}.$$

Покажем, что $\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}$ можно выбрать так, чтобы $\partial_{\bar{i}}\, \underset{s_1}{\tilde{\nu}}{}^{a} = 0$, т. е.

$$\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar{i}}\, \underset{t_1}{\nu}{}^{a} + \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}\, \underset{\cdot t_1}{\overset{p_1}{n}}{}_{\bar{i}}\, \underset{p_1}{\nu}{}^{a} = 0$$

или

$$\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar{i}} + \underset{s_1}{\overset{p_1}{\mu}}\, \underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}} = 0\,. \tag{3.42}$$

Составим условия интегрируемости (3.42)

$$\overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar{j}}\, \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar{i}]} = -\underset{s_1}{\overset{p_1}{\mu}}\, \overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar{j}}\, \underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}]} + \underset{s_1}{\overset{r_1}{\mu}}\, \underset{\cdot r_1}{\overset{p_1}{n}}{}_{[\bar{j}}\, \underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}]} = 0$$

или

$$-\underset{s_1}{\overset{p_1}{\mu}}\left(\overset{*}{\nabla}_{[\bar{i}}\, \underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{j}]} - \underset{\cdot p_1}{\overset{r_1}{n}}{}_{[\bar{j}}\, \underset{\cdot r_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}]}\right) = 0,$$

то есть

$$\overset{*}{\nabla}_{[\bar{j}}\, \underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}]} - \underset{p_1}{\overset{s_1}{n}}{}_{[\bar{j}}\, \underset{\cdot r_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}]} = 0. \tag{3.43}$$

Легко видеть, что (3.43) получается из (3.8) при $\alpha = \bar{i}$, $\beta = \bar{j}$, $t_3 = t_1$, $s_3 = p_1$. Таким образом, условия интегрируемости (3.42) выполняются и, следовательно, можно выбрать $\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}$ так, чтобы $\partial_{\bar{i}} \underset{s_1}{\tilde{\nu}^a} = 0$. В дальнейшем опустим знак ($\sim$) (тильда) и будем считать

$$\partial_{\bar{i}} \underset{s_1}{\nu^a} = 0. \tag{3.44}$$

Используя (3.44), получим из (3.40)

$$\underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar{i}} = 0 \tag{3.45}$$

и, аналогично,

$$\underset{\cdot s_2}{\overset{t_2}{n}}{}_{i} = 0. \tag{3.46}$$

Очевидно

$$\overset{*}{\nabla}_{\rho_1} \underset{s}{\nu^a} = {}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1} \underset{s}{\nu^a}. \tag{3.47}$$

Согласно (3.47), из (3.4) при $\alpha = \rho_1$, $s_3 = s$ имеем

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1} \underset{s}{\nu^a} = -\underset{s}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}\, \xi^a_{\sigma_1} + \underset{\cdot s}{\overset{t_1}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t_1}{\nu^a} + \underset{\cdot s}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t}{\nu^a}$$

или, подставляя выражение для $\underset{s}{\nu^a}$ из (2.10), получим

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1} \underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\, \xi^a_{\sigma_1} + \underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\, {}'\overset{*}{\Gamma}_{\rho_1}\, \xi^a_{\sigma_1} = -\underset{s}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}\, \xi^a_{\sigma_1} + \underset{\cdot s}{\overset{t_1}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t_1}{\nu^a} + \underset{\cdot s}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t}{\lambda}{}^{\sigma_1}\, \xi^a_{\sigma_1}$$

или

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1} \underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\, \xi^a_{\sigma_1} + \underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\, {}'\overset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s_1}{\nu^a} = -\underset{s}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}\, \xi^a_{\sigma_1} + \underset{\cdot s}{\overset{t_1}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t_1}{\nu^a} + \underset{\cdot s}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t}{\lambda}{}^{\sigma_1}\, \xi^a_{\sigma_1},$$

откуда

$$\underset{\cdot s}{\overset{t_1}{n}}{}_{\rho_1} = {}'\overset{t_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1} \tag{3.48}$$

и

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1} \underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1} = -\underset{s}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1} + \underset{\cdot s}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t}{\lambda}{}^{\sigma_1}. \tag{3.49}$$

Аналогично, получим

$$\underset{\cdot s}{\overset{t_2}{n}}{}_{\rho_2} = {}'\overset{t_2}{\bar{b}}_{\rho_2\sigma_2} \underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2} \tag{3.50}$$

и

$${}'\overset{*}{\bar{\nabla}}_{\rho_2} \underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2} = -\underset{s}{b}{}^{\sigma_2}_{\rho_2} + \underset{\cdot s}{\overset{t}{n}}{}_{\rho_2} \underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2}, \tag{3.51}$$

где ${}'\overset{*}{\bar\nabla}$ — символ смешанного ковариантного дифференцирования в V_{n_2}. Используя (3.38), из (3.4) при $\alpha = i$, $s_3 = s$ получим

$$\partial_{\bar i}\, \underset{s}{\nu}^a = -\underset{s}{b}^{\alpha_1}_{\bar i}\, \xi^a_{\alpha_1} + \underset{\cdot s}{n}{}^{t}_{\bar i}\, \underset{t}{\nu}^a \cdot$$

Подставляя сюда выражение для $\underset{s}{\nu}^a$ из (2.10), получим

$$\partial_{\bar i}\underset{s}{\lambda}^{\alpha_1}\, \xi^a_{\alpha_1} = -\underset{s}{b}^{\alpha_1}_{\bar i}\, \xi^a_{\alpha_1} + \underset{\cdot s}{n}{}^{t}_{\bar i}\, \underset{t}{\lambda}^{\alpha_1}\xi^a_{\alpha_1},$$

откуда

$$\partial_{\bar i}\, \underset{s}{\lambda}^{\alpha_1} = -\underset{s}{b}^{\alpha_1}_{\bar i} + \underset{\cdot s}{n}{}^{t}_{\bar i}\, \underset{t}{\lambda}^{\alpha_1} \tag{3.52}$$

и, аналогично,

$$\partial_i\, \underset{s}{\bar\lambda}^{\alpha_2} = -\underset{s}{b}^{\alpha_2}_i + \underset{\cdot s}{n}{}^{t}_i\, \underset{t}{\bar\lambda}^{\alpha_2} \cdot \tag{3.53}$$

Принимая в (3.49) $\rho_1 = \rho$, а в (3.51) — $\rho_2 = \rho$ и свертывая полученные равенства соответственно с $\underset{p}{\lambda}^{\mu_1}\,{}'g_{\sigma_1\mu_1}$ и $\underset{p}{\lambda}^{\mu_2}\,{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}$, складывая затем их и используя (2.12), (2.13), (2.14), (2.18), получим

$$\underset{ps}{n}_\rho = {}'g_{\mu_1\sigma_1}\, \underset{p}{\lambda}^{\mu_1}\, {}'\overset{*}{\nabla}_\rho \underset{s}{\lambda}^{\sigma_1} + {}'\bar g_{\mu_2\sigma_2}\, \underset{p}{\bar\lambda}^{\mu_2}\, {}'\overset{*}{\bar\nabla}_\rho\, \underset{s}{\bar\lambda}^{\sigma_2}. \tag{3.54}$$

Принимая в (3.49) $\rho_1 = i$ и свертывая полученное равенство и (3.53) с $\underset{p}{\lambda}^{\mu_1}\,{}'g_{\sigma_1\mu_1}$ и $\underset{p}{\bar\lambda}^{\mu_2}\,{}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}$ соответственно, складывая и используя (2.12), (2.13), (2.14) и (2.15), получим

$$\underset{ps}{n}_i = \underset{p}{\lambda}^{\mu_1}\,{}'g_{\sigma_1\mu_1}\, {}'\overset{*}{\nabla}_i\, \underset{s}{\lambda}^{\sigma_1} + \underset{p}{\bar\lambda}^{\mu_2}\, {}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}\, \partial_i\, \underset{s}{\bar\lambda}^{\sigma_2} \tag{3.55}$$

и, аналогично,

$$\underset{ps}{n}_{\bar i} = \underset{p}{\lambda}^{\mu_1}\,{}'g_{\sigma_1\mu_1}\, \partial_{\bar i}\, \underset{s}{\lambda}^{\sigma_1} + \underset{p}{\bar\lambda}^{\mu_2}\, {}'\bar g_{\sigma_2\mu_2}\, {}'\overset{*}{\bar\nabla}_{\bar i}\, \underset{s}{\bar\lambda}^{\sigma_2} \cdot \tag{3.56}$$

Таким образом, формулы (3.1), (3.11), (3.13), (3.15), (3.17), (3.19), (3.22) (3.23), (3.24), (3.26), (3.28), (3.34), (3.38), (3.39), (3.45), (3.46), (3.48), (3.50), (3.54), (3.55) и (3.56) выражают связь между основными величинами поверхности X_m и ее проекциями ${}'X_{m_1}$ и ${}'\bar X_{m_2}$. Векторы $\underset{s}{\lambda}^{\alpha_1}$ и $\underset{s}{\bar\lambda}^{\alpha_2}$, входящие в эти формулы, удовлетворяют уравнениям (2.12), (2.13), (2.14) и (2.18). Свертывая (2.14) с ${}'\bar g^{\tau\alpha_2}$, получим

$$\underset{s}{\bar\lambda}^{\beta_2}\, {}'\bar g_{\beta_2\alpha_2}\, {}'\bar g^{\tau\alpha_2} = -{}'\bar g^{\tau\alpha_2}\, {}'g_{\alpha_2\beta_1}\, \underset{s}{\lambda}^{\beta_1},$$

откуда, согласно (2.13) имеем

$$\underset{s}{\bar\lambda}^{\tau} = -{}'\bar g^{\tau\alpha_2}\, g_{\alpha_2\beta_1}\, \underset{s}{\lambda}^{\beta_1}. \tag{3.57}$$

Подставляя выражения для $\overline{\lambda}^{\rho_1}_{s}$ из (3.57) в (2.18), получим

$$\lambda^{\rho_1}_{s}\lambda^{\sigma_1}_{t}\left(g_{\rho_1\sigma_1} + {}'g^{\overline{\rho}_1\overline{\sigma}_1}\,{}'g_{\overline{\rho}_1\rho_1}\,{}'g_{\overline{\sigma}_1\sigma_1}\right) = g_{st}. \tag{3.58}$$

4. Определим взаимное расположение X_m, ${}'X_{m_1}$ и ${}'\overline{X}_{m_2}$, а также расположение X_n относительно позиций V_n и V_{n_1}. Уравнения многообразия $v^{\rho_1} = \overset{0}{v}{}^{\rho_1} = \mathrm{const}$, принадлежащего поверхности X_m, в V_n следующие:

$$u^a = u^a\,(v^i,\ \overset{0}{v}{}^{\rho}),\quad u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}}\,(\overset{0}{v}{}^{\rho}) = \mathrm{const},$$

откуда вытекает, что это многообразие принадлежит и поверхности ${}'X_{m_1}$. Назовем его первой внутренней проекцией X_m. Уравнения этого многообразия в V_{n_1} имеют вид

$$u^a = u^a\,(v^i,\ \overset{0}{v}{}^{\rho}). \tag{4.1}$$

Аналогично, многообразие $v^{\rho_1} = \overset{0}{v}{}^{\rho_1} = \mathrm{const}$, принадлежащее поверхности X_m, принадлежит и поверхности ${}'\overline{X}_{m_2}$. Назовем это многообразие второй внутренней проекцией X_m. Его уравнения в V_{n_2} будут

$$u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}}\,(\overset{0}{v}{}^{\rho},\ v^{\overline{i}}). \tag{4.2}$$

Уравнения многообразия $v^i = \overset{0}{v}{}^i = \mathrm{const}$, $v^{\overline{i}} = \overset{0}{v}{}^{\overline{i}} = \mathrm{const}$, принадлежащего поверхности X_m, в V_n следующие:

$$u^a = u^a\,(\overset{0}{v}{}^i,\ v^{\rho}),\quad u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}}\,(v^{\rho},\ \overset{0}{v}{}^{\overline{i}}). \tag{4.3}$$

Это многообразие назовем центром X_m.

Проекцию центра X_m на V_{n_1} определим уравнениями

$$u^a = u^a\,(\overset{0}{v}{}^i,\ v^{\rho}) \tag{4.4}$$

и назовем первой внешней проекцией X_m. Из (2.8) и (4.4) следует, что первая внешняя проекция принадлежит поверхности ${}'X_{m_1}$. Аналогично, проекцию центра X_m на V_{n_2} определим уравнениями

$$u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}}\,(v^{\rho},\ \overset{0}{v}{}^{\overline{i}}) \tag{4.5}$$

и назовем второй внешней проекцией X_m. Из (2.9) и (4.5) следует, что вторая внешняя проекция принадлежит поверхности ${}'\overline{X}_{m_2}$.

Из (4.4) и (4.5) вытекает, что существует взаимно однозначное соответствие между внешними проекциями X_m, а также, что v^{ρ} являются координатами, общими относительно этого соответствия.

Из (2.8), (4.1) и (4.4) следует, что поверхность ${}'X_{m_1}$ есть пространство композиции двух многообразий, позициями которых являются первая внутренняя и первая внешняя проекции X_m. Аналогично поверхность ${}'\overline{X}_{m_2}$ есть пространство композиции двух многообразий, позициями которых являются вторая внутренняя и вторая внешняя проекции X_m, а поверхность X_m есть пространство композиции трех многообразий, позициями которых являются первая и вторая внутренние проекции и центр X_m.

5. Рассмотрим подробнее как определяются внутренние и внешние проекции, а также соответствие между внешними проекциями заданием поверхности.

Прежде всего покажем, что преобразование координат, сохраняющее форму (1.12) уравнения поверхности X_m, имеет вид

$$v^l = v^l(\bar{v}^{\rho_1}),\quad v^\rho = v^\rho(\bar{v}^\alpha),\quad v^{\bar{l}} = v^{\bar{l}}(\bar{v}^{\rho_2}),\tag{5.1}$$

где $\bar{v}^\alpha$ — новые криволинейные координаты X_m.

Действительно, в новой системе координат уравнения поверхности будут

$$u^a = u^a(\bar{v}^{\rho_1}),\quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(\bar{v}^{\rho_2}),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u^a}{\partial \bar{v}^{\bar{l}}} = 0$$

или

$$\frac{\partial u^a}{\partial v^{\rho_1}}\cdot\frac{\partial v^{\rho_1}}{\partial \bar{v}^{\bar{l}}} = 0.\tag{5.2}$$

Так как ранг матрицы $\left\|\dfrac{\partial u^a}{\partial v^{\rho_1}}\right\|$ равен m_1, то из (5.2) следует, что

$$\frac{\partial v^{\rho_1}}{\partial \bar{v}^{\bar{l}}} = 0\tag{5.3}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial v^{\rho_2}}{\partial \bar{v}^{l}} = 0.\tag{5.4}$$

Легко видеть, что из (5.3) и (5.4) вытекает (5.1).

Рассмотрим внутренние проекции, как поверхности в пространстве X_m. Уравнения первой внутренней проекции в системах координат v^α и $\bar{v}^\alpha$ будут соответственно

$$v^{\rho_2} = \overset{0}{v}{}^{\rho_2} = \text{const}\tag{5.5}$$

и

$$\bar{v}^{\rho_2} = \overset{0}{\bar{v}}{}^{\rho_2} = \text{const}.\tag{5.6}$$

В силу (5.1) из (5.5) следует (5.6) и наоборот, т. е. любая точка, принадлежащая поверхности (5.5), принадлежит и поверхности (5.6) и наоборот. Значит, поверхности (5.5) и (5.6) совпадают, т. е. первая внутренняя проекция остается неизменной при преобразовании (5.1).

Аналогично показывается, что вторая внутренняя проекция остается неизменной при преобразовании (5.1).

Таким образом, заданием поверхности X_m внутренние проекции определяются однозначно.

Рассмотрим центр как поверхность в пространстве X_m. Его уравнения в системе координат v^α есть

$$v^i = \overset{0}{v}{}^i = \text{const}, \quad v^{\overline{i}} = \overset{0}{v}{}^{\overline{i}} = \text{const}, \tag{5.7}$$

а в системе координат $\tilde{v}^\alpha$

$$\tilde{v}^i = \overset{0}{\tilde{v}}{}^i = \text{const}, \quad \tilde{v}^{\overline{i}} = \overset{0}{\tilde{v}}{}^{\overline{i}} = \text{const}. \tag{5.8}$$

При преобразовании координат (5.1) из (5.7) не следует, вообще говоря, (5.8), т. е. точки, принадлежащие поверхности (5.7) не принадлежат, вообще говоря, поверхности (5.8). Значит, при преобразовании (5.1) центр изменяется и, следовательно, изменяются внешние проекции.

Итак, заданием поверхности X_m внешние проекции определяются неоднозначно и произвол их выбора сопряжен с произволом выбора систем криволинейных координат поверхности.

Посмотрим как меняется соответствие между внешними проекциями при изменении этих проекций.

Обозначая касательные векторы первой внешней проекции в пространстве $'X_{m_1}$ через $\xi^{\rho_1}_\rho$, а коэффициенты связности — через $'\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}$, можно написать

$$\partial_\sigma \xi^{\rho_1}_\rho - {}'\Gamma^{\tau}_{\sigma\rho} \xi^{\rho_1}_\tau + {}'\dot{G}^{\rho_1}_{\sigma_1\tau_1} \xi^{\sigma_1}_\sigma \xi^{\tau_1}_\rho = \overset{l}{B}_{\rho\sigma} \underset{l}{\nu}{}^{\rho_1}, \tag{5.9}$$

где $\overset{l}{B}_{\rho\sigma}$ — вторые тензоры, а $\underset{l}{\nu}{}^{\rho_1}$ — нормальные векторы первой внешней проекции в пространстве $'X_{m_1}$. Поскольку

$$\xi^{\rho_1}_\rho = \frac{\partial v^{\rho_1}}{\partial v^\rho} = \delta^{\rho_1}_\rho,$$

то из (5.9) получим

$$-{}'\Gamma^{\tau}_{\sigma\rho} \delta^{\rho_1}_\tau + {}'\dot{G}^{\rho_1}_{\sigma\rho} = \overset{l}{B}_{\rho\sigma} \underset{l}{\nu}{}^{\rho_1},$$

откуда при $\rho_1 = \mu$ имеем

$$-{}'\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} + {}'\dot{G}^{\mu}_{\sigma\rho} = \overset{l}{B}_{\sigma\rho} \underset{l}{\nu}{}^{\mu}. \tag{5.10}$$

Аналогично

$$-{}'\overline{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\rho} + {}'\dot{\overline{G}}{}^{\mu}_{\sigma\rho} = \overset{\overline{l}}{B}_{\sigma\rho} \underset{\overline{l}}{\nu}{}^{\mu}, \tag{5.11}$$

где $'\overline{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\rho}$ — коэффициенты связности, $\overset{\overline{l}}{B}_{\sigma\rho}$ — вторые тензоры и $\underset{\overline{l}}{\nu}{}^{\rho_1}$ — нормальные векторы второй внешней проекции в пространстве $'\overline{X}_{m_2}$.

Вычитая (5.10) из (5.11), получим

$$T^{\mu}_{\sigma\rho} = \left({}'\overset{+}{G}{}^{\mu}_{\sigma\rho} - {}'\overset{+}{\bar{G}}{}^{\mu}_{\sigma\rho}\right) + \overset{\bar{1}}{B}_{\sigma\rho}\underset{\bar{1}}{\nu}{}^{\mu} - \overset{1}{B}_{\sigma\rho}\underset{1}{\nu}{}^{\mu}, \tag{5.12}$$

где

$$T^{\mu}_{\sigma\rho} = {}'\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} - {}'\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\rho} \tag{5.13}$$

тензор аффинной деформации внешних проекций.

Таким образом, при изменении внешних проекций соответствие между ними изменяется так, что тензор аффинной деформации удовлетворяет условию (5.12).

6. Покажем, что основные величины поверхности X_m определяются заданием основных величин проекций $'X_{m_1}$ и $'\bar{X}_{m_2}$, основных величин внутренних и внешних проекций и соответствия между внешними проекциями.

Действительно, основные величины поверхности X_m по формулам (3.1), (3.11). (3.13), (3.15), (3.17), (3.19), (3.22), (3.23), (3.24), (3.26), (3.28), (3.34), (3.38), (3.39), (3.45), (3.46), (3.48), (3.50), (3.54), (3.55) и (3.56) определяются данными величинами и векторами $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho_1}$, определяемыми уравнениями (2.12) и (3.58). Покажем, что векторы $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho_1}$ определяются через данные величины. В самом деле, (2.12) можно записать в виде

$$\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\,'g_{\rho i} + \underset{s}{\lambda}{}^{j}\,'g_{ij} = 0. \tag{6.1}$$

Легко видеть, что $'g_{ij}$ и $'g_{\rho\sigma}$ будут метрическими тензорами первой внутренней и первой внешней проекций соответственно. Обозначим через $'\overset{\bullet}{g}{}^{ij}$ тензор, взаимный тензору $'g_{ij}$. Свертывая (6.1) с $'\overset{\bullet}{g}{}^{ik}$, получим

$$\underset{s}{\lambda}{}^{k} = -\,'\overset{\bullet}{g}{}^{ki}\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\,'g_{\rho i}. \tag{6.2}$$

Подставляя выражение $\underset{s}{\lambda}{}^{k}$ из (6.2) в (3.58), придем к соотношению

$$\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\underset{t}{\lambda}{}^{\sigma}\left('g_{\rho\sigma} + '\bar{g}^{\mu\tau}\,'g_{\mu\rho}\,'g_{\sigma\tau} - '\overset{\bullet}{g}{}^{ij}\,'g_{j\sigma}\,'g_{i\rho} - '\overset{\bullet}{g}{}^{ij}\,'g_{j\sigma}\,'g_{\tau\rho}\,'g_{i\mu}\,'\bar{g}^{\mu\tau}\right) = g_{st}$$

или, обозначая через $\overset{\bullet}{g}_{\rho\sigma}$ выражение, находящееся в скобках, получим

$$\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\underset{t}{\lambda}{}^{\sigma}\overset{\bullet}{g}_{\rho\sigma} = g_{st}, \tag{6.3}$$

откуда видно, что $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}$ есть ортогональный единичный репер в метрике $\overset{\bullet}{g}_{\rho\sigma}$.

Легко видеть, что произвол выбора такого репера сопряжен только с произволом выбора системы векторов, нормальных к X_m ([2], стр. 197).

Таким образом, векторы $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho_1}$ определяются данными величинами и, следовательно, данными величинами определяются основные величины поверхности X_m.

7. Рассмотрим некоторые свойства X_m.

Линия кривизны для нормали $\left(\underset{s_1}{\nu^a}, 0\right)$ определяется уравнениями ([2], стр. 203)

$$(\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta} + \underset{s_1}{K} g_{\alpha\beta}) dv^{\beta} = 0, \tag{7.1}$$

где $\underset{s_1}{K}$ — корни уравнения

$$|\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta} + \underset{s_1}{K} g_{\alpha\beta}| = 0. \tag{7.2}$$

Используя (3.15) для $m - m_1$ корней (7.2), получим

$$\underset{s_1}{K}_{\bar{l}} = 0. \tag{7.3}$$

Подставляя выражение $\underset{s_1}{K}_{\bar{l}}$ из (7.3) в (7.1), уравнения линий кривизны для нормали $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$, соответствующих корням $\underset{s_1}{K}_{\bar{l}}$, примут вид

$$\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta} dv^{\beta} = 0$$

или, используя (3.15)

$$\underset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} dv^{\sigma_1} = 0.$$

Отсюда следует, что любая линия на многообразии $v^{\sigma_1} = \overset{0}{v}{}^{\sigma_1} = \text{const}$ есть линия кривизны для нормали $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$.

Таким образом, приходим к выводу: *вторая внутренняя проекция есть омбилическое многообразие для нормали* $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$.

Аналогично, *первая внутренняя проекция есть омбилическое многообразие для нормали* $(0, \underset{s_2}{\nu^{\bar{a}}})$.

При изгибании проекций $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$, как следует из (3.1), поверхность X_m тоже изгибается. Из (3.22), (3.23), (3.25), (6.2) и (6.3) следует, что поверхность X_m изгибается так, что вторые тензоры $\underset{s}{b}_{\alpha\beta}$ остаются неизменными, а $\underset{s}{b}_{\alpha\beta}$ есть вторые тензоры поверхности X_m в подпространстве $V_{m_1+m_2}$ пространства V_n, являющемся топологическим произведением проекций $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$.

Итак, при изгибании проекций $'X_{m_1}$ *и* $'\overline{X}_{m_2}$ *поверхность* X_m *изгибается так, что остается неизменной в пространстве, являющемся топологическим произведением этих проекций.*

8. Покажем, что $'g_{\rho_1\sigma_1}$ не зависят от $v^{\bar{l}}$.

Действительно, имеем

$$'g_{\rho_1\sigma_1} = g_{ab} \frac{\partial u^a}{\partial v^{\rho_1}} \cdot \frac{\partial u^b}{\partial v^{\sigma_1}}. \tag{8.1}$$

Дифференцируя (8.1) по $v^{\bar{l}}$ и имея в виду, что $g_{ab}=g_{ab}(u^c)$, $u^a=u^a(v^{\bar{\imath}})$, получим

$$\partial_{\bar{l}}' g_{\rho_1\sigma_1}=0 \tag{8.2}$$

и, аналогично,

$$\partial_l{}' \bar{g}_{\rho_2\sigma_2}=0. \tag{8.3}$$

Используя (3.15), (3.34), (3.38), из (3.7) при $s_3=s_1$, $\alpha=\bar{i}$, $\beta=\rho$, $\gamma=\sigma$ выводим

$$2\overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar{l}}\underset{s_1}{b}_{\rho_1]\sigma_1}=-b_{\sigma_1\bar{l}}\overset{t}{\underset{ts_1}{n}}_{\rho_1}$$

или

$$\partial_{\bar{l}}\underset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1}-\overset{\bullet}{C}{}^{\tau_1}_{\bar{l}\sigma_1}\underset{s_1}{b}_{\tau_1\rho_1}=-\overset{t}{b}_{\sigma_1\bar{l}}\underset{ts_1}{n}_{\rho_1},$$

Откуда, согласно (3.16) и (3.48), получаем

$$\partial_{\bar{l}}\underset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1}=0 \tag{8.4}$$

и, аналогично,

$$\partial_l\underset{s_2}{b}_{\rho_2\sigma_2}=0. \tag{8.5}$$

Из (3.8) при $t_3=t_1$, $s_3=s_1$, $\alpha=\bar{i}$, $\beta=\rho_1$ имеем

$$\overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar{l}}\underset{s_1t_1}{n}_{\rho_1]}+g^{\tau\nu}\underset{t_1}{b}_{\tau[\rho_1}\underset{s_1}{b}_{\bar{l}]\nu}+g^{p_3r_3}\underset{p_3t_1}{n}_{[\rho_1}\underset{r_3s_1}{n}_{\bar{l}]}=0$$

или, используя (3.15), (3.34), (3.38) и (3.45), получим

$$\partial_{\bar{l}}\underset{s_1t_1}{n}_{\rho_1}=0 \tag{8.6}$$

и, аналогично,

$$\partial_{\bar{l}}\underset{s_2t_2}{n}_{\rho_2}=0. \tag{8.7}$$

Имея в виду формулы (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), (8.6), (8.7), придем к выводу: *на поверхности X_m есть система криволинейных координат $(v^l, v^\rho, v^{\bar{l}})$, относительно которой имеет место следующее:* а) *компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ распадаются на три группы $g_{i\alpha}$, $g_{\rho\sigma}$, $g_{\bar{l}\beta}$ так, что*

$$g_{i\alpha}=g_{i\alpha}(v^j, v^{\tau}),\quad g_{\rho\sigma}=g_{\rho\sigma}(v^l, v^{\tau}, v_{\bar{l}}),\quad g_{\bar{l}\beta}=g_{\bar{l}\beta}(v^{\tau}, v^{\bar{l}});$$

б) *вторые тензоры $\underset{s}{b}_{\alpha\beta}$ распадаются на три группы $\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta}$, $\underset{s}{b}_{\alpha\beta}$, $\underset{s_2}{b}_{\alpha\beta}$ так, что*

$$\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta}=\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta}(v^j, v^\rho),\quad \underset{s}{b}_{\alpha\beta}=\underset{s}{b}_{\alpha\beta}(v^l, v^\rho, v^{\bar{l}}),\quad \underset{s_2}{b}_{\alpha\beta}=\underset{s_2}{b}_{\alpha\beta}(v^\rho, v^{\bar{l}});$$

в) *векторы $\underset{s_3t_3}{n}_{\alpha}$ распадаются на три группы $\underset{s_1t_{12}}{n}_{\alpha}$, $\underset{st_3}{n}_{\alpha}$, $\underset{s_2t_{12}}{n}_{\alpha}$* и *так что*

$$\underset{s_1t_{12}}{n}_{\alpha}=\underset{s_1t_{12}}{n}_{\alpha}(v^l, v^\rho),\quad \underset{st_3}{n}_{\alpha}=\underset{st_3}{n}_{\alpha}(v^l, v^\rho, v^{\bar{l}}),\quad \underset{s_2t_{12}}{n}_{\alpha}=\underset{s_2t_{12}}{n}_{\alpha}(v^\rho, v^{\bar{l}}),$$

где через t_{12} обозначен любой индекс, принадлежащий совокупности индексов t_1 и t_2.

Казанский государственный
университет

Поступило 6.IV.66.

Լ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԲԵՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ մակերևույթը ռիմանյան բերված տարածության մեջ հանդիսանում է երկու բազմաձևությունների ընդհանրապես ոչ-ազատ կոմպոզիցիայի տարածություն։

Մանրամասը ուսումնասիրվում է այն մասնավոր դեպքը, երբ մակերևույթի բազիսային բազմաձևությունները ծածկվում են համապատասխան շերտերի միջոցով միապատիկ կերպով։

Ուսումնասիրված է մակերևույթի մի քանի հատկությունները, ինչպես նաև մակերևույթի մի քանի գծերի հատկությունները, որոնք բնութագրում են մակերևույթի ներքին ու արտաքին երկրաչափությունները։

L. A. MATEVOSIAN

ON SURFACES IN REDUCABLE SPACES

Summary

It is proved in the paper, that the surface in a reducable rieman space may be represented as a generally non-free composition space of two manifolds.

The case, when the basic manifolds of the surface may be covered with the corresponding layers, is studied in detail.

Several properties of the surfaces and ofsurfece lines related with internal and external geometrics, are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. П. Норден.* Пространства декартовой композиции, Изв. вузов, Матем., № 4 (1963).
2. *Л. П. Эйзенхарт.* Риманова геометрия, ГИТЛ, М. (1948).