

С. Я. ХАВИНСОН

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ УОЛША

В 1938 г. в работе [1] Уолш поставил следующую задачу. Пусть R — некоторая область z -плоскости (которую для определенности будем считать конечной), а $S \subset R$ — замкнутая подобласть R . Обозначим через $B(R)$ класс однозначных в R аналитических функций $f(z)$, для которых $\sup_{z \in R} |f(z)| < \infty$, а через $B_M(R)$ — подкласс $B(R)$, состоящий из функций, для которых $|f(z)| \leq M$, $z \in R$.

Пусть в области S задана аналитическая функция $F(z)$. Рассмотрим величину

$$E_M(F) = \inf_{f \in B_M(R)} \max_{z \in S} |F(z) - f(z)|. \quad (1)$$

Требуется: 1) исследовать свойства функции $f^*(z) \in B_M(R)$, реализующей нижнюю грань в (1). Существование такой функции $f^*(z)$ очевидно в силу компактности $B_M(R)$; 2) исследовать скорость стремления величины $E_M(F)$ к нулю при $M \rightarrow \infty$ в зависимости от свойств $F(z)$.

Вторая задача исследована весьма подробно в работах Уолша, частично выполненных совместно с другими авторами. Простейшие результаты в этом направлении имеются в монографии Уолша [2] (дополнение, п. 3, стр. 442); там же приводится дальнейшая литература. Что касается первого вопроса, то здесь имеется ([2], стр. 443) только указание на установленную Агмоном в неопубликованной работе единственность $f^*(z)$ для односвязной области R .

В настоящей работе исследуются свойства $f^*(z)$ в произвольной конечно-связной области R , ограниченной непересекающимися жордановыми контурами $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$. Эти контуры можно, не ограничивая общности, считать аналитическими.

Вместо того, чтобы вести аппроксимацию в равномерной метрике в области $S \subset R$, можно рассмотреть гораздо более общую ситуацию.

Пусть $X = \{\varphi\}$ — банаховское пространство. Норму элемента $\varphi \in X$ обозначаем $\|\varphi\|$. Предполагается выполнение следующих условий.

1. Определен оператор N из $B_M(R)$ в X , обладающий следующими свойствами:

$$а) \quad N(\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2) = \lambda N f_1 + (1 - \lambda) N f_2,$$

$$f_i \in B_M(R), i = 1, 2, \quad 0 < \lambda < 1 \text{ — произвольно;}$$

в) если $\{f_n(z)\} \subset B_M(R)$ равномерно сходится внутри R к $f(z) \in B_M(R)$, то $\|N f_n - N f\| \rightarrow 0$;

с) если $l(\varphi)$ — произвольный линейный функционал над X , то существует аналитическая на каждом контуре $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ функция $\omega(\zeta)$ такая, что для $f \in B_M(R)$ имеем

$$l(Nf) = \int_{\Gamma} f(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta.$$

Теорема 1. Пусть область R ограничена аналитическими контурами $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, а относительно пространства X выполнены перечисленные выше условия. Тогда для любого элемента $\varphi \in X$ существует единственная функция $f^*(z) \in B_M(R)$, для которой

$$\|\varphi - Nf^*\| = \inf_{f \in B_M(R)} \|\varphi - Nf\|. \quad (2)$$

Функция $f^*(z)$ аналитична в замкнутой области R и, либо $f^*(z) \equiv e^{1/z} M$, либо $f^*(z)$ дает отображение R на m — листный круг радиуса M ($m > n$).

Доказательство. В заметке [3] из соотношений двойственности Гаркави [4] мы вывели следующий критерий.

Пусть X — банаховское пространство и A — выпуклое множество в X . Для того чтобы элемент $f^* \in A$ доставлял наилучшее приближение элементу $\varphi \in \bar{A}$ среди всех элементов A , т. е., чтобы

$$\|\varphi - f^*\| = \inf_{f \in A} \|\varphi - f\|,$$

необходимо и достаточно существования функционала $l \in X^*$, $\|l\| = 1$, для которого

$$l(f^* - \varphi) = -\|f^* - \varphi\|, \operatorname{Re} l(f^* - f) > 0, f \in A.$$

При этом функционал l является одним и тем же для всех элементов наилучшего приближения.

Рассматриваемая теорема 1 является простым следствием при введённого критерия. В самом деле, множество A образов $B_M(R)$ при отображении N является выпуклым, так как $B_M(R)$ выпукло, а оператор N удовлетворяет условию а). Существование функции $f^*(z)$ наилучшего приближения в (2) следует из компактности $B_M(R)$ и условия в). Пусть теперь $l \in X^*$ ($\|l\| = 1$) — функционал, для которого выполняются требования

$$l(Nf^* - \varphi) = -\|Nf^* - \varphi\|, \operatorname{Re} l(Nf^* - Nf) > 0, f \in B_M(R). \quad (3)$$

Существование такого функционала немедленно вытекает из цитированного критерия. В силу с) мы можем переписать соотношение $\operatorname{Re} l(Nf^* - Nf) > 0$ следующим образом:

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta \leq \operatorname{Re} \int_{\Gamma} f^*(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta, f \in B_M(R), \quad (4)$$

где $\omega(\zeta)$ — аналитическая на контурах $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ функция, определяе-

мая функционалом l . Так как вместе с $f(z)$ и $e^{iz}f(z)$ входит в $B_M(R)$ при любом вещественном z , то (4) приводит к неравенству

$$\left| \int_{\Gamma} f(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta \right| \leq \operatorname{Re} \int_{\Gamma} f^*(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta, \quad f \in B_M(R). \quad (5)$$

Из (5) следует, что $f^*(z)$ является в классе $B_M(R)$ экстремальной для задачи о

$$\sup \left| \int_{\Gamma} f(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta \right| \quad (6)$$

и, кроме того, нормированной так, что

$$\int_{\Gamma} f^*(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} f^*(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta > 0. \quad (7)$$

В заметке [5] было сформулировано, а в статье [6] подробно доказано, что экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (6), нормированная условием (7), единственна. Кроме того, экстремаль $f^*(z)$ аналитична в замкнутой области и, либо $f^*(z) \equiv Me^{iz}$, либо дает отображение R на m -листный круг радиуса M ($m \geq n$). Теорема 1 полностью доказана.

Для задачи Уолша, с которой мы начали, из теоремы 1 и приводившегося в ходе ее доказательства критерия элемента наилучшего приближения следует

Теорема 2. Пусть R — область, ограниченная аналитическими контурами $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, а S — замкнутое множество, лежащее внутри R . Пусть $F(z)$ — непрерывная функция на S . Для того чтобы $f^*(z) \in B_M(R)$ была экстремальной в задаче (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая борелевская комплексная мера μ на S , для которой выполняются следующие условия

а) замкнутый носитель μ содержится во множестве, где

$$|f^*(z) - F(z)| = E_M(F);$$

в) мера $(f^*(z) - F(z)) d\mu$ совпадает с мерой $-E_M(F) |d\mu|$, $|d\mu|$ — вариация $d\mu$;

$$\text{с) } \operatorname{Re} \int_S (f^*(z) - f(z)) d\mu \geq 0, \quad f \in B_M(R).$$

Функция $f^*(z)$ единственна и, либо является константой Me^{iz} , либо $f^*(z)$ дает отображение R на m -листный круг радиуса M ($m \geq n$).

Доказательство. Пусть l — тот линейный функционал над

$X = C(S)$, о котором говорится в критерии (3). Тогда $l(\varphi) = \int_S \varphi(z) d\mu$,

где μ — борелевская мера на S . Имеем

$$\operatorname{Re} \left[\int_S (f^*(z) - F(z)) d\mu \right] > - \int_S |f^*(z) - F(z)| |d\mu| > -E_{II}(F).$$

Но так как, согласно (3), в этой цепочке должны быть равенства, то это немедленно влечет утверждение в) нашей теоремы. Утверждение а) есть следствие в). Наконец, так как для любой борелевской меры λ на S имеем для $f(z) \in B_{II}(R)$

$$\int_S f(z) d\lambda = \int_\Gamma f(\zeta) \omega(\zeta) d\tau,$$

где $\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{d\lambda}{\zeta - z}$, то мы находимся в условиях выполнения п. с)

требований к пространству X . Это означает справедливость высказанных относительно $f^*(z)$ утверждений.

Замечание 1. Характеристическое свойство, высказанное в теореме 2 для $f^*(z)$, не зависит от хороших свойств границы Γ и имеет место всегда. Кроме того, и единственность $f^*(z)$ может быть установлена в случае, если граница Γ содержит хотя бы одну свободную жорданову дугу.

Замечание 2. В качестве других примеров пространства X из теоремы 1 можно брать, например, пространства $L_p(S, \nu)$, где $\bar{S} \subset R$, $p > 1$, ν — положительная борелевская мера на S .

Рассмотрим теперь другую задачу, родственную (1). Пусть $k > 0$ — произвольное фиксированное число. Возьмем, как и в теореме 1, пространство X и линейный оператор N из $B(R)$ в X , обладающий свойствами в) и с). Поставим следующую задачу: найти для $\varphi \in X$

$$\inf_{f \in B(R)} [\|\varphi - Nf\| + k \sup_{z \in R} |f(z)|] = E_k(\varphi). \quad (8)$$

Эта задача является специальным случаем экстремальной проблемы, рассмотренной в нашей заметке [7]. Мы сформулируем последнюю проблему в несколько менее общем варианте, чем в [7]. Пусть E и E_1 — пространства Банаха с нормами элементов, обозначаемыми $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ соответственно. Так же будут обозначаться нормы функционалов из E^* и E_1^* соответственно. Пусть N — линейный непрерывный оператор из E_1 в E . Обозначим через T множество линейных функционалов $l \in E^*$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$\|l\| \leq 1, \|N^*l\|_1 \leq 1. \quad (8')$$

Здесь N^* — оператор, сопряженный к N (N^* действует из E^* в E_1^*).

Теорема 3. ([7]). Для произвольного элемента $\varphi \in E$ имеем

$$\inf_{f \in E_1} [\|\varphi - Nf\| + \|f\|_1] = \max_{l \in T} |l(\varphi)|. \quad (9)$$

(Мы пишем $\max$ и $\min$ вместо $\sup$ и $\inf$, там где грани достигаются).

Из теоремы 3 немедленно следует.

Теорема 4. Для того чтобы для элемента $f^* \in E_1$ достигалась нижняя грань в (9) необходимо и достаточно, чтобы для некоторого функционала $l_0 \in T$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} l_0(\varphi - Nf^*) &= e^{i\theta} \|\varphi - Nf^*\|, \\ l_0(Nf^*) &= e^{i\theta} \|f^*\|, \end{aligned} \quad (10)$$

где θ — вещественное постоянное число.

Доказательство. Пусть l_0 — тот функционал из T , для которого достигается $\max$ в (9). Имеем тогда

$$\begin{aligned} |l_0(\varphi)| &= |l_0(\varphi - Nf^*) + l_0(Nf^*)| \leq \\ &\leq |l_0(\varphi - Nf^*)| + |l_0(Nf^*)| = \\ &= |l_0(\varphi - Nf^*)| + |(N^* l_0)(f^*)| \leq \\ &\leq \|\varphi - Nf^*\| + \|f^*\|. \end{aligned}$$

Однако в силу (9) в этой цепочке всюду должны быть равенства. Это немедленно ведет к (10). Обратная часть теоремы доказывается аналогичным рассуждением.

Для задачи (8) с помощью теорем 3 и 4 получаем такие утверждения.

Теорема 5. Имеет место равенство

$$E_k(\varphi) = \sup_{l \in T} |l(\varphi)|, \quad (11)$$

$$T = \{l; l \in X^*, \|l\| \leq 1; \|N^* l\| \leq k\}.$$

Для того чтобы функция $f^*(z) \in B(R)$ реализовала нижнюю грань в (8) необходимо и достаточно, чтобы для некоторого функционала $l_0 \in T$ имели место соотношения

$$\begin{aligned} l_0(\varphi - Nf^*) &= e^{i\theta} \|\varphi - Nf^*\|, \\ l_0(Nf^*) &= e^{i\theta} k \sup_{z \in R} |f^*(z)|, \end{aligned} \quad (12)$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$. Любая экстремальная функция $f^*(z)$, либо дает отображение R на многолистный круг, или же $f^*(z) \equiv \text{const}$. Две различные экстремальные функции могут отличаться друг от друга только постоянным положительным множителем.

Доказательство. Доказательство утверждений (11) и (12) следует немедленно из теорем 3 и 4, если положить там $E = X$, $E_1 = B(R)$ с нормой, определяемой равенством $\|f\|_{E_1} = k \sup_{z \in R} |f(z)|$.

Утверждения о свойствах $f^*(z)$ вытекают из того, что по предположению с)

$$l_0(Nf) = \int f(\zeta) \omega(\zeta) d\zeta \quad (13)$$

и в силу (12) функция $f^*(z)$ является экстремальной для этого функционала. Теперь следует привлечь снова результаты из [6] о свойствах экстремальных функций. Две экстремальные функции для функционала (13) $f_1(z)$ и $f_2(z)$ могут отличаться лишь постоянным множителем N . При этом из условий (12) легко следует, что $N > 0$. Должна ли иметь место на самом деле единственность $f^*(z)$ ($N=1$) в случае, когда, например, $X = C(S)$ — мы не знаем.

Московский инженерно-строительный
институт

Поступило 3.II.66

Ս. ՅԱ. ԽԱՎԻՆՍՈՆ

ՈՒՈԼՇԻ ՄԻ ԱՊՐՈԿՍԻՄԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ n փ n i մ

1938 թ. Ուոլշի կողմից դրվել է հետևյալ խնդիրը:

Դիցուք R տիրույթում դիտարկվում է R -ում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիաների $B_M(R)$ դասը, որոնց համար $|f(z)| \leq M$. $S \subset R$ փակ ենթատիրույթում տրված է $F(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան: Դիտարկվում է հետևյալ մեծությունը

$$E_M(F) = \inf_{f \in B_M(R)} \max_{z \in S} |F(z) - f(z)|$$

Պահանջվում է, նախ հետազոտել $f^*(z) \in B_M(R)$ ֆունկցիայի հատկությունները, որը թույլ է տալիս լավագույն մոտարկումը և երկրորդը $E_M(F)$ -ի զրոյի ձգտելու արագությունը, երբ $M \rightarrow \infty$: Զորդ խնդիրը բավական մանրամասն է ուսումնասիրված, իսկ 1-ին խնդրի մասին շատ քիչ է հայտնի: Աշխատանքում հետազոտված են $f^*(z)$ ֆունկցիայի հատկությունները, հայտնաբերված են նրա բնութագրող հատկանիշները և միակությունը:

Ստացված արդյունքը ընդգրկում է ավելի ընդհանուր բնագավառ:

S. J. KHAVINSON

ON A PROBLEM OF APPROXIMATION OF WALSH

S u m m a r y

In 1938 Walsh formulated the following problem. Let $B_M(R)$ be the class of analytic functions $f(z)$ given in the domain R with the property $|f(z)| \leq M$. On a closed subregion $S \subset R$ let us consider an analytic function $F(z)$.

Suppose

$$E_M(F) = \inf_{f \in B_M(R)} \max_{z \in S} |F(z) - f(z)|.$$

The problem is: 1) to investigate the properties of the function $f^*(z)$ which gives the best approximation and 2) to investigate the rate of

$E_M(F) \rightarrow 0$ when $M \rightarrow \infty$. The second problem has been dealt with in many papers, yet very little is known of the first problem. Our paper considers the investigation of the properties of $f^*(z)$ and establishes its characteristic property and uniqueness.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. Walsh*. On interpolation and approximation by functions analytic and bounded in a given region, *Proceedings of the National Academie of Sciences*, 24 (1938), 477—486.
2. *Дж. А. Уолш*. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., Издательство иностр. литературы (1961).
3. *С. Я. Хавинсон*. Об аппроксимации элементами выпуклых множеств (в печати).
5. *А. А. Гаркави*. Теоремы двойственности для приближений посредством элементов выпуклых множеств, *УМН*, 16, вып. 4 (100) (1961), 141—145.
4. *С. Я. Хавинсон*. Об экстремальных свойствах функций, отображающих область на многолистный круг, *ДАН* 88, 6 (1953), 957—959.
6. *С. Я. Хавинсон*. Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в многосвязных областях, *Матем. сб.* 36 (78), 3 (1955), 445—478.
7. *С. Я. Хавинсон*. Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, *ДАН* 135, 2 (1960), 270—273.