ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, № 5, 1966 Математика



Г. В. ГЕНДЖОЯН

# О МОДИФИКАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СХЕМЫ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

Функциональная схема приближенного метода, предложенного С. А. Чаплыгиным для решения дифференциальных уравнений [1], впервые разработана А. Н. Балуевым [2]. Впоследствии она развивалась и конкретизировалась С. Н. Слугиным [3], [4] и другими авторами. В настоящей работе мы вкратце изложим часть функциональной схемы метода Чаплыгина, относящуюся к алгорифму получения двусторонних монотонных (чаплыгинских) приближений, приведем ее некоторые видоизменения и остановимся на применении этого метода к решению первой краевой задачи для одного частного класса квазилинейных параболических уравнений второго порядка.

## 1. Функциональная схема метода

Пусть в частично упорядоченной группе $X$, полной относительно некоторой разумным образом выбранной сходимости, дано (в общем случае нелинейное) уравнение $P(x)=0$ [4].

Как операция $P$, так и операция $\Gamma$, которую мы определим ниже, отображают $X$ в такую же группу $Y$. При этом предполагаются выполненными условия:

1. Существует аддитивная, положительно обратимая операция $\Gamma$ такая, что для любого положительного $\Delta x \in X$ имеет место неравенство (условие Н. В. Азбелева)

$$P(x+\Delta x)-P(x)\leqslant \Gamma\Delta x. \tag{1.1}$$

2. Существуют элементы $x_0$ и $y_0$ такие, что

$$x_0\leqslant y_0 \text{ и } P(x_0)\leqslant 0\leqslant P(y_0). \tag{1.2}$$

При этих условиях, если последовательности $x_n$ и $y_n$ определить формулами

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma^{-1}P(x_n),\quad y_{n+1}=y_n-\Gamma^{-1}P(y_n),\quad n=0,\,1,\,2\cdots, \tag{1.3}$$

то имеют место неравенства

$$x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n. \tag{1.4}$$

В самом деле, обозначая: $\delta x_n=x_{n+1}-x_n$, $\delta y_n=y_{n+1}-y_n$, из (1.3), (1.2) и (1.1) получим $\delta x_0=-\Gamma^{-1}P(x_0)\geqslant 0$, $\delta y_0=-\Gamma^{-1}P(y_0)\leqslant 0$. Далее,

$$P(x_1)=P(x_0+\delta x_0)\leqslant P(x_0)+\Gamma\delta x_0=0,$$

$$P(y_1)=P(y_0+\delta y_0)\geqslant P(y_0)-\Gamma(-\delta y_0)=P(y_0)+\Gamma\delta y_0=0,$$

$$y_1-x_1=y_0-x_0-[\Gamma^{-1}P(y_0)-\Gamma^{-1}P(x_0)]=\Gamma^{-1}[\Gamma(y_0-x_0)-P(y_0)+ + P(x_0)]>0.$$

Этим доказана справедливость неравенств (1.4) для $n=0$ и соотношений (1.2), если в последних заменить пару $(x_0, y_0)$ через $(x_1, y_1)$. Методом индукции завершается доказательство утверждения. Заметим, что если $x^*$ — некоторое решение уравнения $P(x)=0$, $x_0\leqslant x^*\leqslant y_0$, то аналогично предыдущему, легко установить неравенства

$$x_n\leqslant x^*\leqslant y_n,\ n=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

При некоторых дополнительных условиях (см. [4]) исследуется сходимость $x_n$ и $y_n$ к $x^*$.

В применении к нелинейным задачам описанная схема суть некоторая разновидность метода линеаризации: уравнение $P(u_{n+1})=0$ заменяется уравнением $P(u_n)+\Gamma(u_{n+1}-u_n)=0$ с дополнительными условиями (1.1) и (1.2), соответственно, на операцию $\Gamma$ и на начальные приближения $(x_0, y_0)$. При рассмотрении задачи Коши для дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) проверка условий (1.1) и (1.2) не встречает особых трудностей. Однако в нелинейных краевых задачах ситуация значительно усложняется. Проиллюстрируем это на примерах.

$$P(y)\equiv-y''+f(x, y, y')=0,\ y(0)=y'(0)=0,\ 0<x<1.$$

Предположим, что функция $f$ непрерывна по $x$ и ее производные $f'_y$ и $f'_{y'}$ в области $0<x<1$, $y^2+y'^2<\infty$ ограничены

$$|f'_y|\leqslant M,\ |f'_{y'}|\leqslant M.$$

Так как $P(y+\Delta y)-P(y)=-\Delta y''+f(x, y+\Delta y, y'+\Delta y')-f(x, y, y')=-\Delta y''+f_{y'}\Delta y'+f_y\Delta y$, то естественно операцию $\Gamma$ искать в виде $\Gamma\Delta y=-\Delta y''+k\Delta y'+l\Delta y$, где $k$ и $l$ — постоянные. Тогда условие (1.1) принимает вид

$$f'_{y'}\Delta y'+f'_y\Delta y\leqslant k\Delta y'+l\Delta y.$$

В силу заданных начальных условий оно выполнено для любых $k\geqslant M$ и $l\geqslant M$, если $\Delta y'\geqslant 0$. Исходя из этого С. Н. Слугин рассматривает $P(y)$ как операцию над $y'(x)$, т. е. $P(y)\equiv-(y')'+f\left(x, \int\limits_0^x y'(t)\,dt, y'\right)$; взяв в качестве $X$ подпространство функций из $C^1$, обращающихся в нуль в точке $x=0$. Операция $\Gamma z$ примет вид $\Gamma z=-z'+kz+l\int\limits_0^x z(t)\,dt$. Легко видеть, что

$$\Gamma^{-1}f=\int\limits_0^x\frac{\beta e^{\beta(x-t)}-\alpha e^{\alpha(x-t)}}{\beta-\alpha}f(t)\,dt,$$

где $\alpha$ и $\beta$ — корни уравнения $\gamma^2 - k\gamma - l = 0$. Положительность операции $\Gamma$ очевидна. Алгорифм (1.3) имеет вид

$$y'_{n+1}(x) = y'_n(x) - \int_0^x \frac{\beta e^{\beta(x-t)} - \alpha e^{\alpha(x-t)}}{\beta - \alpha} \left[-y'' + f(x, y_n, y'_n)\right] dt.$$

У С. Н. Слугина, описанная нами схема применяется фактически к старшей из производных, входящих нелинейно в левую часть дифференциального уравнения. При этом получающиеся монотонные последовательности этой производной индуцируют, благодаря начальным условиям, такую же упорядоченность для более низких производных, т. е. получаются двусторонние монотонные приближения самого решения.

Если поставить краевую задачу для того же уравнения

$$-y'' + f(x, y, y') = 0, \ y(0) = y(1) = 0, \ 0 < x < 1, \tag{1.5}$$

где $f(x, y, y')$ удовлетворяет еще дополнительному условию $f'_y \geqslant 0$, то упорядочивать производные уже нельзя, потому что сами функции тогда не будут удовлетворять граничным условиям. Если упорядочить класс функций $y(x)$, то невозможно удовлетворить условию (1.1):

$$-\delta y'' + f'_{y'}\delta y' + f'_y \delta y \leqslant -\delta y'' + k(x)\delta y' + l(x)\delta y \text{ при } \delta y \geqslant 0.$$

Действительно, для любой пары функций $k(x)$, $l(x)$ найдется дважды дифференцируемая на отрезке [0,1] и обращающаяся в нуль на его концах положительная функция $\delta y$, для которой нарушается неравенство

$$(k(x) - f'_{y'})\delta y' + (l(x) - f'_y)\delta y \geqslant 0.$$

Оказывается, если в условии 1 вместо неравенства (1.1) выставить более слабое требование: именно условие

$$P(x + \Delta x) - P(x) \leqslant \Gamma\Delta x \text{ при } \Gamma\Delta x \geqslant 0,$$

то существенно расширяется класс задач, решаемых методом Чаплыгина. С таким видоизменением функциональная схема применена для решения задачи (1.5) в работе [5]. В многомерных задачах типа (1.5) (первая краевая задача для уравнений в частных производных второго порядка) даже для видоизмененной таким образом схемы не известно, как построить операцию $\Gamma$, т. е. получить линеаризованное уравнение $P(y_n) + \Gamma\delta y_n = 0$ для нахождения невязок $\delta y_n$ двусторонних приближений. Для таких задач применима следующая модификация функциональной схемы, более непосредственно отражающая сущность метода двусторонних монотонных приближений.

Пусть операция $P(x)$, определенная на $X$ обладает свойствами

1) *Из* $P(x) \leqslant P(y)$ *следует, что* $x \leqslant y$.

2) *Существует аддитивная положительная операция* $\Gamma$, *определенная на множестве* $P(x)$ *со значениями в* $X$, *удовлетворяющая условию: из* $P(x) \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$ *следует, что*

$$P(x-\Gamma P(x)) \geqslant 0 \; (\leqslant 0). \tag{1.6}$$

3) *Существуют элементы* $x_0$, $y_0$ *такие, что*

$$P(x_0) \leqslant 0 \leqslant P(y_0).$$

*Тогда, определяемые формулами*

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma P(x_n), \; y_{n+1} = y_n - \Gamma P(y_n), \; n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.7}$$

*последовательности* $x_n$, $y_n$ *удовлетворяют условиям*

$$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n.$$

*При этом, если* $P(x^*) = 0$, *то* $x_n \leqslant x^* \leqslant y_n$.

Доказательство высказанных утверждений мы опускаем, ввиду их простоты. Отметим, что, в отличие от предыдущих функциональных схем, в этой — невязки $\delta x_n$ и $\delta y_n$ получаются непосредственно из алгорифма (1.7), а не как решения линеаризованной задачи. Такая схема была использована в работе [6] для решения задачи

$$-\Delta u + f(x, u, u_x) = 0, \; u/_\sigma = 0.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа, $\sigma$ — граница области, в которой рассматривается уравнение. В настоящей работе мы применим ее для решения задачи

$$P(u) \equiv L u + f(x, t, u, u_x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(x, t, u, u_x) = 0, \tag{1.8}$$

$$u/_s = 0 \tag{1.9}$$

в цилиндре $D = \Omega \times (0, T]$, где $\Omega$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\sigma$ в 3-мерном эвклидовом пространстве; $(0, T]$ — интервал изменения переменной $t$, а $S = \Omega \cup \{\sigma \times (0, T]\}$.

Метод Чаплыгина в применении к задаче (1.8), (1.9) при $n=1$ рассмотрен в работе [7], где на функцию $f(x, t, u, u_x')$ наложены следующие условия: она непрерывна вместе со своими производными $f_x'$, $f_u'$, $f_{u_x}'$, $f_{xu_x}'$ в области $(x, t) \in \overline{D}$, $u^2 + u_x^2 < \infty$, $f_{xu_x}' - 2f_u' < 0$ и квадратичная форма вторых производных отрицательно определена

$$\psi = f_{u^2}'' \alpha^2 + 2 f_{uu_x}'' \alpha\beta + f_{u_x^2}'' \beta^2 < 0. \tag{1.10}$$

Использован метод линеаризации; невязки $\delta u_n$, $\delta u_n|_S = 0$ определяются из уравнения типа

$$L\delta u_n + f_{u_x}'(u_n)\, \delta u_n' + f_u'(u_n)\, \delta u_n + P(u_n) = \Gamma\delta u_n + P(u_n) = 0.$$

Легко видеть, что для $P(u_{n+1})$ получим

$$P(u_{n+1}) = P(u_{n+1}) - P(u_n) + P(u_n) = \Gamma\delta u_n + P(u_n) + \psi = \psi \leqslant 0.$$

Следовательно, условие (1.10) дает возможность получить лишь односторонние монотонные приближения $u_n$, именно те, для которых $P(u_n) \leqslant 0$. Поэтому в случае, когда функция $f$ зависит нелинейно от производной $u_x'$, получены лишь односторонние приближения. В этой работе задача рассмотрена „в малом“ (т. е. число $T$ предполагается достаточно малым). В случае же, когда $f$ не зависит от $u'_x$ или зависит линейно, построены двусторонние монотонные, т. е. чаплыгинские приближения.

## 2. Применение модифицированной функциональной схемы

2.1. Введем обозначения, используемые в дальнейшем. Через $x=(x_1, x_2, x_3)$ обозначим точку эвклидова пространства $E_3$, а через $u'_x(x, t)$ — любую из производных $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, 3)$. Аналогичный смысл имеет обозначение $u_{x^2}$; $f(x, t, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ обозначается через $f(x, t, u, u_x)$, а иногда и через $f(x, t, u)$ или просто $f(u)$; $\rho_x$—расстояние точки $x \in \Omega$ до границы $\sigma$, $D_\tau$ — цилиндр $\Omega \times (\tau < t \leqslant T]$, $n_\xi$ — нормаль к $\sigma$ в точке $\xi$. Через $c$ обозначаются постоянные, используемые в оценках, часто указываются параметры, от которых они зависят (постоянные обозначаются и буквами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\mu$, $\nu$).

В дальнейшем используются определения.

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет по $x$ условию Гельдера с показателем $\alpha$ (или $u(x, t)$ непрерывна по Гельдеру с показателем $\alpha$ относительно $x$) в области $D$, если имеет место неравенство $|u(x, t) - u(x', t)| \leqslant c|x-x'|^\alpha$, где $x$ и $x'$—произвольные точки из $\Omega$, $0<t\leqslant T$.

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет условию $A_\alpha$ в $D$, если $u(x, t)$ $u'_x(x, t)$ и $Lu(x, t)$ непрерывны в $DUS$ по совокупности $(x, t)$ и по $x$ удовлетворяют в $D$ условию Гельдера с показателем $\alpha$.

Рассмотрим задачу (1.8), (1.9), предъявляя к функции $f$ следующие требования. В области $(x, t) \in DUS$, $u^2 + \mathrm{grad}^2\, u < \infty$ она по совокупности аргументов непрерывна, по $x$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha_0$ $(\alpha_0 < 1)$

$$|f(x, t, u) - f(x', t, u)| \leqslant c|x-x'|^{\alpha_0}, \tag{2.1}$$

имеет непрерывные производные $f'_u$, $f'_{u_x}$, удовлетворяющие условиям

$$|f'_u| \leqslant M, \quad |f'_{u_x}| \leqslant M, \tag{2.2}$$

где $M$ — некоторая постоянная.

Предположим, что $\sigma$ принадлежит классу $c^{2\lambda}$. Решение задачи (1.8), (1.9) ищется среди регулярных функций, т. е. функций, непрерывных в $DUS$ и обладающих внутри области непрерывными производными, входящими в уравнение (1.8).

Докажем единственность регулярного решения.

Если $u(x, t)$ и $v(x, t)$ такие решения, то функция $z(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ является решением задачи

$$Lz + \sum_{l=1}^{3} f'_{u_{x_l}} z'_{x_l} + f'_u z = 0, \quad z|_s = 0.$$

Здесь значения производных вычислены для некоторых промежуточных значений аргументов согласно формуле Лагранжа (впредь это специально не будет оговорено). Функция $w(x, t) = e^{-Mt} z(x, t)$ является решением задачи

$$Lw + \sum_{i=1}^{3} f'_{u_{x_i}} w'_{x_i} + (f'_u + M) w = 0, \quad w|_S = 0. \tag{2.3}$$

Если $z(x, t) \not\equiv 0$, то функция $w(x, t)$ должна иметь в области $\bar{D} \setminus S$ точку положительного максимума или отрицательного минимума. В этой точке нарушается равенство (2.3). Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Перейдем к функциональной схеме. В качестве группы $X$ возьмем множество регулярных функций, обращающихся в нуль на $S$ и удовлетворяющих условию $A_{\alpha}$. Упорядочение в ней—обычное упорядочение для непрерывных функций. В такой группе свойство 1 для операции $P$ устанавливается с помощью принципа максимума, аналогично тому, как это было сделано только что при доказательстве единственности регулярного решения задачи. Рассмотрение свойства 2. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть функция $G(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет следующим условиям:* а) *она определена и непрерывна по совокупности аргументов в области*

$$x \in \overline{\Omega}, \; \xi \in \Omega, \; 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \tag{2.4}$$

*по $x$ и $t$ при фиксированных $\xi$ и $\tau$ удовлетворяет в $D_\tau$ уравнению*

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G + M \sum_{i=1}^{3} |G'_{x_i}| + MG = 0; \tag{2.5}$$

б) $G(x, t, \xi, \tau) \geqslant 0$ *в области* (2.4);

в) *функция*

$$z(x, t) = \int_0^t \int_\Omega G(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau, \tag{2.6}$$

*где $\varphi(x, t)$ непрерывна в $DUS$ и удовлетворяет по $x$ в $D$ условию Гельдера с показателем $\alpha$ $(\alpha < 1)$, непрерывна в $DUS$, $z(x, t)|_S = 0$;*

г) *в области $D$ функция $z(x, t)$ имеет непрерывные производные, определяемые формулами*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x_i} &= \int_0^t \int_\Omega G'_{x_i}(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau; \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} &= \int_0^t \int_\Omega G'_{x_i x_j}(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau; \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \int_0^t \int_\Omega G'_t(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau + \varphi(x, t)
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

*и удовлетворяет условию $A_\alpha$.*

*Тогда*

$$\Gamma\psi = \int_0^t \int_\Omega G(x, t, \xi, \tau)\, \psi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau \tag{2.8}$$

—*операция, требуемая в свойстве* 2).

Доказательство. Положительность операции Г следует непосредственно из условия б). Докажем справедливость неравенства (1.6). Пусть $u \in X$. В силу неравенств (2.2) функция $P(u) = Lu + f(x, t, u, u_x)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к функции $\varphi(x, t)$ в условии в). Тогда из условий в) и г) вытекает, что функция $z(x, t) = \Gamma P(u)$ принадлежит $X$ и $Lz$ имеет вид

$$Lz = P(u) + \int_0^t \int_\Omega LG(x, t, \xi, \tau)\, P(u)\, d\xi d\tau.$$

Рассмотрим, например, случай $P(u) \geqslant 0$.

$$P(u - \Gamma P(u)) = Lu - L\Gamma P(u) + f(u - \Gamma P(u)) = Lu + f(u) - L\Gamma P(u) +$$

$$+ f(u - \Gamma P(u)) - f(u) = P(u) - Lz - \sum_{i=1}^{3} f'_{u_{x_i}} z'_{x_i} - f'_u z.$$

Отсюда легко получить неравенство

$$P(u - \Gamma P(u)) \geqslant - \int_0^t \int_\Omega \left\{ LG + M \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial G}{\partial x_i} \right| + MG \right\} P(u)\, d\xi d\tau = 0.$$

Аналогично рассматривается случай $P(u) \leqslant 0$. Лемма доказана.

Для построения операции Г остается построить функцию $G(x, t, \xi, \tau)$, удовлетворяющую условиям леммы.

2.2. Пусть $H(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$Lu \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u = 0 \tag{2.9}$$

в области $D$. Функция $h(x, t, \xi, \tau) = \dfrac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2}}$ — фундаментальное решение уравнения (2.9), а $g(x, t, \xi, \tau)$ — регулярная часть функции Грина, определяемая интегральным уравнением

$$g(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta) \frac{\partial H(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\, d\zeta d\theta. \tag{2.10}$$

Как известно, функция $H(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant H(x, t, \xi, \tau) \leqslant h(x, t, \xi, \tau) = \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2}}. \tag{2.11}$$

В работе [8] доказано, что для любой пары точек $x$ и $x'$ из $\Omega$, $\xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ справедливы оценки

$$|H'_x(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_1(\varepsilon) \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} = c_1(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2}, \qquad (2.12)$$

$$|H'_x(x, t, \xi, \tau) - H'_x(x', t, \xi, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\nu, \alpha) \frac{e(\nu, x, \xi, t, \tau) + e(\nu, x', \xi, t, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x - x'|^{\alpha}, \qquad (2.13)$$

где для краткости через $e(\mu, x, \xi, t, \tau)$ обозначена функция $e^{-\mu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}$, а $\varepsilon$, $\alpha$, $\nu$ — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} \varepsilon > 0 \text{ — произвольное число,} \\ 0 < \alpha < 1 \text{ — произвольное число,} \\ 0 < \nu < \frac{1}{4} \text{ — некоторое число.} \end{gathered} \qquad (2.14)$$

Следуя Леви [9] будем искать функцию $G(x, t, \xi, \tau)$ в виде

$$G(x, t, \xi, \tau) = H(x, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta, \qquad (2.15)$$

где $\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)$ подлежит определению. Пусть функция $\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)$ определена и непрерывна при $\zeta, \xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < \theta \leqslant T$, и для любой пары $\zeta$ и $\zeta' \in \Omega$ выполнены неравенства

$$|\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)| \leqslant c_3(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, \zeta, \xi, \theta, \tau\right)}{(\theta-\tau)^2}, \qquad (2.16)$$

$$|\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau) - \Phi(\zeta', \theta, \xi, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c_4(\nu, \alpha) \frac{e(\nu, \zeta, \xi, \theta, \tau) + e(\nu, \zeta', \xi, \theta, \tau)}{(\theta-\tau)^2} |\zeta - \zeta'|^{\alpha}. \qquad (2.17)$$

Здесь постоянные $\varepsilon$, $\alpha$, $\nu$ удовлетворяют прежним условиям (2.14). Доказательство неравенств (2.16), (2.17) будет дано ниже. Перепишем $G(x, t, \xi, \tau)$ в виде

$$G(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau) +$$
$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta + \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta =$$
$$= h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau) + h^*(x, t, \xi, \tau) + g^*(x, t, \xi, \tau). \qquad (2.18)$$

Рассмотрим сначала функцию $h^*(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t} J(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta$, где

$$J(x, t, \theta, \xi, \tau) = \int\limits_{\Omega} h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta, \quad \tau < \theta < t.$$

Установим для нее оценку

$$|h^*(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_5(\varepsilon)\, \frac{e\left(\dfrac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{t - \tau}. \tag{2.19}$$

Из соотношений (2.11) и (2.16) получим для $J(x, t, \theta, \xi, \tau)$ неравенство

$$|J(x, t, \theta, \xi, \tau)| \leqslant c_6(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(\tau-\theta)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^2}\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c_6(\varepsilon)\, e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} \int\limits_{\Omega} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{(t-\tau)}{(t-\theta)(\theta-\tau)}\left[\zeta - \frac{\theta-\tau}{t-\tau}x - \frac{t-\theta}{t-\tau}\xi\right]}}{(t-\theta)^{3/2}(\theta-\tau)^2}\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c_6(\varepsilon)\, \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{} \int\limits_{\Omega'} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\left[\zeta' - \frac{\theta-\tau}{t-\tau}x' - \frac{t-\theta}{t-\tau}\xi'\right]}}{(\theta-\tau)^{1/2}}\, d\zeta' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_7(\varepsilon)}{(\theta-\tau)^{1/2}} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Интегрируя по $\theta$ получим

$$|h^*(x, t, \xi, \tau)| = \left|\int\limits_{\tau}^{t} J(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta\right| \leqslant c_5(\varepsilon)\, \frac{e\left(\dfrac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{t - \tau},$$

т. е. оценку (2.19). Аналогичным образом оценивается интеграл

$$J'_x(x, t, \theta, \xi, \tau) = \int\limits_{\Omega} h'_x(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta$$

$$|J'_x(x, t, \theta, \xi, \tau)| \leqslant \frac{c_8(\varepsilon)}{(t-\theta)^{1/2}(\theta-\tau)^{1/2}} \cdot \frac{e\left(\dfrac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость интеграла $\int\limits_{\tau}^{t} J'_x(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta$

для значений $t - \tau \geqslant \delta_0 > 0$, а также неравенство

$$\left|\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Omega} h'_x(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta\right| \leqslant c_9(\varepsilon)\, \frac{e\left(\dfrac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Следовательно, в $D_\tau$ функция $h^*(x, t, \xi, \tau)$ имеет непрерывную производную по $x$, выражающуюся формулой

$$h^{*\prime}_x(x, t, \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Omega} h'_x(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta, \tag{2.20}$$

при этом верна оценка

$$|h_x^{*'}(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_9(\varepsilon)\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{3/2}}. \tag{2.21}$$

Для второй производной $\dot{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau)$ функции $J$ легко получить неравенство

$$|\dot{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau) \leqslant \frac{c_{10}(\varepsilon)\, e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\theta)(\theta-\tau)^{1/2}(t-\tau)^{3/2}}.$$

Обозначая $t_1=\frac{t+\tau}{2}$, нетрудно убедиться, что из этого неравенства вытекает равномерная сходимость интеграла

$$\int_{\tau}^{t_1} \dot{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta.$$

Для доказательства равномерной сходимости интеграла

$$\int_{t_1}^{t} \dot{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta$$

преобразуем выражение $J_x'(x, t, \theta, \xi, \tau)$ следующим образом. Пусть $y$ — произвольная точка из $\Omega$, тогда

$$J_{x_i}'(x, t, \theta, \xi, \tau)=\int_{\Omega} h_{x_i}'(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta=$$

$$=\int_{\Omega} h_{x_i}'(x, t, \zeta, \theta)\,[\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)-\Phi(y, \theta, \xi, \tau)]\, d\zeta-$$

$$-\Phi(y, \theta, \xi, \tau)\int_{\sigma} h(x, t, \zeta, \theta)\cos(n_{\zeta}, x_i)\, d\zeta.$$

Дифференцируя это выражение по $x_j$ и полагая затем $y=x$, будем иметь

$$J_{x_i x_j}'(x, t, \theta, \xi, \tau)=\int_{\Omega} \dot{h}_{x_i x_j}(x, t, \xi, \theta)\,[\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)-\Phi(x, \theta, \xi, \tau)]\, d\zeta-$$

$$-\Phi(x, \theta, \xi, \tau)\int_{\sigma} h_{x_j}'(x, t, \zeta, \theta)\cos(n_{\zeta}, x_i)\, d\zeta=I_1+I_2.$$

Используя соотношения (2.11), (2.16) и (2.17) получим

$$|I_1| \leqslant \frac{c_{11}(\nu, \alpha)\, e(\nu, x, \xi, t, \tau)}{(t-\theta)^{\frac{2-\alpha}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{1+\alpha}{2}}(t-\tau)^{3/2}}.$$

Из соотношений (2.11) и (2.16) следует, что

$$|I_2| < c_{13}(\varepsilon, \rho_x) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2}.$$

При $t - \tau \geqslant \delta_0 > 0$ из полученных оценок вытекает равномерная сходимость интеграла

$$\int_{t_1}^{t} J_{x_i x_j}^{*}(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta = \int_{t_1}^{t}\int_{\Omega} h_{x_i x_j}^{*}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

Таким образом, в области $D_\tau$ существует вторая непрерывная производная функции $h^*(x, t, \xi, \tau)$ по $x$, вычисляемая по формуле

$$h_{x^2}^{*''}(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_{x^2}^{''}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta. \qquad (2.22)$$

Покажем, что в области $D_\tau$ существует непрерывная производная $h_t^{*'}(x, t, \xi, \tau)$, определяющаяся формулой

$$h_t^{*'}(x, t, \xi, \tau) = \Phi(x, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t^{'}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta. \qquad (2.23)$$

В силу равенства $h_t^{'} = \Delta h$, равномерная сходимость интеграла, стоящего в правой части последнего соотношения, вытекает из равномерной сходимости интеграла, входящего в равенство (2.22). Следовательно, $h_t^{'}(x, t, \xi, \tau)$, определенная формулой (2.23), непрерывна. Остается установить формулу (2.23).

Пусть для определенности $\Delta t > 0$. Имеем

$$\frac{h^*(x, t+\Delta t, \xi, \tau) - h^*(x, t, \xi, \tau)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{\Omega} h(x, t+\Delta t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} \frac{h(x, t_0+\Delta t, \zeta, \theta) - h(x, t, \zeta, \theta)}{\Delta t}\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta =$$

$$= \int_{\Omega} h(x, t+\Delta t, \zeta, t')\, \Phi(\zeta, t', \xi, \tau)\, d\zeta +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t^{'}(x, t+\eta\Delta t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\, d\theta,$$

где $t'$ и $t + \eta\Delta t$ находятся между $t$ и $t + \Delta t$.

Поскольку $h(x, t, \xi, \tau)$ является фундаментальным решением, отсюда получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{\Omega} h\,(x,\,t+\Delta t,\,\zeta,\,t')\,\Phi\,(\zeta,\,t',\,\xi,\,\tau)\,d\zeta=\Phi\,(x,\,t,\,\xi,\,\tau). \tag{2.24}$$

Рассмотрим разность

$$\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t'\,(x,t+\eta\Delta t,\,\zeta,\,\theta)\,\Phi\,(\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta\,d\theta-\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t'\,(x,\,t,\,\zeta,\,\theta)\,\Phi\,(\zeta,\,\theta,\,\xi,\,\tau)\,d\zeta\,d\theta.$$

Перепишем ее в виде

$$\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega}\Big[\,h_t'(x,\,t+\eta\Delta t,\,\zeta,\,\theta)-h_t'\,(x,t,\,\zeta,\,\theta)\Big]\,\Phi\,(\zeta,\,\theta,\,\xi,\,\tau)\,d\zeta d\theta=$$

$$=\left(\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}+\int_{\tau+\varepsilon}^{t-\varepsilon}+\int_{t-\varepsilon}^{t}\right)\left\{\int_{\Omega}\Big[\,h_t'(x,\,t+\eta\Delta t,\,\zeta,\,\theta)-h_t'(x,\,t,\,\zeta,\,\theta)\Big]\Phi\,(\zeta,\,\theta,\,\xi,\,\tau)\,d\zeta\right\}d\theta.$$

Благодаря оценкам, с помощью которых устанавливается равномерная сходимость интеграла $\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t'\,\Phi d\zeta d\theta$, первый и третий интегралы правой части могут быть сделаны произвольно малыми для достаточно малого $\varepsilon>0$. Для таким образом фиксированного $\varepsilon$ второй интеграл становится достаточно малым при малых $\Delta t$. Отсюда с учетом (2.24) придем к формуле (2.23).

Для функции $g^*\,(x,\,t,\,\xi,\,\tau)=\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g\,(x,\,t,\,\zeta,\,\theta)\,\Phi\,(\zeta,\,\theta,\,\xi,\,\tau)\,d\zeta d\theta$, в силу регулярности $g\,(x,\,t,\xi,\,\tau)$, в области $D_{\tau}$ существуют и непрерывны производные

$$g_x^{*\prime}\,(x,t,\xi,\tau)=\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g_x'\,(x,\,t,\,\zeta,\,\theta)\,\Phi\,(\zeta,\theta,\,\xi,\,\tau)\,d\zeta d\theta,$$

$$g_{x^2}^{*\prime\prime}(x,\,t,\xi,\,\tau)=\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g_{x^2}''(x,\,t,\zeta,\,\theta)\,\Phi\,(\zeta,\,\theta,\,\xi,\,\tau)\,d\zeta\,d\theta, \tag{2.25}$$

$$g_t^{*\prime}\,(x,t,\,\xi,\,\tau)=\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g_t'\,(x,t,\zeta,\,\theta)\,\Phi\,(\zeta,\,\theta,\xi,\,\tau)\,d\zeta d\theta.$$

При этом функция $g^*$ и ее производная по $x$, благодаря оценкам (2.11), (2.12) и (2.16), удовлетворяют неравенствам

$$g^*\,(x,t,\xi,\,\tau)\leqslant c_{13}\,(\varepsilon)\,\frac{e\left(\dfrac{1}{4}-\varepsilon,\,x,\,\xi,\,t,\,\tau\right)}{(t-\tau)}, \tag{2.26}$$

$$g_x^{*\prime}\,(x,\,t,\,\xi,\,\tau)\leqslant c_{14}\,(\varepsilon)\,\frac{e\left(\dfrac{1}{4}-\varepsilon,\,x,\,\xi,\,t,\,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.27}$$

Для функции $G(x, t, \xi, \tau)$, как это следует из (2.18), (2.20), (2.22), (2.23), (2.25), существуют в области $D_\tau$ производные $G'_x$, $G''_{x^2}$, $G'_t$, вычисляемые по формулам

$$G'_x(x, t, \xi, \tau) = H'_x(x, t, \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_\Omega H'_x(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta,$$

$$G''_{x^2}(x, t, \xi, \tau) = H''_{x^2}(x, t, \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_\Omega H''_{x^2}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta,$$

$$G'_t(x, t, \xi, \tau) = \Phi(x, t, \xi, \tau) + H'_t(x, t, \xi, \tau) + \qquad (2.28)$$

$$+ \int_\tau^t \int_\Omega H'_t(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

Для функции $G$ и ее производной $G'_x$, в силу неравенств (2.11), (2.19), (2.26), (2.12), (2.21), (2.27), справедливы оценки

$$|G(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{15}(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{t - \tau}, \qquad (2.29)$$

$$|G'_x(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{16}(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2.30)$$

Из последней оценки следует, что $G(x, t, \xi, \tau)$ определена в $\overline{\Omega}$ и непрерывна по $x$ при $t > \tau$. Перейдем к построению функции $\Phi(x, t, \xi, \tau)$. Поскольку функция $G(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет в области $D_\tau$ уравнению (2.5), приходим к интегральному уравнению

$$\Phi(x, t, \xi, \tau) + M \sum_{i=1}^{3} \left|H_{x_i}(x, t, \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_\Omega H_{x_i}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta\right| +$$

$$+ M\left[H(x, t, \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_\Omega H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta\right] = 0. \qquad (2.31)$$

Решение $\Phi(x, t, \xi, \tau)$ этого уравнения строится методом итерации.

Пусть $\Phi_0(x, t, \xi, \tau) = 0$, тогда, с помощью неравенств (2.11), (2.12), (2.16), легко получить для последующих приближений оценки

$$|\Phi_1(x, t, \xi, \tau)| \leqslant M\left[|H(x, t, \xi, \tau)| + \sum_{i=1}^{3} |H'_{x_i}(x, t, \xi, \tau)|\right] \leqslant$$

$$\leqslant c_{17}(\varepsilon)\, M \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t - \tau)^2},$$

$$|\Phi_2(x,t,\xi,\tau)-\Phi_1(x,t,\xi,\tau)|\leqslant M\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega\Big[|H(x,t,\zeta,\theta)|+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}|H'_{x_l}(x,t,\zeta,\theta)|\Big]|\Phi_1(\zeta,\theta,\xi,\tau)-\Phi_0(\zeta,\theta,\xi,\tau)|\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant(c_{17}M)^2\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\zeta,t,\theta\right)e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,\zeta,\xi,\theta,\tau\right)}{(t-\theta)^2(\theta-\tau)^2}\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant(c_{17}M)^2c_{18}\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{1}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{(c_{17}M)^2c_{18}e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^1(1-z)^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=\frac{(c_{17}M)^2c_{18}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

$$|\Phi_3(x,t,\xi,\tau)-\Phi_2(x,t,\xi,\tau)|\leqslant M\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega\Big[|H(x,t,\zeta,\theta)|+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}|H_{x_l}(x,t,\zeta,\theta)|\Big]|\Phi_2(\zeta,\theta,\xi,\tau)-\Phi(\zeta,\theta,\xi,\tau)|\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant(c_{17}M)^3c_{18}^2\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{t-\tau}\int\limits_0^1(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=\frac{(c_{17}M)^3c_{18}^2e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{t-\tau}\,\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)}.$$

И вообще

$$|\Phi_{n+1}(x,t,\xi,\tau)-\Phi_n(x,t,\xi,\tau)|\leqslant\frac{(c_{17}M)^{n+1}c_{18}^{n}e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{4-n}{2}}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},\qquad n=0,1,2,\cdots,\qquad(2.32)$$

где функция $\Gamma(m)$ — Гамма-функция Эйлера. Используя известное свойство функции $\Gamma$ для значений переменных $x$, $\xi \in \Omega$, $t > \tau$, из оценки (2.32) получим равномерную сходимость последовательности $\Phi_n(x, t, \xi, \tau)$ к некоторой функции $\Phi(x, t, \xi, \tau)$, а также оценку (2.16). Предельная функция $\Phi(x, t, \xi, \tau)$, очевидно, непрерывна и удовлетворяет уравнению (2.31). Докажем справедливость соотношения (2.17). Из уравнения (2.31) имеем

$$|\Phi(x, t, \xi, \tau) - \Phi(x', t, \xi, \tau)| \leqslant M|H(x, t, \xi, \tau) - H(x', t, \xi, \tau)| +$$
$$+ M\int_\tau^t\int_\Omega |H(x, t, \zeta, \theta) - H(x', t, \zeta, \theta)|\,\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta +$$
$$+ M\sum_{l=1}^{3}|H_{x_l}(x, t, \xi, \tau) - H_{x_l}(x', t, \xi, \tau)| + M\int_\tau^t\int_\Omega \sum_{l=1}^{3}|H_{x_l}(x, t, \zeta, \theta) -$$
$$- H_{x_l}(x', t, \zeta, \theta)|\cdot|\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)|\,d\zeta d\theta = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Оценим слагаемое $J_1$. Пусть $\eta$ — некоторое фиксированное число,

а) если $|x - x'| \geqslant \eta(t - \tau)^{\frac{1}{2}}$, то согласно неравенству (2.11)

$$|J_1| \leqslant c_{19}(\eta, \alpha)\,\frac{|x - x'|^\alpha}{(t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{e\left(\frac{1}{4}, x, \xi, t, \tau\right) + e\left(\frac{1}{4}, x', \xi, t, \tau\right)}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}}; \quad (2.33)$$

б) если $|x - x'| < \eta(t - \tau)^{\frac{1}{2}}$, тогда из неравенства (2.12) получим $|J_1| \leqslant$

$$\leqslant |x - x'|\,|H_x(\tilde{x}, t, \xi, \tau)| \leqslant c_1(\varepsilon)|x - x'|\,\frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, \tilde{x}, \xi, t, \tau\right)}{(t - \tau)^2},$$

где $\tilde{x}$ — некоторая внутренняя точка отрезка $[x, x']$. Используя известные неравенства: $e^{-\mu|x - \xi|^2} \leqslant c(\mu, \varepsilon, \nu)\,e^{-(\mu - \varepsilon)\xi^2}$ при $|x| \leqslant \nu$ и $x^\beta e^{-\mu x^2} \leqslant c(\varepsilon, \mu, \beta)\,e^{-(\mu - \varepsilon)x^2}$; $\mu, \beta > 0$, придем к оценке

$$|J_1| \leqslant c_{20}(\eta, \varepsilon)\,\frac{|x - x'|\,e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t - \tau)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{21}(\eta, \varepsilon, \alpha)\,e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t - \tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}}\,|x - x'|^\alpha,$$

где, как и в неравенстве (2.33), $\alpha$ — произвольное число из интервала (0, 1).

Отсюда и из (2.33) будем иметь

$$|J_1| \leqslant c_{22}(\varepsilon, \alpha)\,\frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right) + e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x', \xi, t, \tau\right)}{(t - \tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} \times$$
$$\times |x - x'|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2.34)$$

Известно, что $J_3$ удовлетворяет оценке

$$|J_3| \leqslant c_{23}(\nu, \alpha)\frac{e(\nu, x, \xi, t, \tau) + e(\nu, x', \xi, t, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}|x-x'|^{\alpha} \quad (0<\alpha<1). \tag{2.35}$$

Из (2.34), (2.35) и (2.16) получим для $J_2$ и $J_4$

$$|J_2| \leqslant c_{24}(\varepsilon, \alpha)\,\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x, t, \xi, \tau\right)+e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x', t, \xi, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{2+\alpha}{2}}}\,|x-x'|^{\alpha},$$

$$|J_4| \leqslant c_{25}(\nu, \alpha)\frac{e(\nu, x, t, \xi, \tau) + e(\nu, x', t, \xi, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}}|x-x'|^{\alpha}.$$

Отсюда и из неравенств (2.34), (2.35) непосредственно вытекает неравенство (2.17). Тем самым доказано, что $G(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет условию а), а также установлена законность построений, основанных на априорных неравенствах (2.16) и (2.17).

Перейдем к условию б). Рассмотрим поведение $G(x, t, \xi, \tau)$ при стремлении точки $(x, t)$ к границе $S_\tau$ цилиндра $D_\tau$ при фиксированных $\xi \in \Omega$ и $\tau \geqslant 0$. Пусть $x_1 \in \sigma$, $K_\rho$ — шар радиуса $\rho \leqslant \frac{|x-\xi|}{2}$ с центром в точке $x_1$, а числа $\delta_0$, $\delta$ — постоянные, $\delta_0 < \delta \leqslant \frac{t-\tau}{2}$. Тогда, как известно, $H(x_1, t, \xi, \tau) = 0$. Разобьем интегральный член в представлении (2.15) функции $G$ на слагаемые вида

$$\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} H(x, t, \zeta, \theta)\,\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta = \left(\int_{t-\delta_0}^{t}\int_{\Omega} + \int_{\tau}^{t-\delta_0}\int_{\Omega\setminus K_\rho} + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t-\delta_0}\int_{K_\rho}\right) H(x, t, \zeta, \theta)\,\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta. \tag{2.36}$$

Для первого и третьего интегралов правой части получим оценки

$$\int_{t-\delta_0}^{t}\int_{\Omega} H(x, t, \zeta, \theta)\,\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta \leqslant c_{26}(\varepsilon)\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \int_{t-\delta_0}^{t}\frac{d\theta}{(\theta-\tau)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{c_{27}\,\delta_0}{\delta^2},$$

$$\int_{\tau}^{t-\delta_0}\int_{K_\rho} H(x, t, \zeta, \theta)\,\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta \leqslant$$

$$< \frac{c_{28}(\varepsilon)}{\delta_0^{\frac{3}{2}}} \int_{\tau}^{t-\delta_0} \int_{K_\rho} \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, \xi, \zeta, \theta, \tau\right)}{(\theta-\tau)^2} d\zeta d\theta \leqslant \frac{c_{29}}{\delta_0^{\frac{3}{2}}} \int_{K_\rho} \frac{d\zeta}{|\zeta-\xi|^2} \leqslant \frac{c_{30}\rho}{\delta_0^{\frac{3}{2}}}.$$

Очевидно, что, выбрав подходящим образом $\delta_0$, а затем и $\rho$, можно правые части этих неравенств сделать достаточно малыми. Для фиксированного $\rho$ второй интеграл при стремлении $x$ к $x_1$ стремится к нулю. Следовательно, доказано соотношение

$$\lim_{x \to x_1} G(x,t,\xi,\tau) = 0. \tag{2.37}$$

На нижнем основании $D_\tau$, как известно, $g(x, t, \xi, \tau) \to 0$. Используя выражение (2.10) для функции $g(x, t, \xi, \tau)$, перепишем $g^*(x, t, \xi, \tau)$ в виде

$$\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta = \int_{\tau}^{t}\int_{\sigma} h(x, t, \alpha, \beta)\, \psi(\alpha, \beta, \xi, \tau)\, d\alpha d\beta,$$

где

$$\psi(\alpha, \beta, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{\beta}\int_{\Omega} \frac{\partial H(\alpha, \beta, \zeta, \theta)}{\partial n_\alpha} \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

Перемена порядка интегрирования здесь законна в силу оценок (2.11), (2.12) и (2.16). Из тех же оценок можно получить для функции $\psi$ неравенство

$$|\psi(\alpha, \beta, \xi, \tau)| \leqslant c_{31}(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, \alpha, \xi, \beta, \tau\right)}{(\beta-\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда следует, что

$$|g^*(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c'(\rho_\xi)\,(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ при } t \to \tau.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$v(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta,$$

которая, как это следует из (2.11) и (2.16), может быть отрицательной лишь при условии

$$\frac{e(\varepsilon, x, \xi, t, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} < c_{32}(\varepsilon).$$

При подходящем выборе $\varepsilon$ из последнего условия вытекает, что $v(x, t, \xi, \tau) = 0\,(t-\tau) \to 0$ при $t \to \tau$. Следовательно, граничные значения $v$ неотрицательны на нижнем основании цилиндра $D_\tau$. Из доказанных соотношений для отдельных слагаемых представления (2.18) функции $G$ следует неравенство

$$\lim_{t \to \tau+0} G(x, t, \xi, \tau) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \Omega,\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T. \tag{2.38}$$

Отсюда и из (2.37) вытекает, что функция $G(x, t, \xi, \tau)$ не может принимать отрицательных значений и в $D_\tau$ (в противном случае она должна достичь отрицательного минимума внутри $D_\tau$ или на ее верхнем основании, а это противоречит уравнению (2.5)). Выполнение условия б) доказано.

Проверим выполнение условий в) и г). Непрерывность в $D$ функции $z(x, t)$, определенной формулой (2.6), следует из непрерывности $G(x, t, \xi, \tau)$ и оценки (2.29). Из той же оценки следует непрерывность $z$ на нижнем основании цилиндра $D$, именно, $z(x, t) \to 0$ при $t \to 0$ равномерно по $x$ в области $\overline{\Omega}$. На боковой поверхности $\sigma \times (0, T]$ как и для интеграла (2.36), получим $z(x, t) \to 0$. Таким образом, доказана непрерывность $z(x, t)$ в $DUS$ и выполнение условия $z(x, t)|_s = 0$.

Для доказательства существования непрерывных производных, а также формул (2.7), представим $z(x, t)$ в виде

$$z(x, t) = \int_0^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega h^*(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g^*(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Подставляя в последнее соотношение выражения для функций $h^*$ и $g^*$ из формулы (2.18), получим

$$z(x, t) = \int_0^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta, \qquad (2.39)$$

где

$$\varphi_1(\zeta, \theta) = \int_0^\theta \int_\Omega \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Как легко проверить, функция $\varphi_1(\xi, \theta)$ непрерывна в $DUS$ и удовлетворяет неравенству $|\varphi_1(\zeta, \theta) - \varphi_1(\zeta', \theta)| \leqslant c_{33}(\alpha) |\zeta - \zeta'|^\alpha$, где $\alpha$ имеет то же значение, что и в неравенстве (2.17).

Второй и четвертый интегралы в представлении (2.39), ввиду регулярности функции $g$, допускают в $D$ непрерывные производные по $x$ первых двух порядков, а также производную по $t$. Эти производные получаются дифференцированием под знаком интеграла. Для первого и третьего интегралов с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были применены к функции $h^*(x, t, \xi, \tau)$, легко показать, что они обладают непрерывными производными первого и второго порядка по $x$, получаемыми дифференцированием под знаком интеграла, а также непрерывной производной по $t$.

При этом имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta = \varphi(x, t) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial t}\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial t}\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \Phi(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta =$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \varphi(\xi, \tau)\left[\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial t}\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta + \Phi(x, t, \xi, \tau)\right] d\xi d\tau =$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \left[\varphi(\xi, \tau)\, \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta\right] d\xi d\tau =$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \frac{\partial h^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial t}\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Таким образом, в $D$ установлены формулы для производных

$$z'_x(x, t) = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega G_x(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta;$$

$$z''_{x^2}(x, t) = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega G_{x^2}(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta; \tag{2.41}$$

$$z'_t(x, t) = \varphi(x, t) + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega G'_t(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Докажем непрерывность по Гельдеру функций $z_x(x, t)$ и $Lz$ относительно $x$ в области $D$. Из формул (2.41) имеем

$$Lz = \varphi(x, t) + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega LG(x, t, \xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau, \text{ но в } D.$$

$$LG(x, t, \xi, \tau) = LH(x, t, \xi, \tau) + L\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta =$$

$$= \Phi(x, t, \xi, \tau).$$

Следовательно,

$$Lz = \varphi(x, t) + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \Phi(x, t, \xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau = \varphi(x, t) + \varphi_1(x, t). \tag{2.42}$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость нашего утверждения относительно $Lz$.

Используя выражение

$$z_x(x, t) = \int_0^t \int_\Omega H_x(x, t, \zeta, \theta)\,[\varphi(\zeta, \theta) + \varphi_1(\zeta, \theta)]\,d\zeta d\theta,$$

из неравенства (2.13) получим

$$|z_x(x, t) - z_x(x', t)| \leqslant c_{34}(\alpha)\,|x - x'|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

Отсюда, очевидно, следует непрерывность по Гельдеру относительно $x$ и функции $z(x, t)$.

Итак, построенная функция $G(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет всем условиям леммы, следовательно интегральная операция (2,8) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к операции $\Gamma$ в модифицированной функциональной схеме. Для применимости функциональной схемы остается убедиться, что операция $P$ обладает свойством 3).

2.3. Функцию $u(x, t) \in X$ назовем верхней (нижней), если $P(u) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$). Согласно свойству 1) операции $P$ для любой пары верхних и нижних функций $v(x, t)$, $u(x, t)$ имеет место соотношение $u \leqslant v$. В частности, если $u^*(x, t)$— решение задачи (1.8), (1.9), то $u \leqslant u^* \leqslant v$.

Построим в $X$ пару верхних и нижних функций—начальные приближения $v_0(x, t)$ и $u_0(x, t)$.

Пусть $\gamma = \sup\limits_{(x, t) \in D} \int_0^t \int_\Omega H(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau$. В силу оценок (2.11), $\gamma \leqslant c_{35} \cdot T$.

Из разложения

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \sum_{l=1}^{3} f_{u_{x_l}} u_{x_l} + f_u u + f(x, t, 0, 0)$$

вытекает, что, если положительная функция $w(x, t)$ является решением задачи

$$L_1 w \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) w - M \sum_{l=1}^{3} \left|\frac{\partial w}{\partial x_l}\right| - N \geqslant 0, \quad (x, t) \in \overline{D} \setminus S$$

$$w|_S = 0,$$

где $N = \sup\limits_{(x, t) \in D} |f(x, t, 0, 0)|$, то функция $v(x, t) = w(x, t)\, e^{Mt}$ суть верхняя функция, а $u(x, t) \equiv -v(x, t)$ — нижняя функция.

Ищем решение $w(x, t)$ в виде: $w(x, t) = e^K - e^{K\omega(x, t)}$ (постоянную $K$ и функцию $\omega(x, t)$ выберем ниже). Имеем

$$L_1 w = \left(K^2 \operatorname{grad}^2 \omega + K \Delta\omega - K \frac{\partial \omega}{\partial t} - KM \sum_{l=1}^{3} \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_l}\right|\right) e^{K\omega} - N \geqslant$$

$$\geqslant \left[K^2 \operatorname{grad}^2 \omega - 3KM\,|\operatorname{grad} \omega| - K\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega\right)\right] e^{K\omega} - N \geqslant$$

$$\geqslant \left[ \left( K |\operatorname{grad} \omega| - \frac{3M}{2} \right)^2 - \frac{9M^2}{4} - K \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta \omega \right) \right] e^{K\omega} - N \geqslant$$

$$\geqslant \left[ - \frac{9M^2}{4} - K \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta \omega \right) \right] e^{K\omega} - N.$$

Отсюда вытекает, что, если функция $\omega(x, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta \omega = - c_{36}, \quad (x, t) \in \overline{D} \setminus S \tag{2.43}$$

$$\omega|_S = 1,$$

где положительная постоянная $c_{36}$ выбрана так, чтобы $\omega(x, t)$ удовлетворяла неравенствам $0 \leqslant \omega(x, t) \leqslant 1$, то при значениях $K$, удовлетворяющих условию $K \geqslant \frac{9M^2 + 4N}{4 c_{36}} = c_{37}$, имеем $L_1 \omega \geqslant 0$. При этом, очевидно, выполняется условие $w|_S = 0$. Легко проверить, что в качестве функции $\omega(x, t)$ можно взять функцию

$$\omega(x, t) = 1 - \frac{1}{\gamma} \int_0^t \int_\Omega H(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Для такой функции $\omega(x, t)$ постоянная $c_{36}$, входящая в уравнение (2.43), равна $\frac{3}{\gamma}$.

Тем самым построена пара верхних и нижних функций — первоначальные двусторонние приближения. Они, очевидно, принадлежат $X$.

2.4. Исходя из произвольной пары $u_0(x, t)$, $v_0(x, t)$ нижних и верхних функций, последующие чаплыгинские приближения определяются по алгорифму (1.7) формулами

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t) = \delta u_n(x, t) = - \int_0^t \int_\Omega G(x, t, \xi, \tau) P(u_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau, \\ v_{n+1}(x, t) - v_n(x, t) = \delta v_n(x, t) = - \int_0^t \int_\Omega G(x, t, \xi, \tau) P(v_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Последовательности $u_n$ и $v_n$ связаны соотношениями

$$u_0(x, t) \leqslant u_1(x, t) \leqslant \cdots \leqslant u_n(x, t) \leqslant \cdots \leqslant v_{n+1}(x, t) \leqslant v_n(x, t) \leqslant \cdots$$
$$\cdots \leqslant v_1(x, t) \leqslant v_0(x, t).$$

В силу монотонности, они стремятся соответственно к функциям $u(x, t)$ и $v(x, t)$; $u(x, t) \leqslant v(x, t)$.

Покажем, что предельные функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ являются регулярными решениями задачи (1.8). (1.9) и, следовательно, совпадают.

Из формул (2.42) и (2.44) имеем

$$P(u_{n+1}) = -\int_0^t\int_{\Omega}\Phi(x, t, \xi, \tau)\, P(u_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau -$$

$$-\sum_{l=1}^{3} f_{u_{x_l}} \int_0^t\int_{\Omega} G_{x_l}(x, t, \xi, \tau)\, P(u_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau -$$

$$- f_u \int_0^t\int_{\Omega} G(x, t, \xi, \tau)\, P(u_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau.$$

Используя оценки (2.16), (2.29), (2.30), отсюда получим

$$|P(u_1)| \leqslant c_{38}(\varepsilon)\int_0^t\int_{\Omega}\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2}\,|P(u_0(\xi, \tau))|\, d\xi d\tau \leqslant c_{39}\int_0^t\frac{k_0 d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= c_{39}\, k_0 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\, d\tau = c_{39} k_0 t^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)},$$

где $k_0 = \sup\limits_{(x, t)\in D} |P(u_0(x, t))|$,

$$|P(u_2)| \leqslant c_{39}^2\, k_0\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}\int_0^t\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau = c_{39}^2\, k_0 t\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right)}.$$

С помощью индукции придем к формуле

$$|P(u_m)| \leqslant \frac{k_0\, c_{39}^m\, t^{\frac{m}{2}}\,\Gamma^m\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)}. \tag{2.45}$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость в $D$ ряда $\sum\limits_0^\infty P(u_m)$. Но тогда из выражения $u_{m+r}(x, t) = \int_0^t\int_{\Omega} G(x, t, \xi, \tau) \times$ $\times \sum\limits_m^{m+r-1} P(u_k(\xi, \tau))\, d\xi d\tau + u_m(x, t)$, в силу оценок (2.29), (2.30), (2.45), следует равномерная сходимость последовательностей $u_m(x, t)$ и $\frac{\partial u_m(x, t)}{\partial x}$. Следовательно, функция $u(x, t)$ непрерывна и обладает непрерывной производной $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, являющейся пределом последовательности $\frac{\partial u_m(x, t)}{\partial x}$. Теперь легко завершить доказательство нашего утверждения. Действительно, из оценок (2.11), (2.45) следует, что

$$u_n(x, t) + \int_0^t \int_\Omega f(u_n) H(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau = \int_0^t \int_\Omega (L u_n +$$
$$+ f(u_n)) H(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau \to 0.$$

Пользуясь равномерной сходимостью последовательностей $u_n$ и $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, с учетом неравенств (2.11), (2.2), получим для функции $u(x, t)$ представление

$$u(x, t) = \int_0^t \int_\Omega H(x, t, \xi, \tau) f(u(\xi, \tau))\, d\xi d\tau. \qquad (2.46)$$

Из него следует, что $u(x, t)$ и ее производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывны по Гельдеру в $D$ с показателем $\alpha < 1$ относительно $x$. В силу неравенств (2.2) непрерывностью с показателем $\alpha_0$ будет обладать и функция $f(x, t, u, u_x)$. Тогда, очевидно, интегральным уравнением (2.46) определяется регулярное решение $u(x, t)$ задачи (1.8), (1.9). Совершенно аналогично доказывается, что $v(x, t)$ также является регулярным решением задачи. Итак, доказана

*Теорема. Пусть* $\sigma \in C^{2\lambda}$ $(\lambda < 1)$, *а функция* $f(x, t, u, u_x)$ *непрерывна по совокупности аргументов в области* $(x, t) \in DUS$, $u^2 + \text{grad}^2 u < \infty$ *и удовлетворяет условиям* (2.1) *и* (2.2).

*Тогда существует единственное регулярное решение задачи* (1.8), (1.9), *являющееся пределом двусторонних, монотонных (чаплыгинских) приближений, сходящихся к ней равномерно вместе с производными по x первого порядка.*

Ереванский политехнический институт
имени Карла Маркса

Поступило 16.XII.65

Գ. Վ. ԳԵՆՋՈՅԱՆ

## ՉԱՊԼԻԳԻՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՍԽԵՄԱՅԻ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՅԻ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Հոդվածում առաջարկվում է Չապլիգինի մեթոդի ֆունկցիոնալ սխեմայի մի տարբերակ, որում չապլիգինյան մոտավորությունները ստացվում են անմիջականորեն, հատուկ ձևով կառուցված կորիզի միջոցով։*

*Այդ տարբերակը կիրառվում է*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(x, t, u, u_x') = 0 \\ u/s = 0 \end{array}\right| \qquad (I)$$

*խնդրի լուծման համար։ Այստեղ խնդիրը դիտարկվում է $\Omega\times(0, T)$ գլանում, որտեղ $\Omega$ -եռաչափ էվկլիդյան տարածության սահմանափակ տիրույթ է բավական ողորկ եզրով, $S$-ը նշված գլանի ստորին հիմքն է և կողմնային մակերևույթը։*

*Ստացված $v_n$ և $u_n$ չապլիգինյան հաջորդականությունները հավասարաչափ իրենց $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}$ և $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ ածանցյալների հետ մեկտեղ ձգտում են (I) խնդրի լուծմանը և նրա համապատասխան ածանցյալներին։*

G. V. GUENJOYAN

## ON THE MODIFICATION OF THE FUNCTIONAL SCHEME OF CHAPLIGIN'S METHOD AND ON ITS APPLICATIONS


### Summary

A variant of functional scheme of Chapligin's method is suggested in which. Chapligins successive approximations are directly obtained with the aid of a specially constructed kernel. The variant is used to solve the problem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(x, t, u, u'_x) &= 0 \\ u/s &= 0. \end{aligned}\right| \qquad \text{(I)}$$

Here the problem is discussed for the cylinder $\Omega\times(0, T]$ where $\Omega$ is a finite domain of the three-dimensional Euclidean space region with a rather smooth boundary, while $S$ is the lateral surface of the cylinder, together with its base.

Chapligin's successive approximations $u_n$ and $v_n$ together with their partial derivatives $\frac{dv_n}{dx_i}$ and $\frac{du_n}{dx_i}$ are proved to converge uniformly to the solution of the problem (1) and its corresponding derivatives.


### ЛИТЕРАТУРА


1. *С. А. Чаплыгин.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М. Л. Гостехиздат, 1950.
2. *А. Н. Балуев.* О методе С. А. Чаплыгина, Вестник ЛГУ, 13 (1956).
3. *С. Н. Слугин.* Приближенное решение операторных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина, ДАН СССР, 103, № 4, 1955.
4. *С. Н. Слугин.* Монотонные процессы двусторонних приближений в частично упорядоченной сходимостной группе, ДАН СССР, 147, № 1, 1962.
5. *Г. В. Генджоян.* О двусторонних чаплыгинских приближениях решения двухточечной граничной задачи, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964.
6. *Г. В. Генджоян.* О применении метода Чаплыгина к задаче Дирихле для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 1, 1965.
7. *П. К. Зерагия.* Граничные задачи для некоторых нелинейных уравнений параболического типа, Труды Тбилисского математического института, 24 (1957).
8. *Г. В. Генджоян.* Оценки функции Грина для параболических уравнений, Известия АН Арм.ССР, серия „Математика", 1, № 3 (1966).
9. *E. E. Levi.* Sulle equazioni lineare totalemente elliptiche alle derivate parziali, Rend. Circ. Matem., Palermo, 24 (1907), (русский перевод УМН, вып. VIII (1940)).