ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա • I, № 4, 1966 Математика

Р. В. АМБАРЦУМЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

КРИТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА ДЛЯ РАНДОМИЗИРОВАННОЙ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА

В последнее время возник интерес к рандомизированным задачам переноса в рассеивающей среде [1, 2]. Задачи, связанные с распространением излучения внутри одномерной среды, решаются сравнительно просто, что объясняется физически обоснованной возможностью предполагать экспоненциальность распределения длины свободного пробега частицы. Известно также, что многомерные задачи переноса могут быть сведены к рассмотрению одномерных задач, в которых, однако, это предположение не выполняется.

Вместе с тем представляет интерес вопрос, насколько далеко может быть продвинуто решение одномерной задачи при самой общей (анизотропной) модели рандомизации элементарных актов рассеяния, с сохранением предположения об экспоненциально распределенной длине пробега. Задание модели рандомизации должно, в частности, включать задание закона размножения при элементарном акте рассеяния.

Отметим две группы вопросов, возникающих при рассмотрении рандомизированных задач: во-первых, вопросы, касающиеся различных усредненных характеристик отраженного или пропущенного потока и событий, осуществляющихся с вероятностью единица; во-вторых, вопросы, касающиеся флюктуационной картины диффузно отраженного или пропущенного средой потока частиц, что имеет существенное значение при слабых падающих пучках.

Понятие критической толщины (одномерного) слоя, которое можно определить в терминах первой группы, является одной из важнейших характеристик процесса переноса. Определению критической толщины и посвящена предлагаемая работа.

1°. Рассмотрим одномерную среду оптической глубины τ $(0 < \tau \leqslant +\infty)$, в которую слева проникает частица.

В дальнейшем закон случайных блужданий и размножения этой частицы и ее потомков следующий:

1) вероятность того, что частица, двигающаяся в среде, распадется прежде, чем пройдет расстояние x, равна $1 - e^{-x}$;

2) если в некоторой точке распалась двигающаяся частица, то с вероятностью p_{ik} $(i,\ k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ вместо нее образуется i частиц, двигающихся в прежнем направлении и k частиц — в противоположном направлении. В частном случае, когда $i + k = 1$, происходит простое рассеяние;

3) если частица подходит к границе среды, то с вероятностью θ она отразится (т. е. изменит направление движения) и с вероятностью $1-\theta$ навсегда покинет среду.

Будем считать также, что частицы движутся с одной и той же постоянной скоростью и при распаде образуется конечное число частиц, т. е.

$$\sum_{l,\,k=0}^{\infty} p_{lk}=1,$$

а также, что конечны моменты

$$\sum_{k,\,l}^{\infty} l\, p_{lk}, \quad \sum_{l,\,k}^{\infty} k\, p_{lk}.$$

Отметим, что указанная рандомизация в упрощенной форме введена в работе 1.

В предлагаемой работе нас будет интересовать вероятность $P(\tau)$ возникновения в среде бесконечного числа частиц (в течение неограниченного времени) после того, как в среду извне вступила одна и только одна частица.

В частности будет полностью решена задача о нахождении критической толщины среды, т. е. числа τ_0, для которого

$$P(\tau)=\begin{cases} 0 & \text{при } \tau<\tau_0, \\ >0 & \text{при } \tau>\tau_0. \end{cases} \tag{1}$$

2°. Обозначим

$$U(\alpha,\beta)=\sum_{l,\,k=0}^{\infty} p_{lk}\alpha^l\beta^k \quad (|\alpha|, |\beta|\leqslant 1). \tag{2}$$

Теперь представим себе, что в некоторой точке x среды $(0, \tau)$ возникла частица, двигающаяся направо (налево). Через $\alpha(x)$ ($\beta(x)$) обозначим вероятность возникновения в среде бесконечного числа потомков этой частицы. Ясно, что

$$P(\tau)=\alpha(+0)=\beta(-0). \tag{3}$$

Зададим x некоторое приращение $\Delta x>0$. Тогда двигающаяся направо частица либо распадется в интервале $(x, x+\Delta x)$ при первом прохождении через него, либо нет.

Поскольку вероятности этих двух событий равны, соответственно, $1-e^{-\Delta x}$ и $e^{-\Delta x}$, то при малых Δx получим

$$\alpha(x)=(1-\Delta x)\,\alpha(x+\Delta x)+\Delta x\,[1-$$

$$-\sum_{l,\,k=0}^{\infty} p_{lk}(1-\alpha(x))^l\,(1-\beta(x))^k]+0\,(\Delta x)^2).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\alpha'(x)=\alpha(x)+U(1-\alpha(x), 1-\beta(x))-1 \quad (0<x<\tau). \tag{4}$$

Аналогично получим уравнение

$$\beta'(x)=-\beta(x)-U(1-\beta(x), 1-\alpha(x))+1. \tag{5}$$

(Так как, очевидно, $\beta(x) = \alpha(\tau - x)$, то уравнение (5) является следствием уравнения (4)).

Условие 3) об отражении частицы от концов среды запишется в форме

$$\beta(+0) = \theta\alpha(+0), \quad \alpha(\tau -) = \theta\beta(\tau -), \tag{6}$$

причем, естественно, второе из этих условий имеет смысл при $\tau < \infty$.

Таким образом, нам нужно исследовать задачу (4)—(6). Эта задача всегда имеет тривиальное (нулевое) решение, однако, если $P(\tau) > 0$, то она должна иметь также и ненулевое решение.

3°. Прежде, чем приступить к вычислению критической толщины заметим, что (это легко следует из физических соображений) $\alpha(+0)$ непрерывно зависит от τ. Предположим теперь, что $\tau > \tau_0$, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\tau) = \alpha(+0) > 0$, $\beta(+0) = \theta\varepsilon$.

Перепишем систему (4)—(5) в виде

$$\alpha'(x) = a_1\alpha + a_2\beta + A(\alpha, \beta), \tag{4'}$$

$$\beta'(x) = -a_2\alpha - a_1\beta + B(\alpha, \beta), \tag{5'}$$

где

$$a_1 = 1 - \left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha, \beta = 1}, \tag{7}$$

$$a_2 = - \left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\alpha, \beta = 1},$$

а функции A и B представляются рядами, слагаемые которых содержат произведения вида $\alpha^i \beta^j$, $i + j \geqslant 2$.

Таким образом, при малых ε

$$\alpha'(+0) = (a_1 + a_2\theta)\varepsilon + 0(\varepsilon^2),$$

$$\beta'(+0) = -(a_2 + a_1\theta)\varepsilon + 0(\varepsilon^2). \tag{8}$$

Из формул (4′)—(5′) имеем

$$\alpha'' = a_2\beta' + a_1\alpha' + \frac{\partial A}{\partial \alpha}(a_1\alpha + a_2\beta + A) + \frac{\partial A}{\partial \beta}(-a_2\alpha - a_1\beta + B).$$

Подставив это выражение в уравнение (5′), получим

$$\alpha'' + (a_2^2 - a_1^2)\alpha = A_1(\alpha, \beta) \tag{9}$$

и, аналогично,

$$\beta'' + (a_2^2 - a_1^2)\beta = B_1(\alpha, \beta), \tag{10}$$

где функции A_1 и B_1 обладают теми же свойствами, что и A и B.

Обозначим теперь $k = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ и рассмотрим два случая.

а) Пусть $a_1^2 \neq a_2^2$, т. е. $k \neq 0$. Тогда, применив метод вариации произвольных постоянных, перепишем систему (9)—(10) в виде

$$\alpha(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \int_0^x K(x, t) A_1(\alpha(t), \beta(t))\,dt, \tag{11}$$

$$\beta(x) = d_1 e^{kx} + d_2 e^{-kx} + \int_0^x K(x, t)\, B_1(\alpha(t), \beta(t))\, dt, \tag{12}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k} e^{k(x-t)} & \text{при } x > t, \\ \dfrac{1}{2k} e^{k(t-x)} & \text{при } x < t. \end{cases}$$

Учитывая условие (8), получим, что при $\varepsilon \to +0$

$$c_1 = \varepsilon \frac{a_1 + a_2\theta - k}{2k} + 0(\varepsilon^2), \quad c_2 = \varepsilon \frac{k - a_1 - a_2\theta}{2k} + 0(\varepsilon^2)$$

$$d_1 = \varepsilon \frac{k\theta - a_2 - a_1\theta}{2k} + 0(\varepsilon^2), \quad d_2 = \varepsilon \frac{\theta k + a_2 + a_1\theta}{2k} + 0(\varepsilon^2). \tag{13}$$

Система (11)—(12) является системой (вообще говоря, нелинейной) уравнений Вольтерра второго рода и поэтому существование и единственность решения при заданных c_1, c_2, d_1 и d_2 очевидны, а само решение можно найти обычным методом последовательных приближений.

Нам понадобится лишь оценка

$$\alpha(x) \leqslant \mathrm{const}\cdot\varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant \tau), \tag{14}$$

в справедливости которой легко можно убедиться.

Из второго условия (6) и из системы (11)—(12) применением оценки (14) получим, что при малых $\varepsilon = \alpha\ (+0)$

$$c_1 e^{k\tau} + c_2 e^{-k\tau} = \theta\,(d_1 e^{k\tau} + d_2 e^{-k\tau}) + 0(\varepsilon^2) \tag{15}$$

или

$$e^{2k\tau} = \frac{\theta d_2 - c_2}{c_1 - \theta d_1} + 0(\varepsilon). \tag{15'}$$

Поскольку при $\varepsilon \to +0$ $\tau \to \tau_0$, то

$$e^{2\tau_0\sqrt{a_1^2 - a_2^2}} = \frac{(1+\theta^2)\,a_1 + 2\theta a_2 - (1-\theta^2)\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}{(1+\theta^2)\,a_1 + 2\theta a_2 + (1-\theta^2)\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}. \tag{16}$$

Эта формула дает явное выражение для критической толщины τ_0 при $a_1^2 \neq a_2^2$. Из физических соображений следует, что при $a_1^2 < a_2^2$ τ_0 является наименьшим положительным решением уравнения (16). Если же $a_1^2 > a_2^2$, то случай $\tau_0 < 0$ означает отсутствие критической толщины (т. е. $P(+0) = 0$).

б) Пусть $a_1^2 = a_2^2$, т. е. $k=0$. Тогда соображения предыдущего параграфа приводят к системе

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= c_1 + c_2 x + \int_0^x K_1(x, t)\, A_1(\alpha(t), \beta(t))\, dt, \\ \beta(x) &= d_1 + d_2 x + \int_0^x K_1(x, t)\, B_1(\alpha(t), \beta(t))\, dt, \end{aligned} \tag{17}$$

где ядро K_1 имеет вид

$$K_1(x, t) = \begin{cases} x & \text{при } x > t, \\ t & \text{при } x < t. \end{cases} \qquad (17')$$

Так же, как и в случае а), при $\varepsilon \to +0$ имеем

$$c_1 = \varepsilon, \qquad c_2 = \varepsilon(a_1 + a_2\theta) + 0(\varepsilon^2),$$

$$d_1 = \theta\varepsilon, \qquad d_2 = -\varepsilon(a_2 + a_1\theta) + 0(\varepsilon^2),$$

откуда при $x = \tau$ (см. (17)) и $\varepsilon \to +0$ получим

$$\tau_0 = \frac{1 - \theta^2}{(1 + \theta^2)a_1 + 2\theta a_2}. \qquad (18)$$

Формулы (16) и (18) дают в явном виде полное решение задачи нахождения критической толщины.

4°. Поскольку формула (18) применима лишь в исключительном случае $|a_1| = |a_2|$, основное решение задачи нахождения критической толщины дает формула (16).

Однако эта формула показывает, что зависимость τ_0 от рандомизации качественно зависит от знака $a_1^2 - a_2^2$. Именно, при $a_1^2 - a_2^2 < 0$ эта зависимость в явном виде выражается через функцию arctg, а при $a_1^2 - a_2^2 > 0$ — через логарифм.

Заметим также, что, вообще говоря, τ_0 зависит не только от общего „коэффициента размножения" задачи

$$\overline{i + k} = \sum_{i, k=0}^{\infty} (i + k)p_{ik},$$

но и в отдельности от его компонент

$$\bar{i} = \sum_{i, k=0}^{\infty} ip_{ik} \quad \text{и} \quad \bar{k} = \sum_{i, k=0}^{\infty} k\, p_{ik}.$$

Однако интересно отметить, что при $\theta = 0$ и $\bar{i} + \bar{k} < 1$ $P(\tau) = 0$ при любом $0 < \tau \leqslant \infty$.

Действительно, в этом случае правая часть формулы (16) вещественна и меньше единицы и, следовательно, (так как $a_1^2 > a_2^2$) $\tau_0 < 0$.

В случае когда $\bar{k} = 0$ (или $a_2 = 0$, т. е. все потомки частицы летят в том же направлении, что и породившая их частица) и $\bar{i} > 1$, мы получаем следующую формулу:

$$\tau_0 = \frac{\log \theta^2}{2(1 - \bar{i})}.$$

Вместе с тем следует отметить, что если коэффициент размножения

$$\overline{i + k} > 1, \text{ то } P(+\infty) > 0.$$

5°. Следуя указанному выше методу можно решить задачу нахождения критической толщины и при следующем, более общем законе случайных блужданий и размножения частицы:

1) вероятность того, что частица, двигающаяся направо (налево), распадется прежде, чем пройдет расстояние x, равна

$$1-e^{-x} \quad (1-e^{-\omega x},\ \omega>0);$$

2) если в некоторой точке распалась частица, двигающаяся направо (налево), то с вероятностями p_{ik} (p'_{ik}) $(i, k=0, 1, 2, \cdots)$ вместо нее образуется i частиц, двигающихся направо, и k частиц—налево;

3) если частица подходит к точке 0 (или к τ при $\tau<\infty$), то с вероятностью θ_1 (θ_2) она отразится (т. е. изменит направление движения), а с вероятностью $1-\theta_1$ $(1-\theta_2)$ навсегда покинет среду.

В остальном предположения те же, что и ранее. В частности,

$$\Sigma p_{ik}=\Sigma p'_{ik}=1,\ \max\,(\Sigma i p_{ik},\ \ \Sigma k p_{ik},\ \Sigma i p'_{ik},\ \ \Sigma k p'_{ik})<\infty.$$

Таким образом, в данном случае среда, вообще говоря, анизотропна.

Если мы введем обозначения

$$U(\alpha, \beta)=\Sigma p_{ik}\alpha^i\beta^k,\ V(\alpha, \beta)=\Sigma p'_{ik}\alpha^i\beta^k,$$

$$a_1=1-\left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha,\beta=1},\quad b_1=\omega\left.\frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha,\beta=1},$$

$$a_2=-\left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right|_{\alpha,\beta=1},\quad b_2=\omega\left(\left.\frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right|_{\alpha,\beta=1}-1\right),$$

$$k_{\pm}=\frac{a_1+b_2}{2}\pm\sqrt{\frac{(a_1+b_2)^2}{4}-a_2b_1-b_2a_1}=s\pm\sqrt{r},$$

то для критической толщины τ_0 в этом, более общем, случае получим следующие явные выражения:

а) при $r\neq 0$, т. е. $k_+\neq k_-$

$$e^{2\sqrt{r}\tau_0}=\frac{a_1+a_2\theta_1-b_1\theta_2-b_2\theta_1\theta_2-(1-\theta_1\theta_2)\,k_+}{a_1+\theta_2\theta_1-b_1\theta_2-b_2\theta_1\theta_2-(1-\theta_1\theta_2)\,k_-};$$

б) при $r=0$, т. е. $k_1=k_2=s$

$$\tau_0=\frac{1-\theta_1\theta_2}{(1-\theta_1\theta_2)\,s-a_1-a_2\theta_1+b_1\theta_2+b_2\theta_1\theta_2}.$$

Разумеется, физический смысл имеет лишь случай $\tau_0\geqslant 0$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 17.III.66

ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՌԱՆԴՈՄԻԶԱՑՎԱԾ ՄԻԱՉԱՓ ՄՈԴԵԼԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ճառագայթման տեղափոխման որոշ եռաչափ խնդիրները կարող են բերվել միաչափ դեպքին մասնիկի ազատ վազքի էքսպոնենցիալ բաշխվածությունից հրաժարվելու գնով։

Սակայն բաց է մնում այն հարցը, թե ինչպիսի արդյունքներ կարելի է ստանալ միաչափ խնդրի լուծման ուղղությամբ, երբ դիտարկվում է ցրման էլեմենտար ակտի ռանդոմիզացիայի ամենաընդհանուր մոդելը՝ ուժի մեջ թողնելով մասնիկի ազատ վազքի էքսպոնենցիալ բաշխվածության ենթադրությունը։

Տվյալ հոդվածում լուծվում է միջավայրի կրիտիկական հաստությունը գտնելու այսպես դրված խնդիրը՝ ինչպես իզոտրոպ, այնպես էլ անիզոտրոպ դեպքերում։

R. V. AMBARTZUMIAN and A. B. NERSESSIAN

THE CRITICAL THICKNESS OF A ONE-DIMENTIONAL MODEL OF TRANSFER

Summary

The critical thicknees for a one-dimensional transfer problem is found under most general assumptions made about the elementary act of scattering.

The free path distribution of a particle is assumed to be exponential.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. В. Амбарцумян.* Рандомизированная задача диффузного отражения, Труды астрофизической школы (г. Пушкин, 1964), (в печати).
2. *R. Bellman.* Invariant imbedding time-dependent processes, vol. 2, New York (1964).