ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 4, 1966 Математика

А. С. МАШУРЯН

ОБ АКСИОМАХ ДИСТРИБУТИВНОСТИ В ИСЧИСЛЕНИИ СТРОГОЙ ИМПЛИКАЦИИ АККЕРМАНА

Аккерман в 1956 г. построил исчисление, в котором, в отличие от классического исчисления высказываний, импликация отражает некоторую связь по смыслу.

В частности, устранены так называемые парадоксы материальной импликации, заключающиеся в следующем: истинное высказывание выводимо из любого высказывания, и из ложного высказывания следует любое высказывание. Например, формула $A \to (B \to A)$ в исчислении Аккермана невыводима.

В работе [2] показано, что схемы аксиом 1, 3 (1. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ и 3. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}))$) из списка, данного в 1, выводимы из остальных схем аксиом и что остальные схемы аксиом независимы.

Схема аксиом № 11 из этого списка, названная дистрибутивностью, по форме отличается от дистрибутивности. Здесь мы покажем, что эта схема аксиом эквивалентна дистрибутивности.

Таким образом, объединяя этот результат с работой [2], можно следующим образом описать исчисление, эквивалентное исчислению строгой импликации Аккермана.

Алфавит исчисления состоит из (потенциально) бесконечного перечня букв $A, B, C, \cdots$ и знаков логических операций & (конъюнкция, V (дизъюнкция),—(отрицание), $\to$ (строгая импликация).

Понятие формулы определяется индуктивно.

1. Любая буква $A, B, C, \cdots$ — формула.

2—5. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A})$ & $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A})\ V\ (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \to (\mathfrak{B})$, $\overline{\mathfrak{A}}$ — формулы.

6. Никаких формул, кроме построенных согласно 1—5, нет.

Примечание. В дальнейшем, вместо слов: схема аксиом и схема формул мы будем употреблять просто слова: аксиома и формула. Путаницы не возникнет, так как в дальнейшем всюду будут встречаться исключительно схемы аксиом и схемы формул.

Система аксиом. (В скобках дается номер аксиомы по работе [2]; аксиомы №№ 1, 3 опущены по причине, указанной выше).

(2) 1. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$ — правило силлогизма;

(4) 2. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — правило сокращения;

$$\left.\begin{array}{l}(5)\ 3.\ \mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \\ (6)\ 4.\ \mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}\end{array}\right\} \text{— конъюнкция в антецеденте;}$$

(7) 5. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \& \mathfrak{C})$ — конъюнкция в консеквенте;

(8) 6. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

(9) 7. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ — дизъюнкция в консеквенте;

(10) 8. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \& (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ — дизъюнкция в антецеденте;

(11) 9*. $\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C})$ — дистрибутивность;

(12) 10. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$ — контрапозиция;

(13) 11. $\mathfrak{A} \& \overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}$ — связь строгой импликации с материальной;

(14) 12. $\mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ — двойное отрицание в консеквенте;

(15) 13. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \to \mathfrak{A}$ — двойное отрицание в антецеденте.

Примечание. Аксиома 9 отмечена звездочкой потому, что она заменяет аксиому дистрибутивности ($\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C})$) из первоначального списка аксиом.

Правила вывода.

(α) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ — $\left(\begin{matrix}\text{modus}\\ \text{ponens}\end{matrix}\right)$,

(β) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$ — (объединение),

(γ) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ — (modus ponens для материальной импликации),

(δ) $\dfrac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}}$ — (здесь $\mathfrak{B}$ — логическое тождество, т. е. формула, выводимая только из аксиом).

Покажем теперь, что описанное таким образом исчисление эквивалентно исчислению строгой импликации Аккермана.

Для этого, учитывая работу [2], достаточно доказать теоремы 1а и 1в.

Теорема 1а. *В описанном выше исчислении выводима формула*

$$\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}).$$

Теорема 1в. *В исчислении, получающемся заменой аксиомы 9* аксиомой*

9** $$\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}),$$

выводима формула

$$\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}).$$

Будем пользоваться следующим вспомогательным правилом вывода

$$(\varepsilon)\quad \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}}.$$

Это правило легко получить из аксиомы 1 двукратным применением правила (α).

Доказательство теоремы 1а.

Нижеследующая последовательность формул является требуемым выводом. Цифры рядом с формулами указывают на анализ данного вывода. (То же относится к доказательству теорем 1в и 2.)

1. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ — акс. 4
2. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 6.
3. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (ε), 1, 2.
4. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 7.
5. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$ — пр. (β), 3, 4.
6. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to$ $\to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$—акс. 8.
7. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (α), 5, 6.
8. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 9*.
9. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$—пр. ($\varepsilon$), 8,7.

Доказательство теоремы 1в.

1. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}$ — акс. 3.
2. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 9**.
3. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$ — акс. 7.
4. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$ — акс. 6.
5. $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B})$ — пр. (β), 3, 4.
6. $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to$ $\to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B})$ — акс. 8.
7. $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$ — пр. (α), 5,6.
8. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$ — пр. (ε), 2, 7.
9. $(\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}) \& (\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B})$ — пр. (β), 1, 8.
10. $(\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}) \& (\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}) \to$ $\to (\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}))$ — акс. 5.
11. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B})$ — пр. (α), 9, 10.
12. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ — акс. 9**.
13. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ — пр. (ε), 11, 12.
14. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 7.
15. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 6.
16. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$ — пр. (β), 14, 15.
17. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \& (\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to$ $\to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$ — акс. 8.
18. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (α), 16, 17.
19. $\mathfrak{A}\& (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (ε), 13, 18.

Итак, уже доказано, что описанное выше исчисление эквивалентно исчислению строгой импликации Аккермана.

Отметим, что посылка и заключение аксиомы 9** не эквивалентны (даже в классическом исчислении высказываний). Следующая теорема показывает, что посылка и заключение аксиомы 9* эквивалентны в исчислении строгой импликации.

Теорема 2. *В нашем исчислении выводима формула*

$$Ա\&Բ \vee Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ).$$

Доказательство.

1. $Ա\&Բ \to Ա$ — акс. 3.
2. $Ա\&Բ \to Բ$ — акс. 4.
3. $Բ \to Բ \vee Գ$ — акс. 6.
4. $Ա\&Բ \to Բ \vee Գ$ — пр. (ε) 2,3.
5. $(Ա\&Բ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Բ \to Բ \vee Գ)$ — пр. (β), 1, 4.
6. $(Ա\&Բ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Բ \to Բ \vee Գ) \to (Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — акс. 5.
7. $Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ)$ — пр. (α), 5, 6.
8. $Ա\&Գ \to Ա$ — акс. 3.
9. $Ա\&Գ \to Գ$ — акс. 4.
10. $Գ \to Բ \vee Գ$ — акс. 7.
11. $Ա\&Գ \to Բ \vee Գ$ — пр. (ε), 9, 10.
12. $(Ա\&Գ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Գ \to Բ \vee Գ)$ — пр. (β), 8, 11.
13. $(Ա\&Գ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Գ \to Բ \vee Գ) \to (Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — акс. 5.
14. $Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ)$ — пр. (α), 12, 13.
15. $(Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ))\ \&\ (Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — пр. (β), 7, 14.
16. $(Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ))\ \&\ (Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ)) \to (Ա\&Բ \vee Ա\&Գ \to$
 $\to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — акс. 8.
17. $Ա\&Բ \vee Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ)$ — пр. (α), 15, 16.

Следовательно, в нашем исчислении формулы

$$Ա\&(Բ \vee Գ) \text{ и } Ա\&Բ \vee Ա\&Գ$$

эквивалентны.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 12.I.66

Ա. Ս. ՄԱՇՈՒՐՅԱՆ

ԱԿԵՐՄԱՆԻ ԽԻՍՏ ԻՄՊԼԻԿԱՑԻԱՅԻ ՀԱՇՎԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Այս հոդվածը նվիրված է Ակերմանի «խիստ իմպլիկացիայի հաշվին»: Սկզբնական տեսքով տրված այդ հաշվի № 11 աքսիոմը այս հոդվածում փոխարինված է մի նոր աքսիոմով, որը ավելի պարզ և կիրառելի բովանդակություն ունի.

Ցույց է տրված, որ այդ փոփոխությունից հետո «Ակերմանի իմպլիկացիայի հաշիվը» չի փոխվում։

Այդ փաստը ապացուցված է 1a և 1в թեորեմներում։ Ապացուցված է նաև 2 թեորեմը, որով ցույց է տրվում, որ նոր աքսիոմի երկու մասը՝ ի տարբերություն հին աքսիոմի, խիստ համարժեք բանաձևեր են։

A. S. MAŠOURIAN

ON AKERMAN'S STRICT IMPLICATION CALCULUS

S u m m a r y

The paper deals with Akerman's strict implication calculus. The original axiom No. 11 we replace here by a new simple and more applicable one. It is shown that this replacement does not change Akerman's implication calculus. This argument is proved in theorems 1a and 1b. Theorem 2 proves that the two parts of the new axiom, unlike the old one, are strictly equivalent formulas.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Донченко.* Некоторые вопросы, связанные с проблемой разрешения для исчисления строгой импликации Аккермана, Проблемы логики, Издательство АН СССР, (1963).
2. *Л. Л. Максимова.* О системе аксиом исчисления строгой импликации, Алгебра и логика, т. 3, вып. 3, (1964).