ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 4, 1966 Математика

Р. И. ОСИПОВ

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

Как известно исследованию рядов по системе Уолша посвящены работы многих математиков (Уолш, Файн, Шнейдер и др.), причем оказывается, что большинство результатов, полученных для тригонометрических рядов, переносятся на ряды по системе Уолша.

В настоящей статье доказывается, что хорошо известная теорема Меньшова об усиленном C-свойстве функций имеет свой аналог для системы Уолша, а именно, справедлива следующая

Теорема. Пусть $f(x)$ — измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 1]$. *Каково бы ни было $\sigma>0$ можно построить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $mE>1-\sigma$ и такую, что ее ряд Фурье по системе Уолша сходится равномерно на* $[0,1]$.

Доказательство этой теоремы в основном существенно отличается от доказательства теоремы Меньшова.

Определим сначала систему Уолша [3].

$$\varphi_0(x)\equiv 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\varphi_1(x)\equiv\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\[2ex] -1, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

$$\varphi_2^{(1)}(x)\equiv\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}<x\leqslant 1,\\[2ex] -1, & \dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4},\end{cases}$$

$$\varphi_2^{(2)}(x\equiv\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{4},\\[2ex] -1, & \dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}<x\leqslant 1,\end{cases}$$

. . . .
. . . .
. . . .

$$\varphi_{n+1}^{(2k-1)}(x)\equiv\begin{cases}\varphi_n^{(k)}(2x), & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\[2ex] (-1)^{k+1}\varphi_n^{(k)}(2x-1), & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}\qquad\text{(I)}$$

$$\varphi_{n+1}^{(2k)}(x) \equiv \begin{cases} \varphi_n^{(k)}(2x), & 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ (-1)^k \varphi_n^{(k)}(2x-1), & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases} \tag{II}$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots, \quad k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}.$$

Функция $\varphi_n^{(k)}(x)$ в точке разрыва полагается равной среднему арифметическому значению ее левого и правого пределов в этой точке. Все функции $\varphi_n^{(k)}(x)$ берутся положительными в интервале $(0,2^{-n})$; $\varphi_n^{(k)}(0) = 1$; $\varphi_n^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}$. Из (I) и (II)) видно, что функции $\varphi_{n+1}^{(2k-1)}(x)$, $\varphi_{n+1}^{(2k)}(x)$, где $n > 0$, получаются из $\varphi_n^{(k)}(x)$, причем первая из них четна, а вторая—нечетна относительно точки $x = \dfrac{1}{2}$; кроме того, эти функции на интервале $(0,2^{-1})$ имеют такую же структуру, что и функция $\varphi_n^{(k)}(x)$ на интервале $(0,1)$.

Введем некоторые обозначения.

Разобьем сегмент $[0,1]$ на 2^m равных частей и обозначим эти отрезки через $\Delta_m^{(i)}$, где i — порядковый номер отрезка, считая слева.

Положим

$$K_n^{(k)}(x, y) \equiv \varphi_0(x)\,\varphi_0(y) + \varphi_1(x)\,\varphi_1(y) + \cdots + \varphi_n^{(k)}(x)\,\varphi_n^{(k)}(y),$$

$$Q_n^{(k)}(x, y) \equiv \varphi_n^{(1)}(x)\,\varphi_n^{(1)}(y) + \cdots + \varphi_n^{(k)}(x)\,\varphi_n^{(k)}(y).$$

Сразу же отметим следующее свойство функции $K_n^{(k)}(x, y)$, которое впоследствии будет нами использовано.

А. Для любой ограниченной измеримой функции $\psi(x)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 \psi(y)\, K_n^{2^n-1}(x, y)\, dy \right| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\psi(x)|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Это вытекает из того факта, что аналогичное неравенство верно для системы Хаара, а также из того, что 2^n-ые частные суммы рядов Фурье по системе Хаара и по системе Уолша совпадают [2].

§ 1. Доказательство вспомогательных предложений

Лемма 1. *Пусть нам даны функция $\varphi_n^{(k)}(x)$ и интервалы $\Delta_m^{(i)}$, $\Delta_m^{(j)}$, $i < j$, $m \leqslant n$. Тогда выполнено одно из следующих соотношений*

а) $\varphi_n^{(k)}[x + (j-i)\,2^{-m}] \equiv \varphi_n^{(k)}(x)$, $x \in \Delta_m^{(i)}$,

б) $\varphi_n^{(k)}[x + (j-i)\,2^{-m}] \equiv -\varphi_n^{(k)}(x)$, $x \in \Delta_m^{(i)}$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно для $n = 1$. Предположим, что оно верно для $n \leqslant N$, и докажем его справедливость для $n = N + 1$.

Допустим сначала, что $\Delta_m^{(i)} \subset [0,2^{-1}]$, $\Delta_m^{(j)} \subset [0,2^{-1}]$, $i<j$, $m \leqslant N+1$. Как для четных $k=2l$, так и для нечетных $k=2l-1$ имеем: $\varphi_{N+1}^{(k)}(x)=\varphi_N^{(l)}(2x)$, $x \in [0,2^{-1}]$. Произведем замену переменной $2x=y$, где $x\in[0,2^{-1}]$, тогда $y\in[0,1]$ и $\varphi_{N+1}^{(k)}\left(\frac{y}{2}\right)\equiv\varphi_N^{(l)}(y)$, а интервалы $\Delta_m^{(i)}$ и $\Delta_m^{(j)}$ перейдут соответственно в интервалы $\Delta_{m-1}^{(i)}$ и $\Delta_{m-1}^{(j)}$, $m-1\leqslant N$. Но тогда по предположению индукции $\varphi_N^{(l)}(y)\equiv\varphi_N^{(l)}[y+(j-i)2^{-m+1}]$ при $y\in\Delta_{m-1}^{(i)}$ или, что то же самое,

$$\varphi_N^{(l)}(2x)\equiv\varphi_N^{(l)}\{2[x+(j-i)2^{-m}]\},\quad x\in\Delta_m^{(i)},$$

а из этого соотношения следует

$$\varphi_{N+1}^{(k)}(x)\equiv\varphi_{N+1}^{(k)}[x+(j-i)2^{-m}],\quad x\in\Delta_m^{(i)},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство аналогично в том случае, когда интервалы $\Delta_m^{(i)}$, $\Delta_m^{(j)}$ $(i<j)$ лежат на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Теперь предположим, что $\Delta_m^{(i)}\subset[0,2^{-1}]$ и $\Delta_m^{(j)}\subset\left[\frac{1}{2},1\right]$. Пусть $k=2l-1$, тогда в силу четности функции $\varphi_{N+1}^{(k)}(x)$ относительно точки $x=\frac{1}{2}$, справедливо соотношение

$$\varphi_{N+1}^{(k)}(x)=\varphi_{N+1}^{(k)}[x+\alpha\cdot 2^{-m}],\quad x\in\Delta_m^{(i)},\ \alpha=2^m-2i+1.$$

Если $j=\alpha$, то утверждение доказано, если же $j\neq\alpha$, то имеем $\Delta_m^{(j)}\subset\left[\frac{1}{2},1\right]$, $\Delta_m^{(\alpha)}\subset\left[\frac{1}{2},1\right]$ и рассматриваемый случай сводится к предыдущему. Аналогично поступаем и в случае четного k. Лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть даны целые положительные числа n, i и m, причем $m\leqslant n$, $i\leqslant 2^m$. Тогда число функций $\varphi_n^{(k)}(x)$, совпадающих на интервале $\Delta_m^{(i)}$, не превышает числа 2^m.*

Доказательство. Утверждение леммы легко проверить для $n=2$. Предположим, что оно справедливо для любого $n\leqslant N$, и докажем, что оно верно и для $n=N+1$.

Пусть $\Delta_m^{(i)}\subset\left[0,\frac{1}{2}\right]$, тогда $\varphi_{N+1}^{(2k-1)}(x)=\varphi_N^{(k)}(2x)$ и $\varphi_{N+1}^{(2k)}(x)=\varphi_N^{(k)}(2x)$, $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. После замены переменной $2x=y$, $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ получим

$$\varphi_{N+1}^{(2k-1)}\left(\frac{y}{2}\right)\equiv\varphi_N^{(k)}(y)\ \text{и}\ \varphi_{N+1}^{(2k)}\left(\frac{y}{2}\right)=\varphi_N^{(k)}(y)$$

при $y\in[0,1]$; интервал $\Delta_m^{(i)}$ перейдет в интервал $\Delta_{m-1}^{(i)}$. Поскольку

$m-1 < N$, то, по предположению, существует не больше, чем 2^{m-1} функций $\varphi_N^{(k)}(y)$, совпадающих на интервале $\Delta_{m-1}^{(l)}$. Отсюда следует, что существует не больше, чем 2^{m-1} функций $\varphi_n^{(k)}(2x)$ $\left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$, совпадающих на интервале $\Delta_{m-1}^{(l)}$. Но поскольку каждая функция $\varphi_n^{(k)}(2x)$ порождает две функции $\varphi_{N+1}^{(2k-1)}(x)$, $\varphi_{N+1}^{(2k)}(x)$, то ясно, что число функций $\varphi_{N+1}^{(k)}(x)$, совпадающих на интервале $\Delta_m^{(l)}$, не превышает числа $2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$.

Если $\Delta_m^{(l)} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, то поступаем аналогично $\Big($в этом случае производим замену переменной $2x-1=y$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\Big)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть дан интервал* $(c, d) \equiv \Delta_m^{(i)}$, *тогда для любого натурального числа* n, $n \geqslant m$, *максимальное число* N *функций* $\varphi_n^{(l)}(x)$, *попарно отличных на интервале* (c, d), *не больше, чем* 2^{n-m+1}.

Доказательство. Предположим сначала, что $i=1$. Как известно утверждение леммы справедливо при $m=0$, причем в этом случае $N=2^n$. Допустим, что $N=2^{n-m}$ при $m \leqslant \mu$, и докажем, что $N=2^{n-\mu-1}$ при $m=\mu+1$. По условию леммы $n \geqslant \mu+1$.

Из (I) и (II) следует, что функции $\varphi_n^{(2k-1)}$ и $\varphi_n^{(2k)}$ совпадают на интервале $(0, 2^{-1})$, а следовательно и на интервале (c, d), откуда вытекает, что число попарно различных на интервале (c, d) функций $\varphi_n^{(l)}(x)$ $(l=1, 2, \cdots, 2^{n-1})$ равно числу отличных друг от друга на том же интервале функций $\varphi_{n-1}^{(k)}(2x)$ $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $k=1, 2, \cdots, 2^{n-2}$.

Произведем замену: $2x=y$, тогда $\varphi_{n-1}^{(k)}(2x) \equiv \varphi_{n-1}^{(k)}(y)$, $x \in [0, 2^{-1}]$, $y \in [0,1]$, интервал $\Delta_{\mu+1}^{(1)}$ перейдет в интервал $\Delta_\mu^{(1)}$. Поскольку $n-1 \geqslant \mu$, то по предположению индукции число попарно отличных на интервале $\Delta_\mu^{(1)}$ функций $\varphi_{n-1}^{(k)}(y)$ $(y \in [0,1])$ равно числу $2^{n-1-\mu}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь число i удовлетворяет условию $1 < i \leqslant 2^m$. Тогда, согласно лемме 1, для любой функции $\varphi_n^{(l)}(x)$ выполнено одно из следующих условий:

а) $\varphi_n^{(l)}[x+(i-1)2^{-m}] = \varphi_n^{(l)}(x)$, $x \in \Delta_m^{(1)}$,

б) $\varphi_n^{(l)}[x+(i-1)2^{-m}] = -\varphi_n^{(l)}(x)$, $x \in \Delta_m^{(1)}$.

Обозначим через M множество функций $\varphi_n^{(l)}(x)$, попарно отличных на интервале $\Delta_m^{(i)}$. Ясно, что число функций из множества M, для которых выполнено условие а), не больше, чем 2^{n-m}, количество функций из M, удовлетворяющих условию б), также ограничено числом 2^{n-m}, откуда следует, что число функций $\varphi_n^{(l)}(x)$, принадлежащих множеству M, не превышает числа 2^{n-m+1}. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $[a, b] \subset [0, 1]$. *Тогда для любых* n, k *и* $x \in [0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\left| \int_a^b K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 2.$$

Доказательство. В силу свойства A достаточно доказать следующее неравенство

$$\left| \int_a^b Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 1, \tag{1}$$

для чего в свою очередь достаточно получить оценку

$$\left| \int_0^\xi Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{2}$$

для любой точки $\xi \in [0, 1]$.

Пусть $\xi \in \Delta_{n-1}^{(\nu)}$. Интервалами постоянства для функций $\varphi_n^{(l)}(x)$ являются интервалы $\Delta_n^{(j)}$ и следовательно любая функция $\varphi_n^{(l)}(x)$ меняет знак на каждом интервале вида $\Delta_{n-1}^{(l)}$, откуда следует, что

$$\int_{\Delta_{n-1}^{(l)}} \varphi_n^{(l)}(x)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0, \tag{3}$$

$$i \leqslant 2^{n-1};\ l \leqslant 2^{n-1}.$$

Но поскольку $[0, \xi] \equiv \sum_{l=1}^{\nu-1} \Delta_{n-1}^{(l)} + E$, где $E \equiv [0, \xi] \cap \Delta_{n-1}^{(\nu)}$, то из (3) имеем

$$\int_0^\xi Q_n^{(k)}(x, y)\, dy = \int_E Q_n^{(k)}(x, y)\, dy. \tag{4}$$

С другой стороны, ясно, что

$$\left| \int_E \varphi_n^{(l)}(x)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{2^n}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует

$$\left| \int_0^\xi Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant \frac{k}{2^n} \leqslant \frac{1}{2},$$

чем и завершается доказательство леммы.

Лемма 5. *Пусть* $\lambda(x)$ — *непрерывная ломаная на некотором отрезке* $\Delta_m^{(l)}$, *если* $|\lambda(x)| \leqslant M$ *и число звеньев ломаной равно* μ, *то для любых целых* $n > 0$, $k > 0$ *и* $x \in [0, 1]$

$$\left| \int\limits_{\Delta_m^{(l)}} \lambda(y)\, K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 4\mu M.$$

Доказательство. В самом деле, если $(\alpha, \beta) \subset \Delta_m^{(l)}$ такой отрезок, на котором $\lambda(x)$ прямолинейна, то по второй теореме о среднем и по лемме 4 получим

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda(y)\, K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant \left| \lambda(\alpha) \int\limits_{\alpha}^{\xi} K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| + \left| \lambda(\beta) \int\limits_{\xi}^{\beta} K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 4M \tag{6}$$

для любых целых n, k $(k \leqslant 2^{n-1})$ и $x \in [0, 1]$.

Справедливость утверждения леммы 5 следует из (6) и из того, что отрезок $\Delta_m^{(l)}$ разбивается на μ отрезков, на каждом из которых $\lambda(x)$ прямолинейна.

Лемма 6. *Пусть отрезок* $[c, d]$ *совпадает с одним из* $\Delta_m^{(l)}$ *и*

$$c_s = c + s \cdot 2^{-m-m_1}, \quad a_s = c_s - 2^{-m-m_1-m_2},$$

$$c_s' = c_s - 2^{-m-m_1-m_2-2}, \quad a_s' = a_s + 2^{-m-m_1-m_2-2},$$

$$x_s = c_s' - 2^{-m-m_1-m_2-2} = a_s' + 2^{-m-m_1-m_2-2},$$

m, m_1, m_2 — *целые положительные числа;* $s = 1, 2, \cdots, 2^{m_1}$.

Пусть

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} \sum\limits_{s=1}^{2^{m_1}} [a_s', c_s'], \\ 1, & x = x_s, \\ \text{линейно интерполирована на } [a_s', x_s] \text{ и на } [x_s, c_s'], \\ \qquad s = 1, 2, \cdots, 2^{m_1}. \end{cases}$$

Тогда для функции $\psi(x)$ *справедливо неравенство*

$$\left| \int\limits_0^1 \psi(y)\, K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant C$$

при любых целых положительных n, k $(k \leqslant 2^{n-1})$ *и* $x \in [0, 1]$, C — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Определенная нами функция $\psi(x)$ обладает свойством A, причем $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\psi(x)| \leqslant 1$. В силу сделанного замечания для установления справедливости леммы достаточно доказать неравенство

$$\left| \int\limits_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant C_1, \quad n = 1, 2, \cdots; \ k \leqslant 2^{n-1}. \tag{7}$$

Возможны следующие 3 случая:

1) $n \leqslant m$. Поскольку $|\varphi_n^{(l)}(x)\,\varphi_n^{(l)}(y)| \leqslant 1$, $1 \leqslant l \leqslant 2^{n-1}$, $x; y \in [0, 1]$, то

$$\left|\int\limits_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| = \left|\int\limits_{\Delta_m^{(l)}} \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant \frac{k}{2^m} \leqslant \frac{2^{n-1}}{2^m} \leqslant \frac{1}{2}; \quad (8)$$

2) $m < n \leqslant m + m_1$. В этом случае для любого целого положительного l, $l \leqslant 2^{n-1}$,

$$\int\limits_{\Delta_m^{(l)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0. \quad (9)$$

В самом деле, интервалами постоянства для функций $\varphi_n^{(l)}(x)$ являются интервалы $\Delta_n^{(l)}$, и следовательно любая функция $\varphi_n^{(l)}$, $l \leqslant 2^{n-1}$, меняет знак на каждом интервале вида $\Delta_{n-1}^{(j)}$; с другой стороны, функция $\psi(x)$ имеет один и тот же вид на всех интервалах $\Delta_{m+m_1}^{(\cdot)} \subset \Delta_m^{(l)}$, а следовательно и на всех интервалах $\Delta_n^{(j)} \subset \Delta_m^{(l)}$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Delta_{n-1}^{(j)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0 \quad (10)$$

при любом $j \leqslant 2^{n-1}$, $l \leqslant 2^{n-1}$.

Остается учесть, что интервал $\Delta_m^{(l)}$ равен сумме интервалов вида $\Delta_{n-1}^{(j)}$.

Из (9) получаем

$$\int\limits_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy = 0; \quad (11)$$

3) $m + m_1 < n$. Если для функции $\varphi_n^{(l)}(x)$ существует такой интервал $\Delta_p^{(\cdot)} \subset \Delta_m^{(l)}$, $m \leqslant p < m + m_1$, что $\varphi_n^{(l)}(x + 2^{-p-1}) = -\varphi_n^{(l)}(x)$ для любой точки x, лежащей на левой половине интервала $\Delta_p^{(\cdot)}$ (см. лемму 1), то, поскольку $\psi(x)$ одинакова на всех интервалах $\Delta_{p+1}^{(j)}$,

$$\int\limits_{\Delta_p^{(\cdot)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{\Delta_m^{(l)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(x)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0,$$

т. е. такие функции не влияют на значение интеграла (7). Выбросим все такие функции, а оставшиеся функции обозначим через $\varphi_n^{(j)}(x)$. В силу леммы 1 каждая из функций $\varphi_n^{(j)}(x)$ будет одинакова на всех интервалах $\Delta^{(\tau)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m$. Значит график каждой такой функции на отрезке $\Delta^{(l)}_m$ однозначно определяется ее графиком на каком-нибудь фиксированном интервале $\Delta^{(\tau)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m$.

Но в силу леммы 2 число функций $\varphi^{(l)}_n(x)$, совпадающих на интервале $\Delta^{(l)}_m$, не превышает числа 2^m. С другой стороны, в силу сделанного выше замечания, число функций $\varphi^{(l)}_n(x)$, отличающихся друг от друга на интервале $\Delta^{(l)}_m$, равно числу функций $\varphi^{(l)}_n(x)$, отличных попарно на интервале $\Delta^{(l)}_{m+m_1}$. Но если ограничиться рассмотрением функций $\varphi^{(l)}_n(x)$ только на интервале $\Delta^{(l)}_{m+m_1}$, то их число, согласно лемме 3, не больше, чем $2^{n+1-m-m_1}$.

Пусть

$$\Delta^{(\tau)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m, \quad \Delta^{(\nu)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m, \quad \tau \neq \nu.$$

Из способа выбора функций $\varphi^{(j)}_n(x)$ и того, что функция $\psi(x)$ одинакова на этих интервалах, следует

$$\int\limits_{\Delta^{(\tau)}_{m+m_1}} \psi(y)\, \varphi^{(j)}_n(y)\, dy = \int\limits_{\Delta^{(\nu)}_{m+m_1}} \psi(y)\, \varphi^{(j)}_n(y)\, dy = \alpha. \tag{12}$$

Из (12) вытекает, что

$$\left| \int\limits_0^1 \psi(y)\, Q^{(k)}_n(x, y)\, dy \right| \leqslant 2^{m_1}\cdot 2^{n+1-m_1} |\alpha| = 2^{n+1}\cdot|\alpha|, \tag{13}$$

где 2^{m_1} — число интервалов вида $\Delta^{(l)}_{m+m_1}$, лежащих на интервале $\Delta^{(l)}_m$. Теперь оценим $|\alpha|$. Рассмотрим два случая:

а) $n \leqslant m + m_1 + m_2$. Поскольку в этом случае $|\varphi^{(j)}_n(x)| = 1$, $x \in [a_s, c_s]$, то

$$|\alpha| = \left| \int\limits_{\Delta^{(\tau)}_{m+m_1}} \psi(y)\, \varphi^{(j)}_n(y)\, dy \right| = \int\limits_{a_s}^{c_s} |\psi(y)|\, dy \leqslant c_s - a_s = 2^{-m-m_1-m_2}. \tag{14}$$

Учитывая (13) и (14), получим для нашего случая

$$\left| \int\limits_0^1 \psi(y)\, Q^{(k)}_n(x,y)\, dy \right| \leqslant 2^{n+1}\cdot 2^{-m-m_1-m}; \tag{15}$$

б) $n > m + m_1 + m_2$. Функция $\psi(x)$ имеет следующий график на отрезке $[a_s, c_s]$

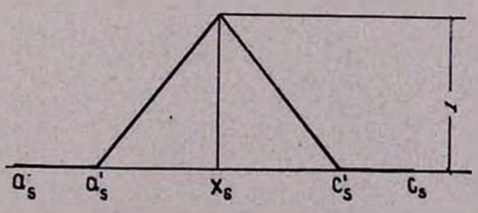

Рис. 1.

Но поскольку при $n=m+m_1+m_2+1$ $\varphi_n^{(l)}(x)$ постоянны на интервалах (a_s, x_s), (x_s, c_s), но разного знака, то ясно, что

$$|\alpha|=\left|\int\limits_{\Delta_{m+m_1}^{(\tau)}} \psi(y)\ \varphi_n^{(l)}(y)\,dy\right|=0$$

и следовательно

$$\int\limits_0^1 \psi(y)\ Q_n^{(k)}(x, y)\,dy=0,\ n=m+m_1+m_2+1. \tag{16}$$

При $n>m+m_1+m_2+1$ имеем

$$|\alpha|=\int\limits_{\Delta_{m+m_1}^{(\tau)}} \psi(y)\ \varphi_n^{(l)}(y)\,dy \leqslant 2\left|\int\limits_{a'_s}^{x_s} \psi(y)\ \varphi_n^{(l)}(y)\,dy\right|\cdot \tag{17}$$

Из рисунка 2 видно, что $\frac{|\alpha|}{2}$ не больше, чем площадь заштрихованной части рисунка (рисунок сделан для $n=m+m_1+m_2+4$). Но это значит, что $|\alpha|\leqslant 2\cdot 2^{-n}$, а это вместе с (13) дает неравенство

$$\left|\int\limits_0^1 \psi(y)\ Q_n^{(k)}(x, y)\,dy\right|\leqslant 2^{n+1}\cdot 2^{-n+1}\leqslant 4. \tag{18}$$

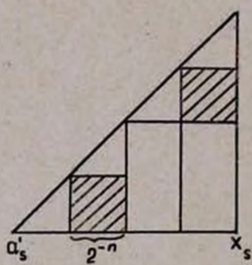

Рис. 2.

(18)

Из (8), (11), (15), (16) и (18) следует справедливость утверждения леммы при $C=5$.

Лемма 7. *Пусть даны отрезок* $[c, d]\equiv\Delta_m^{(l)}$, $\varepsilon>0$, $\gamma\neq 0$, $\nu=2$ *и* N, *где* l *и* N — *натуральные числа больше единицы. Тогда существует такое множество* E *и функция* $F(x)$, *что*

1°. $E\subset[c, d]$, $\operatorname{mes} E>\left(1-\frac{2}{\nu}\right)(d-c)$;

2°. $F(x)$ — *непрерывная ломаная на отрезке* $[0, 1]$, *равная нулю вне отрезка* $[c, d]$ *и* γ *на множестве* E;

3°. $|F(x)|\leqslant 5\,|\gamma|\,\nu$;

4°. $\left|\int\limits_0^1 F(y)\ K_n^{(k)}(x, y)\,dy\right|\leqslant B|\gamma|\,\nu$,

$x\in[0, 1]$, $n=1, 2, \cdots$, B — *абсолютная постоянная*;

5°. $\left|\int\limits_0^1 F(x)\ \varphi_n^{(k)}(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon$, $1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}$, $n=1, 2, \cdots. N$, Доказательство. Возьмем натуральное число m_1 настолько большим, что

$$|\gamma|\cdot 2^{-m-m_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m+m_1 > N \tag{19}$$

и положим $m_2 = l$.

Определим множество A следующим образом:

$$A \equiv [c, c+2^{-m-m_1-l-2}] + \sum_{s=1}^{2^{m_1}} [a_s, c_s], \tag{20}$$

где a_s и c_s — числа, определенные в формулировке леммы 6.

Положим

$$E \equiv [c, d] - A. \tag{21}$$

Определим функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ следующим образом:

$$F_1(x) = 4\gamma 2^l \psi(x), \tag{22}$$

где $\psi(x)$ — функция, определенная в формулировке леммы 6.

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} [c, d], \\ \gamma, & x \in (c+p, d-p), \\ \text{линейно интерполируется на интервалах} \\ (c, c+p) \text{ и } (d-p, d), \end{cases} \tag{23}$$

где $p = 2^{-m-m_1-l-2}$.

Положим

$$F(x) \equiv F_2(x) - F_1(x). \tag{24}$$

Докажем, что определенные нами множество E и функция $F(x)$, удовлетворяют условиям леммы.

Из (22), (23) и (24) и из того, что $|\psi(x)| \leqslant 1$ при $x \in [0, 1]$ легко следует, что выполнены условия 2° и 3°.

Функция $F(x)$ обладает также свойством 4°.

В самом деле, если в лемме 5 положить $\lambda(x) = F_2(x)$ и $\Delta_m^{(l)} \equiv [c, d]$, то, имея в виду, что для функции $F_2(x)$ $\mu = 3$, получим

$$\left|\int_0^1 F_2(y) K_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant 12|\gamma|, \tag{25}$$

$$n = 1, 2, \cdots; \ k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}; \ x \in [0, 1].$$

С другой стороны, из (22) и леммы 6 следует

$$\left|\int_0^1 F_1(y) K_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant 4C|\gamma|2^l, \tag{26}$$

$$n = 1, 2, \cdots; \ k = 1, 2, \cdots; 2^{n-1}, \ x \in [0, 1].$$

Объединив (25) и (26), получим

$$\left|\int_0^1 F(y) K_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant (4C + 12\cdot 2^{-l})|\gamma|2^l, \tag{27}$$

откуда следует, что выполнено условие 4°, если положить $B = 4C + 12$.

Пусть $\Delta^{(r)}_{m+m_1} \subset [c, d]$, причем левый конец этого интервала не совпадает с точкой c, а правый конец—с точкой d; обозначим этот интервал через (α, β).

Из (22) и (23) следует, что

$$\int_\alpha^\beta F_2(x)\,dx = \gamma\cdot(\beta-\alpha) = 2^{-m-m_1}\cdot\gamma, \tag{28}$$

$$\int_\alpha^\beta F_1(x)\,dx = 4\gamma\cdot 2^p\cdot\int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx = 4\gamma\cdot 2^l\, 2^{-m-m_1-l-2}, \tag{29}$$

а из последних двух равенств получим

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_\alpha^\beta F_2(x)\,dx - \int_\alpha^\beta F_1(x)\,dx. \tag{30}$$

Легко проверить, что из (22) и (23) вытекает

$$\left|\int_c^{c_1} F(x)\,dx\right| = \left|\int_c^{c+p} F(x)\,dx\right| \leqslant |\gamma|\cdot 2^{-m-m_1-l-2} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{31}$$

$$\left|\int_{c_{2m_1-1}}^{d} F(x)\,dx\right| = \left|\int_{d-p}^{d} F(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{32}$$

Но в силу выбора числа m_1 любая из функций $\varphi^{(k)}_{n_i}(x)$, $n=1, 2,\cdots, N$, $k=1, 2,\cdots, 2^{n-1}$ постоянна на каждом из интервалов $\Delta^{(i)}_{m+m_1}$.

Из сделанного замечания и из (30), (31) и (32) следует, что условие 5° также выполнено.

Лемма доказана.

§ 2. Теорема доказывается по такой же схеме, что и теорема Меньшова [1], мы опишем только конструкцию функции $g(x)$. Отметим прежде всего, что можно вести доказательство для непрерывной функции $\Phi(x)$.

Действительно, пусть $\sigma > 0$ задано. Допустим, что мы умеем найти такое множество E_1 и такую функцию $G(x)$, что

$$G(x) = \Phi(x) \text{ на } E, \text{ где mes } E_1 > 1 - \frac{\sigma}{2} \tag{33}$$

и $\sigma(G)$ равномерно сходится.

Пусть теперь $f(x)$ — любая измеримая и конечная почти всюду на [0,1] функция. Так как $f(x)$ обладает C-свойством на [0,1], то можно найти такое $P \subset [0,1]$, mes $P > 1 - \frac{\sigma}{2}$, что $f(x) = \Phi(x)$ на P, где $\Phi(x)$ — функция, непрерывная на [0,1]. Предполагается, что мы уже умеем найти $G(x)$, удовлетворяющую условию (33) и с равномерно сходящимся рядом Фурье.

Полагая $E = E_1 \cdot P$, мы видим, что $G(x) = f(x)$ на E, при этом $\operatorname{mes} E > 1 - \varepsilon$.

Теперь опишем конструкцию для случая непрерывной функции $\Phi(x)$. Представим $\Phi(x)$ в виде ряда

$$\Phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l(x), \tag{34}$$

где все функции $\Phi_l(x)$ — ступенчатые (причем интервалы постоянства являются интервалами вида $\Delta_m^{(l)}$); ряд сходится равномерно и

$$|\Phi_l(x)| \leqslant \frac{2^{-p}}{2^{2l}} \quad (l = 2, 3, \cdots),\ 2^{-p} < \varepsilon. \tag{35}$$

В силу непрерывности $\Phi(x)$ это всегда возможно.

Для каждой функции $\Phi_l(x)$ отрезок $[0,1]$ распадается на конечное число сегментов вида $\Delta_m^{(l)}$, на каждом из которых она постоянна пусть $\Delta_{m_i}^{(l)}$ — эти сегменты, перенумерованные слева направо ($i = 1, 2, \cdots$ $\cdots, 2^{m_l}$, $m_1 < m_2 < \cdots$). Перенумеруем сначала все $\Delta_{m_1}^{(l)}$, затем все $\Delta_{m_2}^{(l)}$ и т. д., получим последовательность сегментов

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s, \cdots,$$

причем, если ν_l — число всех интервалов постоянства функций $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x), \cdots, \Phi_l(x)$, то для s, удовлетворяющего условию

$$\nu_{l-1} < s \leqslant \nu_l, \tag{36}$$

имеем

$$\Delta_s = \Delta_{m_l}^{(l)}$$

при некотором значении i и

$$\Phi_l(x) = \gamma_s \text{ для } x \in \Delta_s, \tag{37}$$

где

$$|\gamma_s| \leqslant \frac{2^{-p}}{2^{2l}}, \tag{38}$$

в силу (35).

Пусть теперь

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_s < \cdots \tag{39}$$

—последовательность натуральных чисел, которые подбираются определенным способом [1].

Положим

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2^s}. \tag{40}$$

На основании леммы 7, в которой положим

$$[c, d] = \Delta_s,\ \varepsilon = \varepsilon_s,\ \gamma = \gamma_s,\ \nu = 2^p \cdot 2^l \text{ и } N = n_s, \tag{41}$$

мы можем для каждого s, удовлетворяющего условию (36), найти такую непрерывную ломаную $\psi_s(x)$ и множество E_s, что а) $E_s \subset [c, d]$; mes $E_s > (1-\sigma\cdot 2^{-l+1})$ mes Δ_s;

б) $\psi_s(x) = 0$ вне Δ_s;

в) $\psi_s(x) = \gamma_s$ на E_s;

г) $$|\psi_s(x)| \leqslant 5\,|\gamma_s|\cdot\nu \leqslant 5\cdot\frac{2^{-p}}{2^{2l}}\cdot 2^p\cdot 2^l \leqslant \frac{5}{2^l},$$

д) $$\left|\int_0^1 \psi_s(x)\, K_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant \frac{B}{2^l},$$

$x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \cdots$, B — абсолютная постоянная;

е) $$\left|\int_0^1 \psi_s(x)\, \varphi_n^{(k)}(x)\, dx\right| \leqslant \varepsilon_s = \frac{1}{2^s},$$

$$1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1},\ n = 1, 2, \cdots, n_s.$$

Заметим еще, что можно брать γ_s всегда отличным от нуля.

Функция

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(x)$$

является искомой.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что равномерно на [0,1] будет сходиться также ряд

$$a_0\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^{(l_k)}\,\varphi^{(l_k)}(x),$$

т. е. ряд Фурье функции $g(x)$, переставленный определенным образом.

Аналогичный результат для тригонометрической системы не известен.

Институт математики и
механики АН Армянской ССР

Поступило 22.II.66

Ռ. Ի. ՕՍԻՊՈՎ

ՈՒՈԼՇԻ ՍԻՍՏԵՄՈՎ ԳՐՎԱԾ ՇԱՐՔԵՐԻ ՋՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Սույն հոդվածում ապացուցվում է, որ տեղի ունի ուժեղացրած C-հատկությունը Ուոլշի սիստեմի համար։

Այդ փաստը եռանկյունաչափական սիստեմի համար ապացուցված էր Դ. Ե. Մենշովի կողմից։

R. G. OSIPOV

ON THE CONVERGENCE OF WALSH-FOURIER SERIES

Summary

The paper proves that the Walsh system exhibits strong C-property.

This result has previously been stated by D. E. Menshov for the trigonometric system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, 438—457.
2. *С. Качмаж и Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, 142—143, 155.
3. *I. L. Walsh.* A closed set of normal orthogonal functions, American Mathematical Societi, 1922.