ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 4. 1966 Математика

Г. В. ГЕНДЖОЯН

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пусть $\Omega$—ограниченная область с границей $\sigma$ в трехмерном эвклидовом пространстве. $\Gamma(x, \xi)$—функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в этой области. В работе [1] Д. М. Эйдус при предположении, что $\sigma \in C^{1,\lambda}$, установил оценку

$$\left|\frac{\partial\Gamma(x, \xi)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_1}{|x-\xi|^2}; \quad x \text{ и } \xi \in \Omega \quad (i=1, 2, 3).$$

При более жестком предположении: $\sigma \in C^{2,\lambda}$ в этой работе получены оценки и для второй производной:

$$\left|\frac{\partial^2\Gamma(x, \xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \frac{c_2}{|x-\xi|^2}, \quad x \text{ и } \xi \in \Omega,$$

$c_1$ и $c_2$—постоянные, зависящие лишь от области $\Omega$.

Цель настоящей работы—получить аналогичные оценки для функции Грина $G(x, t, \xi, \tau)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в цилиндре $D = \Omega \times (0, T]$.

Именно, в § 1 при предположении $\sigma \in C^{1,\lambda}$ для значений переменных $x$ и $\xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ устанавливаются оценки

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_3(\varepsilon)}{(t-\tau)^2} e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}. \tag{1.1}$$

В § 2 для произвольной пары $(x, x') \in \Omega$, $\xi \in \Omega$ и $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ при предположении $\sigma \in C^{2,\lambda}$ доказываются неравенства

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial G(x', t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\nu, \alpha)\frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\left(e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}\right). \tag{1.2}$$

В этих оценках $\varepsilon$ и $\alpha$—произвольные положительные числа, $0 < \alpha < 1$, $\nu$—некоторое число, $0 < \nu < \frac{1}{4}$.

При этом мы исходим из представления $G$

$$G(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau),$$

где $h(x, t, \xi, \tau) = \dfrac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}}$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности, а $g$ определяется интегральным соотношением

$$g(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\sigma h(x, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta.$$

Введем обозначения, используемые в дальнейшем. Через $n_\zeta$ будем обозначать внешнюю нормаль в точке $\zeta$ поверхности $\sigma$, через $T_\zeta$ — касательную плоскость к поверхности в этой точке. $\Sigma_{x\delta}$ — часть поверхности $\sigma$, заключенная внутри сферы радиуса $\delta$ с центром в точке $x$. Через $q$ обозначаем радиус сферы Ляпунова, при этом он предполагается столь малым, что выполняются условия:

1) Площадь любого куска поверхности $\sigma$, заключенного в сфере Ляпунова с центром в точке $y \in \sigma$ не превышает удвоенной площади проекции этого куска на плоскость $T_y$;

2) Проекция $\Sigma_{y\delta}$, где $\delta < q$, на плоскость $T_y$ содержит круг радиуса $\dfrac{\delta}{2}$ с центром в точке $y$.

Через $\bar{x}$ обозначаем ближайшую к $x$ $(x \in \Omega)$ точку поверхности $\sigma$; очевидно, $x$ лежит на $n_{\bar{x}}$. Через $\sigma_{y\delta}$, где $\delta < \dfrac{q}{2}$, обозначим часть поверхности $\sigma$, вырезанную круговым цилиндром радиуса $\delta$ с осью $n_y$, содержащую точку $y$. $T_{y\delta}$ — проекция $\sigma_{y\delta}$ на $T_y$, $r_{xy}$ — вектор длины $|x-y|$, направленный от $y$ в точку $x$, $(l, r_{xy})$ — угол между направлениями $l$ и $r_{xy}$.

Всюду в дальнейшем временные переменные $t$ и $\tau$ будем считать связанными соотношениями $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$. Через $t_1$ обозначаем полусумму $\dfrac{t+\tau}{2}$, через $t_2$ — разность $t - \dfrac{t-\tau}{3}$. Через $D_{x_i} u$ $(i = 1, 2, 3)$ обозначаются производные функции $u(x)$ по $x_i$, $D_x u$ — обозначает любую из этих производных. Постоянные, зависящие от области $D$, обозначаются обычно через $c$, иные постоянные — через $k$, $\alpha$, $\beta$, $\delta$, $\mu$, $\nu$ и т. д.

§ 1. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $\sigma \in C^{1,\lambda}$. Пусть $x$ и $\xi \in \Omega$, а $\mu$ и $\alpha$ фиксированные положительные числа $(\alpha < 1)$.

Лемма 1. *Функция $u(x, t, \xi, \tau)$, определенная формулой*

$$u(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\sigma \frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi_1|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |\zeta - \xi| \cos(n_\zeta r_{\zeta\xi}) d\zeta d\theta, \quad (1.3)$$

*удовлетворяет неравенству*

$$|u(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_5(\varepsilon, \mu, \alpha) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\alpha}{2}}}, \quad x \text{ и } \xi \in \Omega,$$

*где* $\varepsilon > 0$*—произвольное число.*

Доказательство. Разобьем интеграл (1.3) на слагаемые

$$u(x, t, \xi, \tau) =$$

$$= \left(\int_{\tau}^{t_1} + \int_{t_1}^{t}\right)\int_{\sigma} \frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |\zeta-\xi| \cos(n_{\zeta}, r_{\zeta\xi})\, d\zeta d\theta = u_1 + u_2.$$

Используя неравенство $|x|^p e^{-sx^2} \leqslant k_1(\varepsilon, p)\, e^{-(s-\varepsilon)x^2}$ $(p > 0)$, оценим сначала интеграл $u_2$.

$$|u_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant k_2(\varepsilon) \int_{t_1}^{t}\int_{\sigma} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^2} d\zeta d\theta =$$

$$= k_2(\varepsilon) \int_{t_1}^{t}\int_{\sigma} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (\mu-\varepsilon)\frac{t-\tau}{(t-\theta)(\theta-\tau)}\left[\zeta - \frac{t-\theta}{t-\tau}(\zeta-\xi) - \frac{\theta-\tau}{t-\tau}(\zeta-x)\right]^2}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}(\theta-\tau)^2} d\zeta d\theta.$$

Обозначая $\beta = \dfrac{t-\tau}{(t-\theta)(\theta-\tau)}$, $z = \dfrac{\theta-\tau}{t-\tau}x + \dfrac{t-\theta}{t-\tau}\xi$, и вводя новую пространственную переменную $\zeta' : \zeta' = \zeta\sqrt{\beta}$, придем к неравенству

$$|u_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant k_2(\varepsilon) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)} \int_{t_1}^{t}\int_{\sigma'} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)|\zeta'-z'|^2}}{(t-\theta)^{\frac{2-\alpha}{2}}(\theta-\tau)} d\zeta' d\theta.$$

Но интеграл $\displaystyle\int_{\sigma'} e^{-s|\zeta'-z'|^2} d\zeta' \leqslant c_6(s)$ $(s > 0)$, так что

$$|u_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_7(\varepsilon, \mu) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau} \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{2-\alpha}{2}}(\theta-\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant c_8(\varepsilon, \mu, \alpha) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\alpha}{2}}}. \tag{1.4}$$

Докажем важное для дальнейшего неравенство

$$\left|\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^s}\frac{e^{-\mu\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\xi}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi|\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})\,d\varsigma\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_0(\varepsilon, \mu, s)\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s} \quad (s>0). \tag{1.5}$$

Из него и из (1.4) непосредственно будет вытекать утверждение леммы. Имеем

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^s}\frac{e^{-\mu\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta \leqslant k_3(s)\frac{e^{-\mu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}\times$$

$$\times\int_{\tau}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta. \tag{1.6}$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta$. Разобьем поверхность $\sigma$ на части $\sigma_1=\Sigma_{\xi\delta}$ и $\sigma_2=\sigma\diagdown\sigma_1$, где $\delta=\frac{3}{4}|x-\xi|$, и представим последний интеграл в виде суммы

$$\int_{\tau}^{t_1}d\theta\left(\int_{\sigma_2}+\int_{\sigma_1}\right)\frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi|\cdot|\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta. \tag{1.7}$$

Оценим отдельно эти слагаемые. При $\tau<\theta<t_1$ имеем $|z-\xi|=$ $=\frac{\theta-\tau}{t-\tau}|x-\xi|\leqslant\frac{1}{2}|x-\xi|$. Отсюда для $\varsigma\in\sigma_2$ получим $\frac{1}{3}|\varsigma-\xi|\leqslant$ $\leqslant|\varsigma-z|\leqslant\frac{5}{3}|\varsigma-\xi|$, следовательно

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_2}\frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta \leqslant$$

$$\leqslant\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{\mu}{9}\cdot\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta.$$

В последнем интеграле, производя интегрирование сначала по $\theta$, а затем по $\varsigma$, будем иметь

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_2} \frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})| d\varsigma d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\sigma}\int_{\frac{|\varsigma-\xi|^2}{t-\tau}}^{\infty} \frac{e^{-\mu\frac{y}{4}}\sqrt{y}}{|\varsigma-\xi|^2} |\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})| dy d\varsigma \leqslant$$

$$\leqslant k_4(\mu)\int_{\sigma} \frac{|\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|}{|\varsigma-\xi|^2} d\varsigma \leqslant c_{10}(\mu). \tag{1.8}$$

Перейдем к оценке второго интеграла суммы (1.7). Пусть $a>0$—фиксированное число. Из выражения

$$\beta|\varsigma-z|^2 = \frac{1}{t-\tau}\left[\frac{\theta-\tau}{t-\theta}|\varsigma-x|^2 + \frac{t-\theta}{\theta-\tau}|\varsigma-\xi|^2 + \right.$$

$$\left. + 2|\varsigma-x||\varsigma-\xi|\cos(r_{\varsigma\xi}, r_{\varsigma x})\right]$$

следует, что при выполнении неравенства

$$\frac{|\varsigma-x||\varsigma-\xi|}{t-\tau} < a \tag{1.9}$$

справедлива оценка $e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2} \leqslant k_5(\mu, a)\, e^{-\frac{\mu}{2}\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}$ $(\tau<\theta<t_1)$. Часть поверхности $\sigma_1$, точки которой удовлетворяют условию (1.9), обозначим через $\sigma_0$, $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_1 \setminus \sigma_0$. Легко убедиться в справедливости неравенств

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_0} \frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})| d\varsigma d\theta \leqslant k_5 \int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_0} \frac{e^{-\frac{\mu}{2}\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |\varsigma-\xi| \times$$

$$\times |\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})| d\varsigma d\theta \leqslant c_{11}(\mu). \tag{1.10}$$

Из выражения $\varsigma - z = (\varsigma - x)\frac{\theta-\tau}{t-\tau} + (\varsigma-\xi)\frac{t-\theta}{t-\tau}$ следует, что при условии

$$\theta-\tau \leqslant \frac{1}{2}\frac{|\varsigma-\xi|}{|\varsigma-x|}(t-\theta) \tag{1.11}$$

имеют место соотношения $\frac{|\varsigma-\xi|}{4} \leqslant |\varsigma-z| \leqslant \frac{3}{2}|\varsigma-\xi|$. В области

$\tilde\sigma_0$, в силу неравенств $|\zeta-\xi|>a\dfrac{t-\tau}{|\zeta-x|}$ и $\dfrac{1}{4}|x-\xi|\leqslant|x-\zeta|\leqslant$ $\leqslant\dfrac{7}{4}|x-\xi|$, имеем

$$\frac{t-\theta}{2}>\frac{1}{6}\cdot\frac{|\zeta-\xi|}{|\zeta-x|}(t-\theta)>\frac{a}{6}\,\frac{(t-\theta)(t-\tau)}{|\zeta-x|^2}\geqslant k_6\frac{(t-\tau)^2}{|x-\xi|^2}=t^*-\tau.$$

Откуда в частности следует, что $t^*<t_1$ и что условие (1.11) выполнено для $\theta\leqslant t^*$. Далее имеем

$$\int_\tau^{t_1}\int_{\tilde\sigma_0}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta\,d\theta=\left(\int_\tau^{t^*}+\int_{t^*}^{t_1}\right)\int_{\tilde\sigma_0}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}\times$$

$$\times|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta\leqslant\int_\tau^{t^*}\int_{\tilde\sigma_0}\frac{e^{-\frac{\mu}{16}\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta+$$

$$+\int_{t^*}^{t_1}\int_{\tilde\sigma_0}k_7\frac{|x-\xi|^5}{(t-\tau)^5}e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}|\zeta-\xi|\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_\tau^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{\mu}{16}\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta+$$

$$+k_8\frac{|\xi-x|^6}{(t-\tau)^3}\int_\tau^{t}\int_{\sigma'}\frac{e^{-\mu|\zeta'-z'|^2}}{(t-\tau)^2}(\theta-\tau)\,d\zeta'\,d\theta\leqslant c_{12}(\mu)+c_{13}(\mu)\frac{|\xi-x|^6}{(t-\tau)^3}.$$

Отсюда, из (1.7), (1.8) и (1.10) следует неравенство

$$\int_\tau^{t_1}\int_\sigma\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta\leqslant c_{11}(\mu)+c_{13}(\mu)\frac{|\xi-x|^6}{(t-\tau)^3}.$$

Последнее, с учетом (1.6), приводит к оценке (1.5). Лемма доказана.

Замечание. Если в интегральном выражении (1.3) для $u(x, t, \xi, \tau)$ заменить функцию

$$\varphi(\mu, \zeta, \theta, \xi, \tau)=\frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})$$

функцией $\psi(\zeta, \theta, \xi, \tau)$, удовлетворяющей при $\xi\in\Omega$ и $\zeta\in\sigma$ неравенству

$$|\psi(\varsigma, \theta, \xi, \tau)| \leqslant c_{15} \frac{e^{-\mu \frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\nu}}, \quad \text{где} \quad \nu < 2,$$

то, как это легко следует из доказательства леммы, для новой функции $u_\psi(x, t, \xi, \tau)$ справедлива оценка

$$|u_\psi(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{16}(\mu, \nu, \alpha) \frac{e^{-\mu \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{2\nu-\alpha}{2}}}.$$

Лемма 2. *Пусть $x$ и $\xi \in \Omega$, $y \in \sigma$, $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha < \lambda$. Для функции $\Phi(y, t, \xi, \tau)$, представимой в виде*

$$\Phi(y, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\sigma \frac{e^{-\mu \frac{|y-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} |y-\varsigma| \cos(n_y, r_{y\varsigma}) \varphi(\mu, \varsigma, \theta, \xi, \tau)\, d\varsigma d\theta, \tag{1.12}$$

*определим функцию $\breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau)$ следующим образом:*

$$\breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\sigma \frac{e^{-\mu \frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} |x-\varsigma| \cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\varsigma}) \varphi(\mu, \varsigma, \theta, \xi, \tau)\, d\varsigma d\theta. \tag{1.12'}$$

*Тогда имеет место соотношение*

$$|\Phi(y, t, \xi, \tau) - \breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{17}(\varepsilon, \mu, \alpha) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}} |x-y|^\alpha. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ — некоторое фиксированное число. Для пары точек $(x, y)$ разделим интервал $(\tau, t)$ на части $(\tau, \bar{t})$ и $(\bar{t}, t)$, где

$$\bar{t} = \begin{cases} t - \dfrac{|x-y|^2}{a}, & \text{если } \dfrac{|x-y|^2}{a} \leqslant t-\tau, \\ \tau, & \text{если } \dfrac{|x-y|^2}{a} > t-\tau. \end{cases}$$

Запишем разность $|\Phi - \breve{\Phi}|$ в виде

$$|\Phi(y, t, \xi, \tau) - \breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau)| =$$

$$=\int_{\tau}^{\bar t}\int_{\sigma}\left\{\left[\frac{e^{-\mu\frac{|y-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|y-\varsigma|-\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\right]\cos(n_y, r_{y\varsigma})+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|[\cos(n_y, r_{y\varsigma})-\cos(n_{\bar x}, r_{\bar x\varsigma})]\right\}\varphi(\mu, \varsigma, \theta, \xi, \tau)\,d\varsigma d\theta+$$

$$+\int_{\bar t}^{t}\int_{\sigma}\left[\frac{e^{-\mu\frac{|y-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-y|\cos(n_y, r_{y\varsigma})-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-x|\cos(n_{\bar x} r_{\bar x\varsigma})\right]\varphi(\mu, \varsigma, \theta, \xi, \tau)\,d\varsigma d\theta.$$

Используя неравенство $e^{-\mu|x-x_0|^2}\leqslant k_9(\varepsilon, \mu, \rho)\,e^{-(\mu-\varepsilon)x^2}$ при $|x_0|<\rho$, нетрудно получить оценку

$$\left|\frac{e^{-\mu\frac{|y-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|y-\varsigma|-\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\right|\leqslant$$

$$\leqslant k_{10}(\varepsilon)\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{[y-\varsigma+\eta(y-x)]^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-y|\leqslant$$

$$\leqslant k_{11}(\mu, \varepsilon, a)\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-y|\qquad(\tau<\theta<\bar t).\tag{1.14}$$

Далее, для $y$, $z$ и $\varsigma\in\sigma$ верно неравенство (см. [2])

$$|\cos(n_y, r_{y\varsigma})-\cos(n_z, r_{z\varsigma})|\leqslant c_{18}|z-y|^{\lambda}.\tag{1.15}$$

С помощью оценок (1.14), (1.15) и соотношения $|\bar x-y|\leqslant 2|x-y|$ получим

$$|\Phi(y, t, \xi, \tau)-\bar\Phi(x, t, \xi, \tau)|\leqslant c_{19}(\mu, \varepsilon, a)\int_{\tau}^{\bar t}\int_{\sigma}\left[\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5-\lambda}{2}}}|x-y|+\right.$$

$$+\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma||x-y|^{\lambda}\Bigg]|\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)\,d\varsigma d\theta+$$

$$+k_{12}(\varepsilon,a,\alpha)|x-y|^{\alpha}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-y|^2}{t-\theta}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-x|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}}|\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)|d\varsigma d\theta\leqslant$$

$$\leqslant c_{20}(\mu,\varepsilon,a,\alpha)|x-y|^{\alpha}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-y|^2}{t-\theta}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-x|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}}|\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)|d\varsigma d\theta.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 1 непосредственно приходим к неравенству (1.13).

Замечание 2. Если в выражениях (1.12) и (1.12′) заменить $\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)$ функцией $\psi(\varsigma,\theta,\xi,\tau)$, фигурирующей в замечании 1, то для новых функций $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ верны неравенства

$$|\Phi_{\psi}(y,t,\xi,\tau)-\overline{\Phi}_{\psi}(x,t,\xi,\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant c_{21}(\mu,\nu,\varepsilon,\alpha)\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{2\nu+\alpha-\lambda}{2}}}|x-y|^{\alpha}.$$

Введем обозначение: $\gamma_1(\varsigma,\theta,\xi,\tau)=2\dfrac{\partial h(\varsigma,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_{\varsigma}}$.

Лемма 3. *Производные функции*

$$u(x,t,\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}h(x,t,\varsigma,\theta)\gamma_1(\varsigma,\theta,\xi,\tau)\,d\varsigma d\theta,\quad \xi \text{ и } x\in\Omega \tag{1.16}$$

*удовлетворяют неравенству*

$$|D_x u|\leqslant c_{22}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}.$$

Доказательство. Пусть $x$—произвольная точка, принадлежащая $\Omega$. Рассмотрим сначала производную в этой точке по направлению $n_x$

$$\frac{\partial u(x,t,\xi,\tau)}{\partial n_x}=\frac{1}{128\pi^3}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(n_x,r_{x\varsigma})\times$$

$$\times \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right) d\zeta d\theta.$$

Оценим интеграл в правой части этого равенства.

$$\left| \int_{\tau}^{t} \int_{\sigma} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} |x-\zeta| [\cos(n_x, r_{x\zeta}) - \cos(n_\zeta, r_{x\zeta}) + \right.$$

$$\left. + \cos(n_\zeta, r_{x\zeta})] \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right) d\zeta d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{23}(\varepsilon) \int_{\tau}^{t} \int_{\sigma} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\lambda}{2}}} \left| \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right) \right| d\zeta d\theta +$$

$$+ \left| \int_{\tau}^{t} \int_{\sigma} \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, t, x, \theta\right) \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right) d\zeta d\theta \right|.$$

Здесь первый интеграл правой части, согласно лемме 1, не превосходит функции

$$c_{24}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}};$$

второй интеграл оценивается через

$$\int_{\tau}^{t_1} \int_{\sigma} \left| \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, t, x, \theta\right) \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right) \right| d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{\sigma} \left| \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, t, x, \theta\right) \varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right) \right| d\zeta d\theta.$$

Отсюда, на основании неравенства (1.5) и оценки

$$\left| \int_{t_1}^{t} \int_{\sigma} \varphi(\mu, \zeta, t, x, \theta) \frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^s} d\zeta d\theta \right| \leqslant c_{25}(\mu, s, \varepsilon) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}, \tag{1.17}$$

будем иметь

$$\left|\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, t, x, \theta\right)\varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right)d\zeta d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{26}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}.$$

Неравенство (1.17) доказывается совершенно так же, как неравенство (1.5). Таким образом, получена оценка

$$\left|\frac{\partial u(x, t, \xi, \tau)}{\partial n_{\bar{x}}}\right| \leqslant c_{27}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.18}$$

Пусть $l$—некоторое направление, касательное к поверхности $\sigma$ в точке $\bar{x}$.

$$\frac{\partial w(x, t, \xi, \tau)}{\partial l} = \frac{1}{128\pi^3}\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta| \times$$

$$\times \cos(l, r_{x\zeta})\varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right)d\zeta d\theta.$$

Перепишем последний интеграл в виде суммы

$$\left(\int_{\tau}^{t_1}+\int_{t_1}^{t}\right)\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta|\cos(l, r_{x\zeta})\varphi\left(\frac{1}{4}, \zeta, \theta, \xi, \tau\right)d\zeta d\theta = I_1+I_2.$$

С помощью неравенства (1.5) получим

$$|I_1| \leqslant c_{28}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.19}$$

Преобразуем интеграл $I_2$.

$$I_2 = \int_{t_1}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta|\cos(l, r_{x\zeta})\left[\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\cos(n_{\zeta}, r_{\zeta\xi})-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})\right]+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})\Bigg\} d\tau d\theta =$$

$$=\int_{t_1}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(l, r_{x\varsigma})\times$$

$$\times\Bigg\{\Bigg[e^{-\frac{1}{4}\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}|\varsigma-\xi|-e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}|x-\xi|\Bigg]\frac{\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|[\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})-\cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})]+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})\Bigg\} d\varsigma d\theta = I_2^{(1)}+I_2^{(2)}+I_2^{(3)}.$$

Исходя из легко проверяемого неравенства

$$\left|\frac{e^{-\mu\frac{|x-y|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}|x-y|-\frac{e^{-\mu\frac{|x-z|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}|x-z|\right|\leqslant$$

$$\leqslant k_{13}(\varepsilon, \mu)|y-z|^\alpha\cdot\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t-\tau}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-z|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{2s+\alpha-1}{2}}},$$

где $\varepsilon>0$—произвольное число, $0<\alpha\leqslant 1$, для $I_2^{(1)}$ получим

$$|I_2^{(1)}|\leqslant k_{14}(\varepsilon)\int_{t_1}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}d\varsigma\, d\theta\leqslant$$

$$\leqslant c_{29}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \qquad (1.20)$$

Установим нужное при оценке интеграла $I_2^{(2)}$ неравенство

$$I_0 = |x-\xi|\,|\cos(n_\xi, r_{\zeta\xi}) - \cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})| < 12|x-\zeta| + c_{30}|x-\xi|\,|x-\zeta|^\lambda. \tag{1.21}$$

Если $|x-\bar{x}| \geqslant \frac{1}{3}|x-\xi|$, то требуемая оценка очевидна. Если

$$|x-\bar{x}| < \frac{1}{3}|x-\xi|, \text{ то } I_0 \leqslant c_{30}|x-\xi|\,|\zeta-x|^\lambda + |x-\xi|\,|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\zeta\xi}) - \cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})|,$$

и для $\zeta \in \Sigma_{\bar{x}\delta}$, где $\delta = \frac{|x-\xi|}{2}$, имеем $I_0 \leqslant c_{30}|x-\xi|\,|x-\zeta|^\lambda + 12|x-\zeta|$.

Для $\zeta \in \sigma \setminus \Sigma_{\bar{x}\delta}$ получим неравенство $I_0 \leqslant c_{30}|x-\xi|\,|x-\zeta|^\lambda + 8|x-\zeta|$.

Таким образом, соотношение (1.21) установлено. Используя его, будем иметь

$$|I_2^{(2)}| \leqslant \int_{t_1}^{t}\int_{\sigma} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta|\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} \times$$

$$\times[12|x-\zeta| + c_{30}|x-\xi|\,|x-\zeta|^\lambda]\,d\zeta d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{31}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} + c_{32}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}. \tag{1.22}$$

При оценке интеграла $I_2^{(3)}$ рассмотрим отдельно случаи $|x-\bar{x}| \geqslant \frac{1}{2}q$ и $|x-\bar{x}| < \frac{1}{2}q$. Если $|x-\bar{x}| \geqslant \frac{1}{2}q$, то $|x-\zeta| \geqslant \frac{1}{2}q$ и справедливость неравенства

$$I_2^{(3)} \leqslant c_{33}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} \tag{1.23}$$

очевидна. В случае $|x-\bar{x}| < \frac{1}{2}q = \delta$ разобьем интеграл $I_2^{(3)}$ на слагаемые вида

$$I_2^{(3)} = \int_{t_1}^{t} d\theta\left(\int_{\sigma-\Sigma_{\bar{x}\delta}} + \int_{\Sigma_{\bar{x}\delta}}\right)\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta|\cos(l, r_{x\zeta}) \times$$

$$\times\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})\,d\zeta d\theta.$$

Для первого слагаемого, как и в случае $|x-\bar{x}|>\frac{1}{2}q$, получим

оценку типа (1.23). Оценим второе слагаемое. Введя в точке $\bar{x}$ локальную систему координат $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, направляя при этом ось $\alpha_3$ по $n_{\bar{x}}$, для направления $l\,(l_1,\ l_2,\ 0)$ будем иметь

$$\int_{t_1}^{t}\int_{\sigma_{\bar{x}\delta}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(l,\ r_{x\varsigma})\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\xi-x|\cos(n_{\bar{x}}r_{\bar{x}\xi})\,d\varsigma d\theta=$$

$$=\int_{t_1}^{t}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}r_{\bar{x}\xi})\int_{T_{\bar{x}\delta}}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}(l_1\varsigma_{\alpha_1}+l_2\varsigma_{\alpha_2})\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta}{\cos(n_\varsigma n_{\bar{x}})}.$$

Обозначая через $\varsigma'$ проекцию $\varsigma$ на плоскость $T_{\bar{x}}$, преобразуем интеграл по кругу $T_{\bar{x}\delta}$ следующим образом:

$$\int_{T_{\bar{x}\delta}}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}(l_1\varsigma_{\alpha_1}+l_2\varsigma_{\alpha_2})\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\cos(n_\varsigma n_{\bar{x}})}=$$

$$=\int_{T_{\bar{x}\delta}}\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}-e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma'|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}\right)\frac{l_1\varsigma_{\alpha_1}+l_2\varsigma_{\alpha_2}}{\cos(n_\varsigma,\ n_{\bar{x}})}\,d\alpha_1 d\alpha_2+$$

$$+\int_{T_{\bar{x}\delta}}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma'|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}(l_1\varsigma_{\alpha_1}+l_2\varsigma_{\alpha_2})\frac{1-\cos(n_\varsigma,\ n_{\bar{x}})}{\cos(n_\varsigma,\ n_{\bar{x}})}\,d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Нетрудно проверить справедливость неравенств

$$\left|e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}-e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma'|^2}{t-\theta}}\right|\leqslant c_{34}(\varepsilon)\,e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma''|^2}{t-\theta}}\frac{|x-\varsigma''|\,|\bar{x}-\varsigma'|^{1+\lambda}}{t-\theta}\leqslant$$

$$\leqslant c_{35}(t-\theta)^{\frac{\lambda}{2}}e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\varsigma'|^2}{t-\theta}},\qquad\left|\frac{1-\cos(n_\varsigma,\ n_{\bar{x}})}{\cos(n_\varsigma,\ n_{\bar{x}})}\right|\leqslant c_{36}|\bar{x}-\varsigma'|^{\lambda}.$$

Здесь $\varsigma''$—точка отрезка, соединяющего точки $\varsigma$ и $\varsigma'$. Из них вытекает оценка

$$\left|\int_{t_1}^{t}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}r_{\bar{x}\xi})\times\right.$$

$$\times \int\limits_{T_{\bar{x}t}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} \frac{l_1\zeta_{\alpha_1} + l_2\zeta_{\alpha_2}}{\cos(n_\zeta, n_{\bar{x}})} d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta \Bigg| \leqslant c_{37}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}.$$

Этим завершается доказательство неравенства (1.23) в случае, когда $|x-\bar{x}|<\frac{1}{2}q$.

Из (1.19), (1.20), (1.22) и (1.23) получаем оценку

$$\left|\frac{\partial u(x, t, \xi, \tau)}{\partial l}\right| \leqslant c_{38}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}.$$

Утверждение леммы вытекает отсюда и из (1.18).

Замечание 3. Как легко проследить, из доказательства леммы следует, что если в интегральном представлении (1.16) заменить функцию $\gamma_1(\zeta, \theta, \xi, \tau)$ на $\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)$, определенную формулой (1.12), то производная таким образом полученной функции $u(x, t, \xi, \tau)$ будет удовлетворять неравенству

$$|D_x u| \leqslant c_{39}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}.$$

Теорема 1. *Производные функции Грина $G(x, t, \xi, \tau)$ для значений переменных $x$ и $\xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ удовлетворяют неравенству* (1.1).

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать справедливость неравенства (1.1) лишь для функции $g(x, t, \xi, \tau)$. Из представления

$$G(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + \int\limits_\tau^t \int\limits_\sigma h(x, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta,$$

согласно формуле о разрыве нормальной производной теплового потенциала простого слоя [3] будем иметь

$$\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} = 2\frac{\partial h(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} + 2\int\limits_\tau^t \int\limits_\sigma \frac{\partial h(y, t, \zeta, \theta)}{\partial n_y} \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta =$$

$$= \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \int\limits_\tau^t \int\limits_\sigma \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta \quad (y \in \sigma, \ \xi \in \Omega). \qquad (1.24)$$

Методом итераций отсюда получим

$$\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} = \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \gamma_2(y, t, \xi, \tau) + \cdots + \gamma_p(y, t, \xi, \tau) +$$

$$+\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\gamma_p(y, t, \zeta, \theta)\,\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta,$$

где

$$\gamma_l(y, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\gamma_1(y, t, \zeta, \theta)\,\gamma_{l-1}(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta. \tag{1.25}$$

Оценим функции $\gamma_l(y, t, \xi, \tau)$. Для $\gamma_1(y, t, \xi, \tau)$, очевидно, выполнено неравенство

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau)| \leqslant k_{15}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.26}$$

Если $\xi \in \sigma$, то

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{40}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}. \tag{1.27}$$

Используя эти неравенства, из формулы (1.25), с помощью леммы 1 и замечания к ней, последовательно получим

$$|\gamma_2(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}},$$

$$|\gamma_3(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma} c_{40}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\left[\frac{|y-\zeta|^2}{t-\theta}+\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}\right]}}{(t-\theta)^{\frac{4-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}\,d\zeta d\theta =$$

$$= c_{41}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau}\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma'} c_{40}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)|\zeta'-z'|^2}}{(t-\theta)^{\frac{2-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{2-\lambda}{2}}}\,d\zeta' d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{41}(\varepsilon)\,c_{42}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau}\int_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{2-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{2-\lambda}{2}}} =$$

$$= c_{41}(\varepsilon)\,c_{42}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-2\lambda}{2}}}\int_{0}^{1}(1-z)^{\frac{\lambda}{2}-1}z^{\frac{\lambda}{2}-1}\,dz =$$

$$= c_{41}(\varepsilon)\,c_{42}(\varepsilon)\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{\lambda}{2}\right)}\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-2\lambda}{2}}}.$$

$$|\gamma_4(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\, c_{42}^2(\varepsilon)\, \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{\lambda}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_\tau^t \frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{2-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{2-2\lambda}{2}}} = \frac{c_{41}(\varepsilon)\;c_{42}^2(\varepsilon)}{(t-\tau)^{\frac{4-3\lambda}{2}}} \frac{\Gamma^3\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(3\cdot\frac{\lambda}{2}\right)} e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

И вообще для любого $i$

$$|\gamma_i(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\, c_{42}^{i-2}(\varepsilon)\, \frac{\Gamma^{i-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i-1}{2}\lambda\right)} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{2-\frac{i-1}{2}\lambda}} \quad (i=2, 3, \cdots), \tag{1.28}$$

где $\Gamma(\lambda)$—гамма функция Эйлера.

Из оценок (1.28) следует, что $\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} = \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \sum_{i=2}^{\infty}\gamma_i(y, t, \xi, \tau) = \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \varphi_0(y, t, \xi, \tau). \tag{1.29}$$

При этом $\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}$ и $\varphi_0(y, t, \xi, \tau)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{43}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}, \tag{1.30}$$

$$|\varphi_0(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{44}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{2-\frac{\lambda}{2}}}. \tag{1.31}$$

Функция $\varphi_0$, очевидно, выражается через $G(y, t, \xi, \tau)$ следующим образом:

$$\varphi_0(y, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t\int_\sigma \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta. \tag{1.32}$$

Возвращаясь к функции $g(x, t, \xi, \tau)$ перепишем ее в виде

$$g(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t\int_\sigma h(x, t, \zeta, \theta)\,[\gamma_1(\zeta, \theta, \xi, \tau) + \varphi_0(\zeta, \theta, \xi, \tau)]\, d\zeta d\theta =$$

$$= g_1(x, t, \xi, \tau) + g_2(x, t, \xi, \tau).$$

Из леммы 3 непосредственно вытекает неравенство

$$|Dg_1(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{45}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.33}$$

В силу оценки (1.28) из леммы 2 и замечания 2 следует, что функции $\gamma_i(y, t, \xi, \tau)$ удовлетворяют соотношениям

$$|\gamma_i(y, t, \xi, \tau) - \tilde{\gamma}_i(x, t, \xi, \tau)| < c_{46}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha-(i-1)\lambda}{2}}} \times$$

$$\times |x-y|^\alpha, \quad i = 2, 3, \cdots. \tag{1.34}$$

Отметим следующий факт, которым неоднократно будем пользоваться. Из представления (1.29), оценки (1.31) и из замечания к лемме 1 следует, что лемма 1 остается в силе при замене функции $\varphi(\mu, \zeta, \theta, \xi, \tau)$ функцией $\dfrac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}$.

Имея это в виду из выражения

$$\varphi_0(y, t, \xi, \tau) = \gamma_2(y, t, \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_\sigma \gamma_2(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta$$

и из неравенств (1.34) легко получить, что

$$|\varphi_0(y, t, \xi, \tau) - \tilde{\varphi}_0(x, t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{47}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}} |x-y|^\alpha.$$

Отсюда, в силу оценки (1.31) и замечания 3, будем иметь

$$|D_x g_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{48}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}.$$

Эта оценка вместе с (1.33) приводит к неравенству (1.1).

§ 2. В этом параграфе будем предполагать, что $\sigma \in C^{2,\lambda}$ и, следовательно, является поверхностью Ляпунова с показателем, равным единице. Пусть $\psi(y)$ — функция, определенная лишь на поверхности $\sigma$. Через $\overline{D}_{x_i}\psi(y)$ обозначим проекции ее поверхностного градиента (см. [2]) на координатные оси $x_i$, $\overline{D}_y\psi(y)$ будет обозначать любую из этих проекций.

Лемма 4. *Пусть $y \in \sigma$, $\varepsilon$ — произвольное число. Тогда справедливы оценки*

$$|\overline{D}_y \gamma_1(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{49}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}, \text{ если } \xi \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\text{и } |\overline{D}_y \gamma_1(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{50}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}, \text{ если } \xi \in \sigma. \tag{2.2}$$

Утверждение леммы легко проверяется, на этом останавливаться не будем.

Лемма 5. *Пусть $y$ и $y' \in \sigma$, $|t'-t| \leqslant \frac{t-\tau}{3}$, $\xi \in \Omega$, $\varepsilon$ и $\alpha$ — произвольные числа, $0 < \alpha < 1$. Справедливо соотношение*

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} - \frac{\partial G(y', t', \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{51}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \left[|y-y'|^\alpha + |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Доказательство. Из леммы 4 вытекают неравенства

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau) - \gamma_1(y', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{52}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |y-y'|^\alpha, \tag{2.3}$$

если $\xi \in \Omega$ и

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau) - \gamma_1(y', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{53}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |y-y'|^\alpha,$$

если $\xi \in \sigma$ $(0 < \alpha < 1)$.

Последнее из них, в силу леммы 1, приводит к следующему неравенству для функции $\varphi_0$, определенной формулой (1.32):

$$|\varphi_0(y, t, \xi, \tau) - \varphi_0(y', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{54}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |y-y'|^\alpha.$$

Отсюда, с учетом (1.29) и (2.3), получим неравенство

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} - \frac{\partial G(y', t, \xi, \tau}{\partial n_y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{55}(\varepsilon, \alpha)|y-y'|^{\alpha} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.4}$$

Докажем оценку

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} - \frac{\partial G(y, t', \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{56}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.5}$$

Пусть для определенности $0 < t - t' < \frac{t-\tau}{3}$. Исходим из вида (1.29) функции $\frac{\partial G}{\partial n_y}$. Слагаемое $\gamma_1(y, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет неравенству

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau) - \gamma_1(y, \tilde{t}, \xi, \tau)| \leqslant k_{16}|t-\tilde{t}| \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|y-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{9}{2}}} |y-\xi|^3 |\cos(n_y, r_{y\xi})| \leqslant$$

$$< k_{17}(\alpha, \varepsilon)|t-\tilde{t}|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \quad \left(|t-\tilde{t}| \leqslant \frac{t-\tau}{2}\right), \tag{2.6}$$

если $\xi \in \Omega$ и неравенству

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau) - \gamma_1(y, \tilde{t}, \xi, \tau)| \leqslant c_{57}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |\tilde{t}-t|^{\frac{\alpha}{2}} \left(|t-\tilde{t}| \leqslant \frac{t-\tau}{2}\right), \tag{2.7}$$

если $\xi \in \sigma$. Как и выше $\alpha$ здесь — произвольное число $(0 < \alpha < 1)$, а $\theta$ — промежуточное значение между $\tilde{t}$ и $t$.

Разность $\varphi_0(y, t, \xi, \tau) - \varphi_0(y, t', \xi, \tau)$ представим в виде

$$\varphi_0(y, t, \xi, \tau) - \varphi_0(y, t', \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t-2(t-t')} \int\limits_{\sigma} [\gamma_1(y, t, \zeta, \theta) - \gamma_1(y, t', \zeta, \theta)] \times$$

$$\times \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta + \int\limits_{t-2(t-t')}^{t'} \int\limits_{\sigma} [\gamma_1(y, t, \zeta, \theta) - \gamma_1(y, t', \zeta, \theta)] \times$$

$$\times \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta + \int\limits_{t'}^{t} \int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta.$$

Оценивая второй и третий интегралы непосредственно, а к первому применяя лемму 1, с учетом неравенства (2.7), получим

$$|\varphi_0(y,t,\xi,\tau)-\varphi_0(y,t',\xi,\tau)|\leqslant c_{58}(\varepsilon,\alpha)\,e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}\left[\frac{(t-t')^{\frac{\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(t-t')^{\frac{1}{2}}}{(t-\tau)^2}\right]\leqslant c_{59}(\varepsilon,\alpha)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}}(t-t')^{\frac{\alpha}{2}}\quad(0<\alpha<1).$$

Отсюда, из (2.6) и (1.29) следует неравенство (2.5), а из него и из неравенства (2.4) — утверждение леммы.

Введем обозначение

$$\varphi_1(x,t,\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\,\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta.$$

Лемма 6. *Функция $\varphi_1(x,t,\xi,\tau)$ удовлетворяет для произвольной пары $(x,x')$ и $\xi$ из $\Omega$ неравенству*

$$|\varphi_1(x,t,\xi,\tau)-\varphi_1(x',t,\xi,\tau)|\leqslant c_{60}(\nu,\alpha)\times$$

$$\times|x-x'|^\alpha\,\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}},\tag{2.8}$$

*где $\alpha$ — произвольное число из интервала* (0,1), $\nu$ — *некоторое число* $\left(0<\nu<\frac{1}{4}\right)$.

Доказательство. Перепишем $\varphi_1(x,t,\xi,\tau)$ в виде

$$\varphi_1(x,t,\xi,\tau)=\left(\int\limits_{\tau}^{t_2}+\int\limits_{t_2}^{t}\right)\int\limits_{\sigma}\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\,\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta.\tag{2.9}$$

С помощью неравенств (2.3) и (1.5) (последнее остается в силе, если заменить $t_1$ на $t_2$) получим

$$\left|\int\limits_{\tau}^{t_2}\int\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}-\frac{\partial h(x',t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\right)\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{61}(\varepsilon,\alpha)\int\limits_{\tau}^{t_2}\int\limits_{\sigma}|x-x'|^\alpha\left|\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\right|\times$$

$$\times\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\,d\zeta d\theta\leqslant c_{62}(\varepsilon,\alpha)\times$$

$$\times|x-x'|^{\alpha}\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.10}$$

Предположим, не умоляя общности, что $|x-\bar{x}|\leqslant|x'-\bar{x}'|$. Будем различать два случая: а) $|x-\bar{x}|\geqslant\frac{1}{2}|x-\xi|$ и б) $|x-\bar{x}|<\frac{1}{2}|x-\xi|$.

Второй член правой части равенства (2.9) преобразуем следующим образом:

$$\int_{t_2}^{t}\int_{\sigma}\left(\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}-\frac{\partial h(x',t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\right)\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta=$$

$$=\int_{t_2}^{t}\int_{\sigma}\left[\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}-\frac{\partial h(x',t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\right]\times\left\{\left[\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial G(x,t,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\right]+\frac{\partial G(x,t,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\right\}d\zeta d\theta=I_1+I_2. \tag{2.11}$$

Рассмотрим сначала слагаемое $I_2$. Установим для него оценку

$$|I_2|\leqslant c_{63}(\alpha,\nu)\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\nu\frac{|x'-\xi|}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}|x-x'|^{\alpha}. \tag{2.12}$$

Введем вместо $\theta$ новую переменную $\beta=\frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-\theta}}$, тогда

$$\int_{t_2}^{t}\int_{\sigma}\left[\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}-\frac{\partial h(x',t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\right]d\zeta d\theta=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\sigma}\left[\frac{\cos(n_\zeta,r_{\zeta x})}{|x-\zeta|^2}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2d\beta-\frac{\cos(n_\zeta,r_{\zeta x'})}{|x'-\zeta|^2}\int_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2d\beta\right]d\zeta=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\int_{\sigma}\frac{\cos(n_\zeta r_{\zeta x})}{|x-\zeta|^2}\left[\int_{\frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2d\beta-\int_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2d\beta\right]d\zeta+\frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\int_{\sigma}\left(\frac{\cos(n_\zeta,r_{\zeta x})}{|x-\zeta|^2}-\frac{\cos(n_\zeta,r_{\zeta x})}{|x'-\zeta|^2}\right)\int_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2d\beta\,d\zeta=I_2^{(1)}+I_2^{(2)}.$$

Используя неравенство $\int_{a}^{\infty}e^{-x^2}dx\leqslant e^{-\frac{a^2}{2}}$ нетрудно придти к соотношению

$$\left| \int\limits_{\frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-t_1}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2} \beta^2 d\beta - \int\limits_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_1}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2} \beta^2 d\beta \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{64}(\nu, \alpha) |x - x'|^{\alpha} \frac{e^{-\nu \frac{|x-\zeta|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu \frac{|x'-\zeta|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, \qquad (2.13)$$

где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \nu < \frac{1}{4}$.

В случае а) отсюда получим оценку

$$|I_2^{(1)}| \leqslant c_{65}(\nu, \alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\nu \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}. \qquad (2.14)$$

$I_2^{(2)}$ представляет собой разность потенциалов двойного слоя с плотностью $\int\limits_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_1}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2} \beta^2 d\beta$ в точках $x$ и $x'$. Эта плотность, как легко видеть из соотношения (2.13), удовлетворяет по $\zeta$ условию Гельдера, и, следовательно, $I_2^{(2)}$ удовлетворяет неравенству

$$|I_2^{(2)}| < c_{66}(\nu, \alpha) |x - x'|^{\alpha} \frac{e^{-\nu \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}. \qquad (2.15)$$

Из оценок (2.14) и (2.15) приходим к неравенству (2.12).

В случае б) из (2.13) имеем

$$|I_2^{(1)}| \leqslant c_{67}(\alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad |I_2^{(2)}| \leqslant c_{68}(\alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}. \qquad (2.16)$$

Из оценки (1.30), условия $|\bar{x} - \xi| > \frac{1}{2} |x - \xi|$, а также из неравенств (2.16) получим (2.12).

Оценим теперь $I_1$. Будем предполагать, что $|x - x'| < \frac{q}{4}$ и $|x - \bar{x}| < \frac{q}{2}$, так как при $|x - x'| > \frac{q}{4}$ или $|x - \bar{x}| > \frac{q}{2}$ в справедливости неравенства (2.8) нетрудно убедиться. Обозначим $\Sigma = \Sigma_{\bar{x}q}$ и разобьем $I_1$ на сумму вида

$$I_1 = \int\limits_{t_1}^{t} \Big( \int\limits_{\sigma \setminus \Sigma} + \int\limits_{\Sigma} \Big) \Big( \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \Big) \Big( \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} -$$

$$- \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\Big) d\zeta d\theta = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}.$$

Для интеграла $I_1^{(1)}$ имеем $|x - \zeta| > \frac{q}{2}$, и, аналогично случаю $|x - \bar{x}| > \frac{q}{2}$, получим для него нужную нам оценку. Остается оценить интеграл $I_1^{(2)}$. Пусть $\Sigma_1 = \Sigma_{\bar{x}\delta}$, $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$, где $\delta = 2|x - x'|$.

Перепишем $I_1^{(2)}$ в виде

$$I_1^{(2)} = \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\right] d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\right] d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_2}\left[\frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\right]\left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\right] d\zeta d\theta = J_1 + J_2 + J_3.$$

Из леммы 5 для $J_1$ получим

$$|J_1| < c_{69}(\varepsilon, \alpha) \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x - \xi|^2}{t - \theta}}}{(t - \theta)^2} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|\bar{x} - \xi|^2}{t - \tau}}}{(t - \tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \times$$

$$[|\zeta - x|^\alpha + (t - \theta)^{\frac{\alpha}{2}}]\, d\zeta d\theta. \tag{2.17}$$

Отсюда, в случае а) имеет место неравенство

$$|J_1| \leqslant \frac{c_{70}(\nu, \alpha)}{(t - \tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{e^{-\nu\frac{|x - \xi|^2}{t - \theta}}}{(t - \theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}}\, d\zeta d\theta,$$

а из него, интегрированием сначала по $\theta$, а затем по $\zeta$ придем к соотношению

$$|J_1| \leqslant c_{71}(\nu, \alpha) \frac{|x - x'|^\alpha}{(t - \tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} e^{-\nu\frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}}.$$

В случае б) из (2.17) имеем

$$|J_1| \leqslant c_{72}(\nu, \alpha) \frac{e^{-\nu\frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}}}{(t - \tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x - x'|^\alpha + c_{73}(\varepsilon, \alpha) \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x - \zeta|^2}{t - \theta}}}{(t - \theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} d\zeta d\theta.$$

Разбивая последний интеграл на сумму двух слагаемых, в которых интегрирование производится по пересечениям $\Sigma_1$ соответственно с областями $|x-\zeta| < \frac{|x-\xi|}{2}$ и $|x-\zeta| > \frac{|x-\xi|}{2}$, и, оценивая каждое слагаемое в отдельности, придем к неравенству

$$|J_1| \leqslant c_{74}(\nu, \alpha) \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x-x'|^{\alpha}.$$

Для $J_2$ из леммы 5 и оценки (1.17) вытекает, что

$$|J_2| \leqslant c_{75}(\varepsilon, \alpha) \int_{t_2}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x' t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \left[|\bar{x}-\zeta|^{\alpha} + (t-\theta)^{\frac{\alpha}{2}}\right] d\zeta d\theta \leqslant c_{76}(\varepsilon, \alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}} +$$

$$+ c_{77}(\varepsilon, \alpha) \int_{t_2}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} d\zeta d\theta +$$

$$+ c_{78}(\varepsilon, \alpha) \int_{t_2}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x-x'|^{\alpha} d\zeta d\theta.$$

Так же, как при оценке $J_1$, можно показать, что первый интеграл правой части этого неравенства не превосходит по абсолютной величине функции

$$c_{79}(\nu, \alpha) \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x-x'|^{\alpha}.$$

Второй интеграл в случае б) оценивается непосредственно, а именно по абсолютной величине он не превосходит функции

$$c_{80}(\nu, \alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

В случае а) имеем

$$\int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\,\frac{|x-x'|^\alpha e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\,d\zeta d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{\Sigma_1}\frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta \leqslant c_{81}(\nu)\,\frac{|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\,e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Итак, для $J_1+J_2$ получим

$$|J_1+J_2| \leqslant c_{82}(\nu, \alpha)\,\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\,|x-x'|^\alpha. \tag{2.18}$$

Перейдем к оценке интеграла $J_3$. Для $\zeta \in \Sigma_2$ имеем $|x-\zeta| < 3|x'-\zeta|$. Используя это, получим

$$|J_3| \leqslant c_{83}(\varepsilon, \alpha, \alpha')\int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{\Sigma_2}\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha'}{2}}}\,|x-x'|^{\alpha'}\times$$

$$\times\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\left[|x-\zeta|^\alpha+(t-\theta)^{\frac{\alpha}{2}}\right]d\zeta d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{84}(\varepsilon, \alpha, \alpha')\,|x-x'|^{\alpha'}\times$$

$$\times\int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{\Sigma_2}\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha'-\alpha}{2}}}\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\,d\zeta d\theta.$$

Здесь $\alpha$ и $\alpha'$ — произвольные числа, $0<\alpha'<\alpha<1$. Отсюда, в обоих случаях а) и б), получим неравенство

$$|J_3| \leqslant c_{85}(\nu, \alpha)\,\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\,|x-x'|^\alpha. \tag{2.19}$$

Из неравенства (2.18) и (2.19) следует оценка

$$|I_1^{(2)}| \leqslant c_{86}(\nu, \alpha)\,|x-x'|^\alpha\,\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.20}$$

Утверждение леммы вытекает из (2.11), (2.12) и (2.20).

**Лемма 7.** *Функция* $F(y, t, \tau)$, *определенная для* $y \in \sigma$ *формулой*

$$F(y, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\int_{\sigma} \gamma_1 (y, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta,$$

*вдоль поверхности* $\sigma$ *дифференцируема по* $y$; *при этом производные, которые могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, ограничены*

$$|\overline{D}_y F (y, t, \tau)| \leqslant c_{67}.$$

Доказательство. Пусть $\delta = \dfrac{q}{2}$ и $\Sigma = \sigma_{y\delta}$. Запишем $F(y, t, \tau)$ в виде

$$F(y, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\Big(\int_{\Sigma} + \int_{\sigma\setminus\Sigma}\Big)\gamma_1 (y, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Для доказательства леммы достаточно установить, что функция

$$\varphi (z, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma} \gamma_1 (z, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta, \quad z \in \Sigma,$$

обладает в $\sigma_{y\frac{\delta}{2}}$ ограниченными производными по $z$.

Введем в точке $y$ локальную систему координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, направляя ось $\alpha_3$ по $n_y$. Пусть при этом $\alpha_3 = f(\alpha_1, \alpha_2)$ — уравнение поверхности $\Sigma$, а точки $v(v_1, v_2)$ и $u(u_1, u_2)$ — проекции, соответственно, точек $z$ и $\zeta$ на круг $T_{y\delta}$. Тогда

$$\varphi (z, t, \tau) = \Phi (v, t, \tau) = \frac{\cos (n_v, n_y)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{t_0}^{t}\int_{T_{y\delta}} A (v, u, t, \theta)\, du d\theta,$$

где

$$A (v, u, t, \theta) =$$
$$\frac{f(u_1, u_2) - f(v_1 v_2) - (u_1 - v_1) f'_{\alpha_1} (v_1 v_2) - (u_2 - v_2) f'_{\alpha_2} (v_1, v_2)}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} \times$$
$$\times \sqrt{1 + f'^2_{\alpha_1}(u_1, u_2) + f'^2_{\alpha_2}(u_1, u_2)} \times$$
$$\times e^{-\frac{[f(u_1, u_2) - f(v_1, v_2)]^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}{4(t-\theta)}}.$$

Покажем, что функция

$$\psi (v, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\int_{T_{y\delta}} A (v, u, t, \theta)\, du d\theta$$

обладает ограниченными в $T_{y\frac{\delta}{2}}$ производными по $v$, получаемыми дифференцированием под знаком интеграла. Этим теорема будет доказана. С этой целью, введя вместо $u_1$, $u_2$ новые переменные интегрирования $\omega$, $\rho$: $u_1 = v_1 + \rho\cos\omega$, $u_2 = v_2 + \rho\sin\omega$, перепишем $\psi$ в виде

$$\psi(v, t, \tau) = \int_{t_2}^{t} d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{l(\omega, v)} B(v, \rho, \omega, t, \theta)\, \rho d\rho.$$

Здесь функция $l(\omega, v)$ определяется соотношением

$$l(\omega, v) = \sqrt{(v_1\cos\omega + v_2\sin\omega)^2 + \delta^2 - v_1^2 - v_2^2} - (v_1\cos\omega + v_2\sin\omega).$$

Легко убедиться в справедливости оценок

$$\left|\frac{\partial l(\omega, v)}{\partial v}\right| \leqslant k_{18}, \quad |B| \leqslant c_{88}(\varepsilon)\, \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{\rho^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left|\frac{\partial B}{\partial v}\right| \leqslant c_{89}\left(1 + \frac{1}{(t-\theta)^{\lambda}}\right) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{\rho^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Из них вытекает равномерная в $T_{y_{\frac{\delta}{2}}}$ сходимость по $v$ интегралов правой части формулы

$$\frac{\partial\psi(v, t, \tau)}{\partial v} = \int_{t_2}^{t} d\theta \int_0^{2\pi} B(v, l, \omega, t, \theta) \frac{\partial l}{\partial v}\, l d\omega + \int_{t_2}^{t} d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{l} \frac{\partial B}{\partial v}\, \rho d\rho,$$

что доказывает наше утверждение.

Лемма 8. *Пусть* $y \in \sigma$, $\xi \in \Omega$. *Тогда функция* $\dfrac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}$ *дифференцируема по* $y$ *вдоль поверхности* $\sigma$ *и имеет место неравенство*

$$\left|\overline{D}_y \frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{90}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}.$$

Доказательство. Исходя из представления (1.24) функции $\dfrac{\partial G}{\partial n_\zeta}$ будем иметь

$$\overline{D}_y \frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} = \overline{D}_y \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \overline{D}_y \int_{\tau}^{t}\int_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\, d\zeta d\theta. \tag{2.21}$$

Из леммы 4 следует неравенство

$$\left|\overline{D}_y \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \right.$$

$$\left. + \overline{D}_y \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta \right| \leqslant c_{91}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}. \tag{2.22}$$

Остается оценить функцию

$$\overline{D}_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta.$$

Используя лемму 7 легко прийти к формуле

$$\overline{D}_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \overline{D}_y \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}\right] d\zeta d\theta +$$

$$+ \frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} D_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Отсюда, с помощью лемм 4, 5 и 7, получим

$$\left|\overline{D}_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta\right| \leqslant c_{92}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{2.23}$$

Утверждение леммы следует из (2.21), (2.22) и (2.23).

Теорема 2. *Для произвольной пары* $(x, x')$ *и* $\xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ *производные функции Грина* $D_x G(x, t, \xi, \tau)$ *удовлетворяют соотношению* (1.2), *где* $\alpha$ — *произвольное число из интервала* (0, 1), $\nu$ — *некоторое число из интервала* $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (1.2) лишь для функции $g(x, t, \xi, \tau)$, которую мы представим в виде суммы

$$g(x, t, \xi, \tau) = \left(\int\limits_{\tau}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t}\right)\int\limits_{\sigma} h(x, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta = g^*(x, t, \xi, \tau) +$$
$$+ g^{**}(x, t, \xi, \tau). \tag{2.24}$$

Имеем

$$|D_x g^*(x, t, \xi, \tau) - D_x g^*(x', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{93}(\varepsilon)|x - x'|^\alpha \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{\sigma} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta.$$

Правая часть здесь оценивается аналогично интегралу (1.5), именно

$$|D_x g^* (x, t, \xi, \tau) - D_x g^* (x', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{94} (\varepsilon) |x - x'|^\alpha \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \qquad (2.25)$$

Для производной функции $g^{**} (x, t, \xi, \tau)$ — теплового потенциала простого слоя, используя лемму 8, можно вывести формулу

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{t_0}^{t}\int_{\sigma} h (x, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G (\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta = \int_{t_0}^{t}\int_{\sigma} \Big\{ h (x, t, \zeta, \theta) \times$$

$$\times \left[\overline{D}_{\zeta_1} \frac{\partial G (\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \varkappa \frac{\partial G (\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} \cos (n_\zeta, x_1)\right] - \frac{\partial h (x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \times$$

$$\times \frac{\partial G (\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} \cos (n_\zeta, x_1) \Big\} d\zeta d\theta. \qquad (2.26)$$

Здесь $\varkappa$ — средняя кривизна поверхности.

На основании леммы 8 имеем

$$\left|\int_{t_0}^{t}\int_{\sigma} [h (x, t, \zeta, \theta) - h (x', t, \zeta, \theta)] \left[\overline{D}_{\zeta_1} \frac{\partial G (\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \varkappa \frac{\partial G (\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \cos (n_\zeta, x_1)\right] d\zeta d\theta \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} c_{95} (\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} + e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |x-x'|^\alpha \times$$

$$\times \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} d\zeta d\theta \leqslant c_{96} (\varepsilon) |x - x'|^\alpha \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \qquad (2.27)$$

Из леммы 6 непосредственно выводим

$$\left|\int_{t_0}^{t}\int_{\sigma} \left(\frac{\partial h (x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h (x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\right) \frac{\partial G (\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{97} (\nu, \alpha) |x - x'|^\alpha \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \qquad (2.28)$$

Из (2.24)—(2.28) следует доказываемое утверждение для функции $g (x, t, \xi, \tau)$. Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступило 6.II.66

Գ. Վ. ԳԵՆՋՈՅԱՆ

## ՋԵՐՄԱՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԻՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԳՐԻՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՈՐՈՇ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում


*Դիցուկ Ω-ն եռաչափ էվկլիդյան տարածության տիրույթ է, սահմանափակված σ ողորկ մակերևույթով: $D = \Omega \times (0, T]$ գլանում ջերմահաղորդականության հավասարման առաջին եզրային խնդրի Գրինի ֆունկցիայի ածանցյալների համար հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը.*

*ա) Եթե σ մակերևույթը պատկանում է $C^{1,\lambda}$ դասին, ապա $D$ գլանում տեղի ունի*

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_1(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

*գնահատականը, որտեղ ε-ը կամայական թիվ է.*

*բ) Եթե σ մակերևույթը պատկանում է $C^{2,\lambda}$ դասին, ապա Ω-ին պատկանող կամայական $x, x', \xi$, և $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$-ի համար տեղի ունի*

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial G(x', t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_2(\nu, \alpha)\,|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\left(e^{-\frac{\nu|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}\right)$$

*անհավասարությունը, որտեղ α-ն կամայական թիվ է (0,1) միջակայքից, իսկ* $\nu \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$*-որոշակի թիվ է:*


G. V. GENJOYAN

## ON SOME ESTIMATES FOR THE GREEN'S FUNCTION OF TNE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

### Summary


Let Ω be a domain bounded by a smooth surface σ in the three dimensional Euclidean space.

For the Green's function of the first boundary value problem for the heat equation in the cylinder $D = \Omega \times (0, T]$ the paper proves the following results:

a) If the surface σ belongs to the class $C^{1,\lambda}$ the following inequality holds in $D$

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_1(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

where $\varepsilon$ is an arbitrary number.

b) If the surface $\sigma$ belongs to the class $C^{2,\alpha}$ then

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial G(x', t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_2(\nu, \alpha)\,|x - x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \left(e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}\right)$$

at every point $x, x', \xi \in \Omega$ and for $0 < \tau < t \leqslant T$, $\alpha$ and $\nu$ being numbers from the intervals (0,1) and $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ respectively.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Д. М. Эйдус*, Неравенства для функции Грина, Математический сборник, 45, № 4, 1958 г.
2. *Н. М. Гюнтер*, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Москва, Гостехиздат, 1953 г.
3. *Г. Н. Положий*, Уравнения математической физики, Москва, издательство „Высшая школа", 1964 г.