Г. Г. ДЖЕБЕЯН, Э. Р. ЦЕКАНОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
В ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

В в е д е н и е

Изучаемая в настоящей работе задача возникла в связи с применением теории несамосопряженных операторов к вопросам распространения волн в радиоволноводах [2].

Пусть $L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство вектор-функций u (u_1, u_2, u_3), заданных в области Ω трехмерного евклидова пространства

R_3 со скалярным произведением $(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i v_i^* d\Omega$. В работах [4, 5] рас-

сматривается разбиение $L_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства и подробно исследуются в них свойства оператора rot при различных однородных краевых условиях, которым подчинены вектор-функции. Опираясь на указанные результаты, мы изучаем оператор Максвелла

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -irot \\ irot & 0 \end{pmatrix}$$

при некоторых несамосопряженных краевых условиях и устанавливаем ряд его свойств (находится вид обратного оператора T^{-1} , устанавливается его полная непрерывность, определяются реальная и мнимая части этого оператора). Основываясь на работе [8], мы строим нормированное в точке нуль обобщенное расширение оператора T . Эти исследования [2], [4, 5] применяются к вопросам распространения волн в волноводе (коаксиальной линии), оканчивающимся объемным резонатором. Оказывается, что можно написать уравнение поля внутри резонатора с помощью несамосопряженного оператора T^{-1} , при условии, когда не учитываются затухающие виды колебаний, образующиеся при отражении падающей волны от горловины резонатора. Используя определение характеристических функций ограниченного и неограниченного операторов [1], [9] и связь между ними [9], мы показываем, что коэффициент отражения совпадает с характеристической функцией оператора T , обладающей важными аналитическими свойствами (отображает верхнюю полуплоскость на внутренность либо внешность единичного круга, особенности ее являются частью дискретного спектра оператора T).

Для удобства мы поместили в § 1 определения некоторых функциональных пространств и основные результаты работ [4, 5], а в § 3 привели схему построения обобщенных расширений несимметрических операторов [8, 9] и их характеристических функций.

В заключение, мы хотим выразить благодарность М. С. Лившицу за постоянное внимание и советы при выполнении настоящей работы.

§ 1. Вспомогательные определения и теоремы

1. Пусть Ω — ограниченная область трехмерного евклидова пространства R_3 с поверхностью Γ , состоящей из двух кусков: достаточно гладкой поверхности S и плоского сечения Σ . В дальнейшем мы будем рассматривать вектор-функции $u(u_1, u_2, u_3)$, заданные в области Ω и принадлежащие некоторым функциональным пространствам, определения которых мы приводим.

Пространством $L_2(\Omega)$ назовем гильбертово пространство вектор-функций, все компоненты которых суммируемы с квадратом модуля в Ω , а скалярное произведение определяется по формуле

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i v_i d\Omega.$$

Пространством $W_2^1(\Omega)$ назовем гильбертово пространство вектор-функций, все компоненты которых суммируемы с квадратом модуля в Ω и имеют квадратично суммируемые обобщенные производные первого порядка. Скалярное произведение в W_2^1 определяется по формуле

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_k} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i v_i d\Omega.$$

J_1 — подпространство в $L_2(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $L_2(\Omega)$ линейала $\tilde{J}_1$ гладких соленоидальных векторов u (т. е. векторов, удовлетворяющих условию $\operatorname{div} u = 0$), для которых $u_{n_{\Sigma}} = 0$, где $u_{n_{\Sigma}}$ — нормальная составляющая вектора u на Σ .

J_2 — подпространство $L_2(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $L_2(\Omega)$ линейала $\tilde{J}_2$ гладких соленоидальных векторов v , для которых $v_{n_{\Gamma}} = 0$.

J_{11} — подпространство $W_2^1(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $W_2^1(\Omega)$ линейала $\tilde{J}_{11}$ гладких соленоидальных векторов u , для которых $u_{n_{\Sigma}} = 0$, $u_{\tau_{\Gamma}} = 0$.

J_{21} — подпространство $W_2^1(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $W_2^1(\Omega)$ линейала $\tilde{J}_{21}$ гладких соленоидальных векторов, для которых $v_{n_{\Gamma}} = 0$, $v_{\tau_{\Sigma}} = 0$.

Лемма 1. Линеалы J_{11} и $\bar{J}_{21}$ плотны соответственно в J_1 и J_2 .

Теорема 1. Всякий вектор $u \in J_1$ однозначно представим в виде $u = \text{rot } \Phi$, где $\Phi \in J_{21}$; имеет место неравенство

$$\|\Phi\|_{W_2^{-1}} \leq C \|\text{rot } \Phi\|_{L_1}.$$

Теорема 2. Всякий вектор $v \in J_2$ однозначно представим в виде $v = \text{rot } \Psi$, где $\Psi \in J_{21}$; имеет место неравенство

$$\|\Psi\|_{W_2^{-1}} \leq C \|\text{rot } \Psi\|_{L_1}.$$

Доказательство леммы 1 и теорем 1, 2 можно найти в работах [4, 5].

Введем гильбертово пространство $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$ вектор-функций $f = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ со следующим скалярным произведением:

$$(f_1, f_2) = \int_{\Omega} (E_1 \cdot E_2^* + H_1 \cdot H_2^*) d\Omega.$$

Оператором Максвелла будем называть оператор вида

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -i \text{rot} \\ i \text{rot} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Обозначим через B оператор Q , определенный на гладком линейном пространстве $D(B) = \begin{pmatrix} \bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{21} \end{pmatrix}$.

Из леммы 1 следует, что область определения оператора B плотна в H . Значение B на $f \in D(B)$ вычисляется по формуле

$$Bf = \begin{pmatrix} -i \text{rot } H \\ i \text{rot } E \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Оператор B симметричен. Замыкание оператора B обозначим через B_0 , при этом $D(B)$ расширяется до $D(B_0) = \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix}$.

Из теорем 1, 2 следует, что оператор B_0 однозначно отображает $D(B_0)$ на все H , следовательно B_0 — самосопряженный оператор. Для любого вектора $f \in D(B_0)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{W_2^{-1}} \leq C \|B_0 f\|_{L_1}, \quad (1.3)$$

которое вытекает из теорем 1, 2. Из неравенства (1.3) и теорем вложения С. Соболева [6] следует вполне непрерывность обратного оператора B_0^{-1} . Вид оператора B_0^{-1} мы установим в следующем параграфе.

2. Пусть в сечении Σ задана полная ортонормированная система гладких вектор-функций $\{\mathbf{G}_\nu\}_1^\infty$, для которых

$$\int_{\Sigma} \mathbf{G}_\nu \cdot \mathbf{G}_\mu \, d\sigma = \delta_{\nu\mu}, \quad \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1, & \nu = \mu, \\ 0, & \nu \neq \mu. \end{cases} \quad (1.4)$$

Будем считать, что вектор-функции $\mathbf{G}_\nu$ ($\nu > 1$) имеют представление

$$\mathbf{G}_\nu = \sqrt{\rho_\nu} \operatorname{grad} \zeta_\nu^0, \quad (1.5)$$

где ζ_ν^0 — гладкие функции в сечении Σ , удовлетворяющие на контуре l , охватывающем Σ , условию $\left. \frac{\partial \zeta_\nu^0}{\partial n_0} \right|_l = 0$ (n_0 — нормаль к l).

Рассмотрим в области Ω краевые задачи [7]

$$\Delta \zeta_\nu = 0, \quad \left. \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial n} \right|_s = 0, \quad \zeta_\nu|_s = \zeta_\nu^0. \quad (1.6)$$

Введем вектор-функции

$$\mathbf{w}_\nu = \sqrt{\rho_\nu} \operatorname{grad} \zeta_\nu, \quad (1.7)$$

которые удовлетворяют векторному уравнению Лапласа и краевым условиям

$$\mathbf{w}_{\nu n}|_s = 0, \quad \mathbf{w}_{\nu \tau}|_s = \mathbf{G}_\nu. \quad (1.8)$$

§ 2. Построение обратного для оператора Максвелла при несамосопряженных краевых условиях

Обозначим через T оператор Максвелла Q ((1.1)), определенный на линейале $D(T)$, состоящем из гладких вектор-функций $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ из $H = \left(\begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix} \right)$, удовлетворяющих условиям

$$D(T) = \left(\begin{array}{l} \mathbf{E}_{\tau}|_s = 0, \quad \mathbf{E}_n|_s = 0, \quad \int_{\Sigma} \mathbf{H}_{\tau} \cdot \mathbf{G}_\nu \, d\sigma = 0 \quad (\nu > 1) \\ \mathbf{H}_n|_s = 0, \quad \int_{\Sigma} \mathbf{E}_{\tau} \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) \, d\sigma = -\rho_1 \int_{\Sigma} \mathbf{H}_{\tau} \cdot \mathbf{G}_1 \, d\sigma \end{array} \right), \quad (2.1)$$

где $\{\mathbf{G}_\nu\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система вектор-функций в сечении Σ , векторы $\mathbf{G}_\nu$ ($\nu > 1$) имеют представление (1.5) и удовлетворяют (1.4), ρ_1 — вещественное число. Значение оператора T на векторах $\mathbf{f} \in D(T)$ вычисляется по формуле

$$T\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ i \operatorname{rot} \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Область определения оператора T плотна в $H = \left(\begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix} \right)$, поскольку $D(T) \supset D(B)$.

Теорема 3. *Оператор T ((2.2), (2.1)) имеет обратный оператор, определенный на множестве гладких вектор-функций $g = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \in H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$, замыкание которого является вполне непрерывным оператором в H .*

Доказательство. Покажем, что оператор T обратим. Пусть $f \in D(T)$ и $Tf = 0$. Тогда $rot E = 0, rot H = 0$. Следовательно, $E = grad \varphi, H = grad \psi$, где φ и ψ — гармонические функции, поскольку $div E = 0, div H = 0$. Так как вектор E удовлетворяет на $\Gamma = S + \Sigma$ условиям $E_n|_S = 0, E_{-}|_S = 0$, то для гармонической функции φ имеют место условия $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = 0, \varphi|_S = const$. Значит, $E = grad \varphi = 0$. Краевые условия для вектора H , учитывая, что $E = 0$, имеют вид

$$H_n|_S = 0, \int_{\Sigma} H_{-} G_{-} d\sigma = 0 \quad (\nu > 1)$$

или

$$H_n|_S = 0, H_{-}|_S = 0.$$

Тогда гармоническая функция ψ на границе области принимает значения $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_S = 0, \psi|_S = const$, значит $H = grad \psi = 0$. Таким образом, уравнение $Tf = 0$ имеет тривиальное решение. Найдем вид обратного оператора T^{-1} . Рассмотрим уравнение

$$Tf = g, \tag{2.3}$$

где $f = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \in D(T)$, а $g = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ — гладкий вектор из $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$. Уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$-i rot H = E, \tag{2.4}$$

$$i rot E = H. \tag{2.5}$$

Построим векторы

$$E_I = -\frac{i}{4\pi} rot \left\{ \int_{\Omega} \frac{H}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad \eta}{r} d\Omega \right\}, \tag{2.6}$$

$$H_I = \frac{i}{4\pi} rot \left\{ \int_{\Omega} \frac{E}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad \xi}{r} d\Omega \right\}, \tag{2.7}$$

где Ω_1 — область, содержащая в себе область Ω , с границей Γ_1 , η — решение в $\Omega_1 - \Omega$ задачи

$$\Delta \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n}|_S = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n}|_S = -H_n|_S; \tag{2.8}$$

ξ — решение в $\Omega_1 - \Omega$ задачи

$$\Delta \xi = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial n}|_s = -E_n|_s, \quad \frac{\partial \xi}{\partial n}|_s = 0. \quad (2.9)$$

Очевидно, $\operatorname{div} \mathbf{E}_I = \operatorname{div} \mathbf{H}_I = 0$. Векторы $\mathbf{E}_I$ и $\mathbf{H}_I$ удовлетворяют уравнениям (2.4) и (2.5). Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}_I &= -\frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1 - \Omega} \frac{\operatorname{grad} \eta}{r} d\Omega \right\} = \\ &= \frac{i}{4\pi} \Delta \left\{ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1 - \Omega} \frac{\operatorname{grad} \eta}{r} d\Omega \right\} - \frac{i}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1 - \Omega} \frac{\operatorname{grad} \eta}{r} d\Omega \right\} = \\ &= \frac{i}{4\pi} \Delta \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega - \frac{i}{4\pi} \operatorname{grad} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div} \mathbf{H}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1 - \Omega} \frac{\operatorname{div} \operatorname{grad} \eta}{r} d\Omega - \int_{S+\Sigma} \frac{H_n}{r} dz - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_1 + S + \Sigma} \frac{\partial \eta}{\partial n} d\Omega \right\} = \frac{i}{4\pi} \Delta \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega = -i\mathbf{H}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\operatorname{rot} \mathbf{H}_I = i\mathbf{E}$.

Вектор-функцию $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \in D(T)$ и удовлетворяющую уравнению (2.3) будем искать в виде

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_{II} \\ \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_{II} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Вектор-функции $\mathbf{E}_{II}$ и $\mathbf{H}_{II}$ представим следующим образом:

$$\mathbf{E}_{II} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{H}_{II} = \operatorname{grad} \psi, \quad (2.11)$$

где φ и ψ являются решениями смешанных задач

$$\Delta \varphi = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Sigma} = -E_{In}|_{\Sigma}, \quad \varphi|_s = \varphi^0, \quad (2.12)$$

$$\Delta \psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}|_s = -H_{In}|_s, \quad \psi|_{\Sigma} = \psi^0.$$

Граничные функции φ^0 и ψ^0 восстанавливаются по $E_{I\tau}|_s$ и $H_{I\tau}|_s$ соответственно [4, 5] так, что выполняются условия

$$\operatorname{grad} \varphi^0 = E_{I\tau}|_s, \quad \operatorname{grad} \psi^0 = -H_{I\tau}|_s. \quad (2.13)$$

Вектор-функция $\mathbf{w}_1$ имеет представление (1.7) ($\nu=1$) и удовлетворяет условиям (1.8).

Вектор-функция

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_{II} \\ \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_{II} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

удовлетворяет уравнению (2.3), а на границе области Ω выполняются условия

$$\begin{aligned} E_{0z} &= 0, \quad E_{0r} = 0, \\ H_{0\varphi} &= 0, \quad H_{0z} = 0, \end{aligned}$$

т. е. f_0 принадлежит линейалу $D(B) = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{11} \\ \tilde{J}_{21} \end{pmatrix}$.

Коэффициент α найдем из условия

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\Omega = -\frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega} \mathbf{E}_r \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\Omega.$$

Подставляя $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \alpha \mathbf{w}_1$, получим

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega} \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\Omega = -\frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega+S} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{w}_1) nd\Omega = & (2.15) \\ &= \frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{w}_1) d\Omega = \frac{1}{\rho_1} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{w}_1 d\Omega = -\frac{i}{\rho_1} \int_{\Omega} \mathbf{H} \mathbf{w}_1 d\Omega. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{f}$ ((2.10)) имеет представление

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 - \frac{i}{\rho_1} \int_{\Omega} \mathbf{H} \mathbf{w}_1 d\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

где $\mathbf{f}_0 \in D(B)$.

Легко проверить, что обратный оператор T^{-1} имеет вид

$$\begin{aligned} T^{-1} \mathbf{g} &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega} \frac{\operatorname{grad} \eta}{r} d\Omega \right\} + \operatorname{grad} \varphi \\ \frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{E}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega} \frac{\operatorname{grad} \xi}{r} d\Omega \right\} + \operatorname{grad} \psi \\ -\frac{i}{\rho_1} \int_{\Omega} \mathbf{H} \mathbf{w}_1 d\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. & (2.17) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (2.17) определяет линейный оператор, переводящий гладкие векторы $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ из H в линейал $D(B)$, т. е.

$$B^{-1} \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega} \frac{\operatorname{grad} \eta}{r} d\Omega \right\} + \operatorname{grad} \varphi \\ \frac{i}{4\pi} \operatorname{rot} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{E}}{r} d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega} \frac{\operatorname{grad} \xi}{r} d\Omega \right\} + \operatorname{grad} \psi \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Тогда оператор T^{-1} ((2.17)) можно представить в виде

$$T^{-1}g = B^{-1}g - \frac{i}{2}(g, e)e.$$

Расширяя оператор T^{-1} по непрерывности на все H и обозначая это расширение снова через T^{-1} , получим

$$T^{-1}g = B_0^{-1}g + \frac{i}{2}(g, e)Je \quad (J = -1), \quad (2.20)$$

где B_0^{-1} является обратным оператором для самосопряженного оператора B_0 , рассмотренного в § 1. Оператор T^{-1} представляется, как видно из (2.20), в виде суммы вполне непрерывного оператора B_0^{-1} и одномерного оператора $(\cdot, e)e$, следовательно, T^{-1} является вполне непрерывным оператором в $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$.

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы мы попутно установили, что вектор-функции f , принадлежащие области определения замкнутого оператора T , допускают представление

$$f = f_0 + \frac{i}{2}(B_0 f_0, e)Je, \quad f_0 \in D(B_0), \quad (2.21)$$

причем $Tf = B_0 f_0$.

§ 3. Понятие об обобщенных расширениях несимметрических операторов и их характеристических функциях. Обобщенное расширение оператора Максвелла

1. Пусть T — замкнутый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Оператор T будем относить к классу Ω_1 , если:

1. Область определения $D(T)$ плотна в H ;

2. На $D(T) \cap D(T^*)$ оператор T индуцирует симметрический оператор T_0 ;

3. Существует ограниченный обратный оператор T^{-1} , имеющий вполне непрерывную мнимую часть.

Введем гильбертово пространство $H_+ = D(T_0^*)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_+ = (T_0^* f, T_0^* g) + (f, g) \quad (f, g \in D(T_0^*)),$$

и построим тройку пространств [8]

$$H_+ \subseteq H \subseteq H_-,$$

где H_- — гильбертово пространство обобщенных элементов, порождающих антилинейные функционалы над H_+ .

Пусть C — линейный ограниченный оператор, действующий из H_+ в H_- . При помощи равенства

$$(Cf, g) = (f, C^*g) \quad (f, g \in H_+)$$

однозначно определяется обобщенный сопряженный оператор S , который также отображает H_+ в H_- .

В [8] показано, что если оператор T принадлежит к классу Ω_1 , то T и T^* можно расширить на все $H_+ = D(T_0)$ так, чтобы полученные расширения были сопряжены друг к другу в обобщенном смысле и имели вид

$$\begin{aligned} T_{H_+} &= A + \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r (\cdot, \hat{e}_\alpha) v_{\alpha\beta} \hat{e}_\beta, \\ T_{H_+}^* &= A - \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r (\cdot, \hat{e}_\alpha) v_{\alpha\beta} \hat{e}_\beta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где A — обобщенное самосопряженное расширение оператора $\left(\frac{T^{-1} + T^{-1*}}{2}\right)^{-1}$, $\hat{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, r$) — обобщенные каналовые векторы, определяемые равенством

$$(T_0^* f, e_\alpha) = (f, \hat{e}_\alpha), \quad (3.2)$$

e_α ($\alpha = 1, 2, \dots, r$) — ортонормированный базис собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям оператора $\frac{T^{-1} - T^{-1*}}{i}$

в подпространстве $\frac{T^{-1} - T^{-1*}}{i} H$. В $H_+ = D(T_0)$ обобщенный самосопряженный оператор определяется следующим образом:

$$Af = A_1 f_1 + A_2 f_2 \quad (f \in D(T_0), f_1 \in D(T), f_2 \in D(T^*)), \quad (3.3)$$

причем операторы A_1 и A_2 имеют представление

$$\begin{aligned} A_1 f_1 &= T f_1 - \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r (f_1, \hat{e}_\alpha) v_{\alpha\beta} \hat{e}_\beta, \\ A_2 f_2 &= T^* f_2 + \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r (f_2, \hat{e}_\alpha) v_{\alpha\beta} \hat{e}_\beta, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $V = \|v_{\alpha\beta}\|$ — некоторая эрмитова матрица, для которой $V^2 = I$. Из (3.1) следует, что

$$\frac{T_{H_+} - T_{H_+}^*}{i} = \sum_{\alpha, \beta=1}^r (\cdot, \hat{e}_\alpha) v_{\alpha\beta} \hat{e}_\beta.$$

Пусть ω — регулярная точка оператора T , тогда она будет регулярной и для T_{H_+} [8]. Матрица-функция комплексного переменного

$$W_T(\omega) = I - i \|((T_{H_+} - \omega I)^{-1} \hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta)\| V \quad (3.5)$$

называется характеристической для оператора T . При этом, если оператор T принадлежит классу Ω_1 , то для любой матрицы-функции $W_T(\omega)$ можно найти такую характеристическую матрицу-функцию $W_{T^{-1}}(\omega)$ оператора T , что

$$W_T(\omega) = W_{T^{-1}}(\omega^{-1}). \quad (3.6)$$

Характеристическая матрица-функция $W_{T^{-1}}(\omega)$ вычисляется по формуле

$$W_{T^{-1}}(\omega) = I - i \left\| ((T^{-1} - \omega J)^{-1} e_2, e_3) \right\| J \quad (J = -V). \quad (3.7)$$

2. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H = \left(\begin{smallmatrix} J_1 \\ J_2 \end{smallmatrix} \right)$ оператор Максвелла

$$Tf = \begin{pmatrix} -irot \mathbf{H} \\ irot \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \in D(T).$$

Из соотношений (2.17), (2.18), (2.21) вытекает, что в область определения $D(T^*)$ оператора T^* входит совокупность гладких векторов f , удовлетворяющих условиям

$$D(T^*) \supset \begin{pmatrix} E_{\tau}|_S = 0, E_n|_Z = 0, \int_Z \mathbf{H} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{z} = 0 \quad (\nu > 1) \\ H_n|_S = 0, \int_Z \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\mathbf{z} = +\rho_1 \int_Z \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\mathbf{z} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Обозначим через T_0 оператор, индуцируемый оператором T на $D(T_0) = D(T) \cap D(T^*)$. Тогда

$$D(T_0) \supset \begin{pmatrix} E_{\tau}|_S = 0, E_n|_Z = 0, \int_Z \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\mathbf{z} = 0 \\ H_n|_S = 0, H_{\tau}|_Z = 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

В работе [8] показано, что

$$D(T_0) = D(T) + D(T^*).$$

Учитывая (2.1) и (3.8) получим, что $D(T_0)$ содержит гладкие соленоидальные векторы, удовлетворяющие условиям*

$$D(T_0) \supset \begin{pmatrix} E_{\tau}|_S = 0, E_n|_Z = 0 \\ H_n|_S = 0, \int_Z \mathbf{H} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{z} = 0 \quad (\nu > 1) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Так как оператор T_0 является симметрическим, и существует ограниченный оператор T^{-1} , имеющий одномерную мнимую компоненту, то оператор T принадлежит классу $\mathcal{Q}_1$. Поэтому, согласно (2.18), (3.1) и (3.7), операторы T и T^* можно расширить на $H_{\pm} = D(T_0)$ так, чтобы полученные обобщенные расширения имели вид

$$T_{H_{+}} = A + \frac{i}{2} (\cdot, \hat{e}) v \hat{e}, \quad (v = +1) \quad (3.11)$$

$$T_{H_{+}}^{\sim} = A - \frac{i}{2} (\cdot, \hat{e}) v \hat{e}.$$

* Лицевалы (3.8), (3.9), (3.10), как нетрудно видеть, являются, с точностью до замыкания, областями определения операторов T^* , T_0 , T_0^* .

Обобщенный каналовый вектор $\hat{e}$ определяется через каналовый вектор e оператора T^{-1} с помощью равенства (3.2), т. е.

$$\begin{aligned} (f, \hat{e}) &= (T_0^{-1} f, \hat{e}) = i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{w}_1 d\Omega = i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{w}_1) d\Omega = \\ &= -i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{w}_1) n d\sigma = -i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\sigma = \\ &= -i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1 d\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} +i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{F}_1 \delta_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}$, а δ_x — дельта-функция, сосредоточенная на границе Σ и определяемая соотношением $\int_{\Sigma} \mathbf{v} \delta_x d\Omega = \int_{\Sigma} \mathbf{v} d\sigma$. Найдем теперь оператор A . Согласно (3.4)

$$\begin{aligned} A_1 f_1 &= T f_1 - \frac{i}{2} (f_1, \hat{e}) \hat{e}, \\ A_3 f_2 &= T^* f_2 + \frac{i}{2} (f_2, \hat{e}) \hat{e}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (3.3) и [8], получим

$$A f = A_1 f_1 + A_3 f_2 = T f_1 + T^* f_2 - \frac{i}{2} (f_1 - f_2, \hat{e}) \hat{e} = T f - \frac{i}{2} (f_1 - f_2, \hat{e}) \hat{e}.$$

Далее

$$\begin{aligned} (f_1 - f_2, \hat{e}) &= -i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{F}_1 \delta_x d\Omega = -i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{F}_1 d\sigma + \\ &+ i \int_{\Sigma} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{F}_1 d\sigma = i \int_{\Sigma} \sqrt{2\rho_1} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma + i \int_{\Sigma} \sqrt{2\rho_1} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma = \\ &= i \int_{\Sigma} \sqrt{2\rho_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma, \end{aligned}$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$.

Таким образом

$$A f = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ i \operatorname{rot} \mathbf{E} \end{pmatrix} + \frac{i \int_{\Sigma} \sqrt{2\rho_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{F}_1 \delta_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Обобщенное расширение оператора Максвелла T имеет вид

$$T_{H_+} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ i \operatorname{rot} \mathbf{E} \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \left(\rho_1 \int_{\Sigma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1 d\sigma \right) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{F}_1 \delta_{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$T'_{H_+} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -i \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ i \operatorname{rot} \mathbf{E} \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \left(\rho_1 \int_{\Sigma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1 d\sigma \right) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\rho_1}} \mathbf{F}_1 \delta_{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Несамосопряженная краевая задача для уравнений Максвелла. Вычисление коэффициента отражения

Рассмотрим регулярный волновод с осью oz , оканчивающийся объемным резонатором.

Будем считать, что вдоль волновода распространяется одна поперечно-электрическая TE волна ($E_z = 0$). При отражении от горловины резонатора, как известно [10], возникает отраженная волна типа TE и экспоненциально затухающие волны всевозможных типов. Выберем начало отсчета $z = 0$ достаточно удаленным от горловины резонатора с тем, чтобы всеми затухающими видами колебаний можно было пренебречь при $z \leq 0$.

Поперечные составляющие TE поля с точностью до множителя $e^{i\omega t}$ при $z \leq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= (A_1 e^{-i\beta_1 z} - B_1 e^{i\beta_1 z}) \mathbf{F}_1 \sqrt{\rho_1}, \\ \mathbf{H}_z &= (A_1 e^{-i\beta_1 z} + B_1 e^{i\beta_1 z}) \mathbf{G}_1 \frac{1}{\sqrt{\rho_1}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}$, $\mathbf{G}_1 = \sqrt{\rho_1} \operatorname{grad} \varphi_{1, \beta_1}^0$ — собственная функция мембранной задачи в поперечном сечении Σ_z волновода и $\frac{\partial \varphi_{1, \beta_1}^0}{\partial n_0} \Big|_{\Sigma_z} = 0$ (l_x — контур, охватывающий сечение Σ_z), β_1 — волновое число.

Между амплитудами падающей волны A_1 и отраженной $-B_1$, существует линейная связь

$$B_1 = S(\omega) A_1, \quad (4.2)$$

где $S(\omega)$ — коэффициент отражения. Из (4.1) и (4.2) вытекает

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_z} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1 d\sigma &= A_1 (1 - S(\omega)) \sqrt{\rho_1}, \\ \int_{\Sigma_z} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma &= A_1 (1 + S(\omega)) \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

или, исключая коэффициент $S(\omega)$, получим при всех $z \leq 0$

$$\int_{\Sigma_z} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma = \frac{2A_1}{V \rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \int_{\Sigma_z} \mathbf{E}_z (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\sigma.$$

Поле при $z > 0$ (при сделанных выше предположениях о затухающих волнах) удовлетворяет системе уравнений Максвелла при заданной частоте $\omega > 0$

$$\begin{aligned} -i \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \omega \mathbf{E}, \\ i \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \omega \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.4)$$

и следующим краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_z|_S = 0, \quad E_{n|_{\Sigma_0}} = 0, \quad H_{n|_S} = 0, \quad \int_{\Sigma_0} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G} d\sigma = 0 \\ (\nu > 1) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$\int_{\Sigma_0} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma = \frac{2A_1}{V \rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \int_{\Sigma_0} \mathbf{E}_z (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\sigma$$

Нетрудно видеть, что решение краевой задачи (4.4), (4.5) почти при всех $\omega > 0$ является единственным. Действительно, пусть $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}$ являются решениями уравнений (4.4) и удовлетворяют условиям (4.5).

Вектор-функция $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, очевидно, также удовлетворяет уравнениям (4.4) и краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} E_{0z}|_S = 0, \quad E_{0n|_{\Sigma_0}} = 0, \quad H_{0n|_S} = 0, \quad \int_{\Sigma_0} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{G} d\sigma = 0 \\ (\nu > 1) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$\int_{\Sigma_0} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{G}_1 d\sigma = -\frac{1}{\rho_1} \int_{\Sigma_0} \mathbf{E}_{0z} (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\sigma$$

Уравнения (4.4) при условиях (4.6) представляют собой задачу на собственные значения для несамосопряженного оператора T . Поскольку спектр оператора T , в силу теоремы 3, является дискретным, то почти при всех $\omega > 0$ уравнения (4.4) с условиями (4.6) имеют только нулевое решение и поэтому решение краевой задачи (4.4), (4.5) почти при всех $\omega > 0$ является единственным.

Повторяя рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы 3, получаем, что решение задачи (4.4), (4.5), записанное в операторном виде, представляется в форме

$$\mathbf{f} = \left[\omega B_0^{-1} \mathbf{f} + \omega \frac{i}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \mathbf{f} \mathbf{e} \right] + i \sqrt{2} A_1 \mathbf{e}, \quad (4.7)$$

где B_0^{-1} — самосопряженный оператор (2.18), e — каналовый вектор (2.19), $J = -1$.

Соотношение (4.7) перепишем в виде

$$f - \omega T^{-1}f = i\sqrt{2} A_1 e. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) равносильно краевой задаче (4.4), (4.5). Зная решение уравнения (4.8), можно найти коэффициент отражения. Действительно,

$$f = (I - \omega T^{-1})^{-1} i\sqrt{2} A_1 e.$$

Далее из (4.3) следует

$$\begin{aligned} A_1 S(\omega) &= A_1 - \frac{1}{V \rho_1} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) d\sigma = A_1 + \frac{1}{V \rho_1} \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{w}_1 d\Omega = \\ &= A_1 - \frac{\omega}{V^2} (f, e) = A_1 - i\omega A_1 ((I - \omega T^{-1})^{-1} e, e), \end{aligned}$$

откуда

$$S(\omega) = 1 - i\omega ((I - \omega T^{-1})^{-1} e, e) = 1 - i \left((T^{-1} - \frac{1}{\omega} I)^{-1} e, e \right) J. \quad (4.9)$$

Коэффициент отражения есть функция параметра ω . Сравнивая (4.2) с (3.6) и (3.7), получим

$$S(\omega) = W_{T^{-1}} \left(\frac{1}{\omega} \right) = W_T(\omega). \quad (4.10)$$

Формула (4.10) показывает, что коэффициент отражения можно вычислить двумя способами. Один из них, основанный на методе обобщенных расширений, нам представляется более естественным с точки зрения приближенных расчетов этого коэффициента.

Одесский политехнический институт

Доведенный государственный университет

Поступило 28.VI.66

Հ. Գ. ՋԵԲԵՅԱՆ, Է. Ռ. ՑԵԿԱՆՈՎՍԿԻ

ԱՆԻՔԱՏԱՐԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ, ՈՉ-ԻՆՔՆԱՀԱՄԱՆՈՒԾ ԵԶՐԱՅԻՆ
ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մակսվելի օպերատորը ոչ-ինքնահամալուծ եզրային պայմանների դեպքում: Գտնվում է հակադարձ օպերատորի տեսքը և ապացուցվում նրա լիովին անընդհատությունը: Ստացված արդյունքները կիրառվում են ծավալուն ռեզոնատորով վերջացող ալիքատարում ալիքների տարածման հարցում, այն դեպքում, երբ անտեսվում են մարող տատանումները: Օգտագործելով դիտարկվող և նրա հակադարձ օպերատոր-

ների խարակտերիստիկ ֆունկցիաների միջև գոյություն ունեցող կապը, ցույց է տրվում, որ անդրադարձման գործակիցը համընկնում է դիտարկվող օպերատորի խարակտերիստիկ ֆունկցիայի հետ:

G. GEBEIAN, E. TSEKANOVSKY

ON A NON SELF-ADJOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE WAVE-GUIDE THEORY

S u m m a r y

Maxwell's operator T with non self-adjoint boundary condition is under consideration. The form of the inverse operator T^{-1} is found and its completeness established.

These results are applied to wave propagation in a waveguide with resonator, under assumption, that the damping modes of oscillations are neglectable. It is shown, that the reflection coefficient coincides with the characteristic function of T .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН (1958), XIII, вып. 1 (79), 3—85.
2. М. С. Лившиц. Метод несамосопряженных операторов в теории волноводов, Радиотехника и электроника, VII, вып. 2 (1962), 281—293.
3. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, Труды матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 59 (1960), 115—173.
4. Э. Б. Быховский. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы, Вестник ЛГУ, № 13 (1957), 50—66.
5. Э. Б. Быховский. Оценка вектора через его ротор и начально-краевая задача электродинамики в случае смешанных граничных условий, Вестник ЛГУ (1961), № 19, 161—164.
6. С. А. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ (1950).
7. Заремба. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа, УМН, I, вып. 3—4 (1946), 125—126.
8. Э. Р. Цекановский. Обобщенные расширения несимметрических операторов, Матем. сборник, 68 (1965) (110), № 4.
9. Э. Р. Цекановский. Характеристические функции неограниченных операторов, Труды Харьковского горного ин-та, XI (1962).
10. Я. Д. Ширман. Радиоволноводы и объемные резонаторы, Связьиздат (1959).