ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 3 Математика

Р. М. МАРТИРОСЯН

О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

Статья посвящена исследованию спектра несамосопряженных возмущений $T = A + S^2$ самосопряженного дифференциального оператора A, где S—оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q}(x)$. В тех случаях, когда A есть произвольный обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $L_2(-\infty, \infty)$ или полигармонический оператор $A = (-\Delta)^k$ в $L_2(E_n)$ ($n \geqslant 3$ нечетно и $2k > n$), основной результат состоит в том, что если $q(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, то множество собственных значений возмущенного оператора T (с учетом и тех, которые лежат на спектре невозмущенного оператора A) может быть лишь конечным. Это предложение можно обобщить на случай более общих дифференциальных операторов.

Чтобы пояснить простую методику доказательства, основанную на теореме A и леммах 1.1 и 1.2, мы иллюстрируем на одном примере идею предлагаемого способа в конце § 1.

§ 1. О спектре несамосопряженных возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть T—несамосопряженный замкнутый оператор с плотной областью определения D_T в гильбертовом пространстве H. Всюду в дальнейшем мы будем называть точку λ_0 точкой непрерывного спектра оператора T, если λ_0 не является собственным значением оператора T, многообразие $(T - \lambda_0 E) D_T$ плотно в H и незамкнуто. Как известно, точка λ_0, не являющаяся собственным значением оператора T, может принадлежать и остаточному спектру этого оператора, т. е. многообразие $(T - \lambda_0 E) D_T$ может быть неплотным.

Первая из приводимых ниже лемм доказана, по существу, в работе автора [1]. Поскольку не все ее утверждения явно сформулированы, мы, для полноты изложения, приведем доказательство.

Лемма 1.1. *Пусть A—самосопряженный оператор, определенный на плотном многообразии D_A гильбертова пространства H, а T—замкнутый оператор, определенный формулой* $T = A + S^2$

$(D_T = D_A)$, где S—ограниченный (несамосопряженный) оператор. Пусть R_λ—резольвента оператора A. Тогда

а) если λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A, и для некоторой последовательности $\lambda_n \to \lambda_0$ операторы $SR_{\lambda_n}S$ существуют и вполне непрерывны, то λ_0—точка спектра оператора T;

б) если λ_0 не принадлежит спектру оператора A и оператор $SR_{\lambda_0}S$ вполне непрерывен, то λ_0—или собственное значение или регулярная точка оператора T;

в) пусть λ_0 не принадлежит спектру оператора A и пусть оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен для всех λ из односвязной области, содержащей точку λ_0, а также точки вида $z = \sigma + i\tau$ со сколь угодно большими вещественными τ. Тогда λ_0 не может быть предельной точкой собственных значений оператора T.

Доказательство. Для доказательства предложения а) заметим, что если оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен и если существует ограниченная резольвента $B_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ оператора T, то можно показать, пользуясь теорией Фредгольма, что

$$B_\lambda = R_\lambda - R_\lambda S (E + SR_\lambda S)^{-1} SR_\lambda,$$

где оператор $(E + SR_\lambda S)^{-1}$ определен на всем H и ограничен, а поэтому оператор $SB_\lambda S$ вполне непрерывен. Далее, если допустить, что λ_0 не принадлежит спектру оператора T, то уравнения $Au - \lambda_0 u = f$ и $u = B_\lambda S^2 u + B_\lambda f$ окажутся эквивалентными; но уравнение $u = B_{\lambda_0} S^2 u$ имеет лишь тривиальное решение, а поэтому, как нетрудно видеть, и уравнение $\varphi = SB_\lambda S\varphi$ имеет лишь тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение $\varphi = SB_{\lambda_0} S\varphi + SB_{\lambda_0} f$ оказывается разрешимым при всех $f \in H$, но тогда, как нетрудно видеть, и уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ разрешимо при всех $f \in H$ в противоречие с предположением.

Переходя к доказательству предложения б) заметим, что если λ_0—не собственное значение оператора A, то уравнение $u + R_{\lambda_0} S^2 u = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Поэтому и уравнение $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$, как нетрудно видеть, имеет лишь тривиальное решение. Отсюда следует разрешимость уравнения $u + R_{\lambda_0} S^2 u = R_{\lambda_0} f$, а следовательно и равносильного ему уравнения $Tu - \lambda_0 u = f$ при всех $f \in H$. В силу замкнутости T оператор $(T - \lambda_0 E)^{-1}$ ограничен.

Наконец, для доказательства предложения в) предположим, что λ—собственное значение оператора T. Тогда существует такое u, $\|u\| > 0$, что $u + R_\lambda S^2 u = 0$. Но в таком случае, как легко видеть, и уравнение $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ имеет нетривиальное решение. Итак, достаточно показать, что собственные значения уравнения $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ не могут сгущаться к λ_0, а это следует из известной леммы И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2], ибо $\lim\limits_{\tau \to \infty} \| R_{\sigma + i\tau} \| = 0$.

Переходя к следующей лемме, обозначим через $w_1(t)$ и $w_2(s)$ голоморфные функции, определенные, соответственно, в областях G_1 и G_2 комплексной плоскости и отображающие их на окрестности U_1 и U_2 некоторой точки λ_0. Пусть далее подобласти $G_1^+ \subset G_1$ и $G_2^- \subset G_2$ отображаются этими функциями однолистно на части $O_1 \subset U_1$ и $O_2 \subset U_2$ окрестностей U_1 и U_2, отсекаемые, соответственно, верхней и нижней полуплоскостями. Если при этом некоторая окрестность точки λ_0 (за исключением, быть может, самой точки λ_0) не содержит собственных значений оператора A и если вне спектра A оператор $SR_\lambda S$ (в обозначениях леммы 1.1) вполне непрерывен, то справедлива следующая

Лемма 1.2. *Если операторы $SR_{w_1(t)}S$ $(t \in G_1^+)$ и $SR_{w_2(s)}S$ $(s \in G_2^-)$ допускают представление*

$$SR_{w_1(t)}S = \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(\cdot, t)\varphi_k}{(t-t_0)^{n_k}} + K_t, \quad t \in G_1^+, \tag{1.1}$$

$$SR_{w_2(s)}S = \sum_{l=1}^{q} \frac{\Psi_l(\cdot, s)\psi_l}{(s-s_0)^{n_l}} + M_s, \quad s \in G_2^-, \tag{1.2}$$

где $\varphi_k, \psi_l \in H$, $w_1(t_0) = w_2(s_0) = \lambda_0$ $(t_0 \in \overline{G_1^+},\ s_0 \in \overline{G_2^-})$, а линейные функционалы $\Phi_k(\cdot, t)$ и $\Psi_l(\cdot, s)$, равно как и линейные вполне непрерывные операторы K_t и M_s, аналитически зависят от t и s, соответственно, в G_1 и G_2, то точка λ_0 не является предельной точкой собственных значений (включая и лежащие на спектре оператора A) оператора $T = A + S^2$.

Доказательство. Покажем сначала, что оператор $(E+\Phi_t)^{-1}$, $t \in G_1$ (соответственно, оператор $(E+\Psi_s)^{-1}$, $s \in G_2$) существует и ограничен для всех $t \in G_1$ (соответственно, для всех $s \in G_2$), за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек. Ограничимся случаем оператора Φ_t и условимся называть t собственным значением этого оператора, если уравнение $(E+\Phi_t)u = 0$ имеет отличное от нулевого решение. Поскольку оператор Φ_t вполне непрерывен, то, очевидно, что если t не является собственным значением оператора Φ_t, то оператор $(E+\Phi_t)^{-1}$ существует и ограничен (в силу альтернативы Фредгольма). Итак, надо лишь доказать конечность числа собственных значений оператора Φ_t. Для этого заметим, что при любом фиксированном $\tau \in G_1$ повторное применение теоремы Банаха-Штейнгауза приводит к существованию такой константы $C(\tau)$, что

$$\|K_t - K_\tau\| \leqslant C(\tau)\,|t-\tau| \quad (t \in G_1). \tag{1.3}$$

Далее, при любом фиксированном $\tau_0 \in G_1$ существует такой конечномерный оператор

$$M = \sum_{s=1}^{m} (\cdot, \omega_s)\chi_s \quad (\omega_s, \chi_s \in H), \tag{1.4}$$

что

$$\|K_{\tau_0} - M\| = q_0 < 1. \tag{1.5}$$

При этом систему $\varphi_1, \cdots, \varphi_p, \chi_1, \cdots, \chi_m$ можно считать линейно независимой, потому что при любом $\varepsilon > 0$ и $\psi \in H$ в шаре $\|\psi - \chi\| < \varepsilon$ существуют элементы χ такие, что система $\varphi_1, \cdots, \varphi_p, \chi$, линейно независима, если была независимой система $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$. Положив, далее, $S(t) = K_t - K_{\tau_0}$ и выбрав q_1 так, чтобы $0 < q_1 < 1 - q_0$, найдем, в силу (1.3), такую окрестность $O_{\tau_0} \subset G_1$ точки τ_0, что $\|S(t)\| < q_1$ $(t \in O_{\tau_0})$. Очевидно, для оператора $T(t) = K_t - M = S(t) + K_{\tau_0} - M$ будем иметь $\|T(t)\| \leqslant q_0 + q_1 = q < 1$ при $t \in O_{\tau_0}$, и поэтому существует $(\mathrm{E} + T(t))^{-1}$, причем

$$\|(\mathrm{E} + T(t))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q} \quad (t \in O_{\tau_0}). \tag{1.6}$$

Предположим теперь, что некоторое $t \neq \tau_0$ из O_{τ_0} является собственным значением оператора Φ_t, т. е.

$$f + \Phi_t f = 0, \quad f \neq 0. \tag{1.7}$$

Это значит, что

$$f + \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(f, t)\varphi_k}{(t - t_0)^{n_k}} + K(t) f = 0,$$

т. е.

$$f + \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(f, t)\varphi_k}{(t - t_0)^{n_k}} + T(t) f + Mf = 0.$$

Применяя к обеим частям последнего соотношения оператор $(\mathrm{E} + T(t))^{-1}$, получим

$$f + \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(f, t)}{(t - t_0)^{n_k}} (\mathrm{E} + T(t))^{-1}\varphi_k + (\mathrm{E} + T(t))^{-1} Mf = 0. \tag{1.8}$$

Обратно, легко видеть, что если $f \neq 0$ удовлетворяет уравнению (1.8), то оно удовлетворяет и уравнению (1.7). Положим

$$\begin{aligned} (\mathrm{E} + T(t))^{-1}\varphi_k &= \varphi_k(t), \\ (\mathrm{E} + T(t))^{-1}\chi_s &= \chi_s(t). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Заметим далее что, в силу (1.4),

$$(\mathrm{E} + T(t))^{-1} Mf = \sum_{s=1}^{m} (f, \omega_s)\chi_s(t).$$

Таким образом, задача о собственных значениях оператора Φ_t эквивалентна задаче о собственных значениях уравнения

$$f+\sum_{k=1}^{p}\frac{\Phi_k(f,t)}{(t-t_0)^{n_k}}\varphi_k(t)+\sum_{s=1}^{m}(f,\omega_s)\chi_s(t)=0. \qquad (1.10)$$

Пусть уравнение (1.10) имеет решение f. Полагая

$$\frac{\Phi_k(f,t)}{(t-t_0)^{n_k}}=\xi_k, \quad (f,\omega_s)=\eta_s$$

и применяя к обеим частям (1.10) функционалы $\frac{\Phi_l(\cdot,t)}{(t-t_0)^{n_l}}$ и $(\cdot,\omega_j)$,

получаем

$$\left.\begin{aligned}&\xi_l+\sum_{k=1}^{p}\xi_k\frac{\Phi_l(\varphi_k(t),t)}{(t-t_0)^{n_l}}+\sum_{s=1}^{m}\eta_s\frac{\Phi_l(\chi_s(t),t)}{(t-t_0)^{n_l}}=0 \quad (i=1,\cdots,p),\\ &\eta_j+\sum_{k=1}^{p}\xi_k(\varphi_k(t),\omega_j)+\sum_{s=1}^{m}\eta_s(\chi_s(t),\omega_j)=0 \qquad (j=1,\cdots,m)\end{aligned}\right|. \qquad (1.11)$$

Легко видеть, что и обратно, если при некотором $t\in O_{\tau_0}$ числа ξ_l и η_j удовлетворяют системе алгебраических уравнений (1.11), то элемент

$$f=\sum_{l=1}^{p}\xi_l\varphi_l(t)+\sum_{j=1}^{m}\eta_j\chi_j(t) \qquad (1.12)$$

удовлетворяет уравнению (1.10). Более того, поскольку элементы $\varphi_1,\cdots,\varphi_p,\chi_1,\cdots,\chi_m$ выбраны линейно независимыми, то, согласно (1.9), элементы $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_p(t),\chi_1(t),\cdots,\chi_m(t)$ также линейно независимы при любом $t\in O_{\tau_0}$. Поэтому (1.12) показывает, что уравнение (1.10) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда этим свойством обладает система алгебраических уравнений (1.11). Итак, задача о собственных значениях оператора Φ_t в области O_{τ_0} (τ_0 может совпадать и с t_0) эквивалентна задаче о нетривиальных решениях системы (1.11) и поскольку элементы определителя этой системы аналитичны в окрестности точки $t=\tau_0$, причем τ_0 может быть лишь полюсом, то или все точки из O_{τ_0} являются собственными значениями оператора Φ_t, или этот оператор имеет лишь конечное число собственных значений в O_{τ_0}. Наконец, очевидно, что первый случай невозможен, ибо, по условию, оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен вне спектра оператора A и, очевидно, аналитически зависит от параметра λ, причем, как известно, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\|R_{\sigma+i\tau}\|=0$ (если $\|SR_{\sigma+i\tau}S\|<1$, то из $v+SR_{\sigma+i\tau}Sv=0$ следует $\|v\|\leqslant\|SR_{\sigma+i\tau}S\|\|v\|$ и $v=0$). Этим и доказано, что оператор $(E+\Phi_t)^{-1}$, $t\in G_1$ существует и ограничен для всех $t\in G_1$ за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек.

Докажем теперь, что $\lambda_0 = w_1(t_0)$ не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T, лежащих в верхней полуплоскости. В самом деле, если $\lambda_n \in O_1$ и $\lambda_n \to \lambda_0$, то $\lambda_n = w_1(t_n)$ и $t_n \to t_0$, $t_n \in G_1^+$. Пусть v_n—соответствующие собственные элементы, т. е. $Tv_n - \lambda_n v_n = Tv_n - w_1(t_n)v_n = 0$ или $Av_n + S^2v_n - w_1(t_n)v_n = 0$, а поэтому $v_n + R_{w_1(t_n)}S^2v_n = 0$ и, следовательно, $Sv_n + SR_{w_1(t_n)}S\cdot Sv_n = 0$. Но $Sv_n \neq 0$, ибо в противном случае $v_n = -R_{w_1(t_n)}S\cdot Sv_n = 0$. Итак, оператор $E + SR_{w_1(t)}S$ не обратим для всех этих t_n, в противоречие с доказанным выше, ибо $SR_{w_1(t)}S \equiv \Phi_t$ в G_1^+. Точно так же убеждаемся, привлекая к рассмотрению оператор Ψ_λ, что λ_0 не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T, лежащих в нижней полуплоскости. Наконец, чтобы убедиться в том, что λ_0 не может оказаться предельной точкой вещественных собственных значений оператора T (лежащих на спектре оператора A), достаточно показать, что если λ^* принадлежит непрерывному спектру оператора A и является собственным значением оператора T, то

$$\lim_{\tau\to0}(E + SR_{\lambda^*+i\tau}S)v = 0 \qquad (\operatorname{Im}\tau = 0)$$

при некотором $v \in H$, $v \neq 0$, ибо это означает, что $(E + \Phi_{t^*})v = 0$ $(w_1(t^*) = \lambda^*)$. Это является следствием следующего факта, установленного в работе автора [3]: если λ_0 является точкой непрерывного спектра некоторого самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H и если уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ разрешимо, то $u = \lim\limits_{\tau\to0} R_{\lambda_0+i\tau}f$ $(\operatorname{Im}\tau = 0)$. Поэтому, если предположить, что $Av + S^2v - \lambda^*v = 0$, $v \neq 0$, то $v = -\lim\limits_{\tau\to0} R_{\lambda^*+i\tau}S^2v$ или $Sv + \lim\limits_{\tau\to0} SR_{\lambda^*+i\tau}S \times Sv = 0$, причем, очевидно, $Sv \neq 0$, т. е. действительно $(E + \Phi_{t^*})Sv = 0$, $Sv \neq 0$. Этим лемма полностью доказана.

Приведем также следующую теорему, на которую будем опираться ниже и доказательство которой дано в работе автора [4].

Теорема A. *Пусть A и V—замкнутые линейные операторы (вообще говоря, несамосопряженные и неограниченные) с плотными областями определения в гильбертовом пространстве H, а U—ограниченный линейный оператор (несамосопряженный), причем $D_A \subseteq D_V$. Тогда:*

1) *если λ_0 является регулярной точкой оператора A и*

$$\|VR_{\lambda_0}U\| < 1, \tag{1.13}$$

где R_λ—резольвента оператора A, то оператор $T = A + UV$ замкнут и λ_0 является его регулярной точкой;

2) *если точка спектра λ_0 оператора A не является собственным значением и если существует такая последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$, что*

$$\sup \| (\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n} \| < \infty, \tag{1.14}$$

$$\lim \inf \| V R_{\lambda_n} U \| = q < 1, \tag{1.15}$$

то оператор $T = A + UV$ *замкнут и* λ_0 *принадлежит его спектру, не являясь собственным значением;*

3) *если* $(A + UV)^* = A^* + (UV)^*$ *и выполнены условия* (1.14) *и* (1.15), *то точка* λ_0 *непрерывного спектра оператора* A *остается точкой непрерывного спектра оператора* $T = A + UV$.

Теперь мы в состоянии пояснить идею предлагаемого в статье способа изучения спектра некоторых возмущений самосопряженных операторов. С этой целью приведем, основанное на леммах 1, 2 и теореме А, доказательство следующего предложения, принадлежащего, в основном, М. М. Гехтману [5].

Теорема. *Если комплексноэначная функция* $q(x)$ *удовлетворяет оценке*

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad C = \text{const} \tag{1.16}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, *то собственные значения оператора* $T = A + S^2$, *где* $A = (-1)^n \dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}$ *в* $L_2(-\infty, \infty)$, *а* S *есть оператор умножения на функцию* $\sqrt{q(x)}$, *могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса*

$$R = \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|\, dx \right)^{\frac{2n}{2n-1}} \tag{1.17}$$

нет собственных значений оператора T.

Доказательство. В самом деле, ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_λ оператора A, как известно, записывается в виде

$$K(x, y, \lambda) = \frac{\pi i}{nt^{2n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} e^{ir\frac{\pi}{n}} e^{ite^{ir\frac{\pi}{n}} |x-y|},$$

где положено $\lambda = t^{2n}$, $0 < \arg t < \dfrac{\pi}{n}$. В силу того, что $\operatorname{Im}\left(te^{ir\frac{\pi}{n}} \right) > 0$ из этой формулы и условия (1.16) сразу следует, что вся положительная полуось принадлежит спектру оператора T (в силу п. а) леммы 1.1); что вне положительной полуоси оператор T может иметь лишь собственные значения (в силу п. б) леммы 1.1), не имеющие предельных точек вне этой полуоси (в силу п. в) леммы 1.1). Кроме того, из теоремы А следует, что вне круга радиуса R, определяемого формулой (1.17) (в этом случае самая грубая и очевидная оценка показывает, что все условия теоремы А выполнены), нет собственных значений оператора T. Наконец, лемма 1.2 показывает, что ни одна точка положительной полуоси (включая наиболее „опасную“ точку $\lambda = 0$) не является предельной для собственных значений (с учетом и положительных собственных значений!) оператора T. В самом деле, из очевидного тождества

$$K(x, y, \lambda) = \frac{\pi i}{n} \frac{\sum_{r=0}^{n-1} e^{ir\frac{\pi}{n}} \left\{ e^{ite^{ir\frac{\pi}{n}}|x-y|} - \sum_{k=0}^{2n-2} \left(ite^{ir\frac{\pi}{n}}|x-y|\right)^k \right\}}{t^{2n-1}} -$$

$$- \frac{2\pi i}{n} \sum_{n=0}^{n-1} \frac{|x-y|^{2p}}{1 - e^{i(2p+1)\frac{\pi}{n}}} \frac{1}{t^{2(n-p)-1}},$$

первый член которого аналитически зависит от t, а второй член содержит лишь четные степени $|x-y|$, немедленно следует, что выполняются условия леммы 1.2, что и доказывает теорему.

§ 2. О спектре некоторых несамосопряженных дифференциальных операторов

В этом параграфе будет доказано предложение, аналогичное теореме, приведенной в конце § 1, для случая дифференциальных операторов более общего вида.

Мы начнем со случая, когда самосопряженный оператор A, рассматриваемый в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, имеет вид

$$A = P\left(i \frac{d}{dx}\right), \tag{2.1}$$

где $P(t)$ — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами, точнее, A есть замыкание оператора $P\left(i \frac{d}{dx}\right)$, рассматриваемого на многообразии всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций, по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$ (как известно, это замыкание существует и является самосопряженным оператором).

Условимся далее резольвенту этого оператора обозначать через

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1},$$

а оператор Фурье-Планшереля — через

$$Vu = \underset{N\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{isx} u(s)\, ds, \quad u \in L_2(-\infty, \infty).$$

Наконец, введем в рассмотрение оператор

$$T_\lambda = qR_\lambda q, \tag{2.2}$$

сводящийся к тому, что элементы пространства $L_2(-\infty, \infty)$ умножаются сперва на функцию $q(x)$, к полученному произведению применяется оператор R_λ и результат снова умножается на $q(x)$.

Нетрудно видеть, что если $q(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и ограничен, то при всех $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$ и всех λ, не принадлежащих спектру оператора A,

$$(VT_\lambda V^{-1}u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\, dt, \tag{2.3}$$

где

$$M_{u,v}(t) = V^{-1}(qV\bar{v}) \cdot V(qV^{-1}u). \tag{2.4}$$

Для доказательства будем сперва считать функцию $q(x)$ финитной и заметим, что для любой функции $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$

$$V(qu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s-t)\, \tilde{u}(t)\, dt, \tag{2.5}$$

где $\tilde{q} = Vq$, $\tilde{u} = Vu$. Условившись далее свертку двух функций обозначать звездочкой, будем иметь, в силу (2.5),

$$V(qR_\lambda q)\, V^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, V_q * VR_\lambda qV^{-1}u =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, Vq * \frac{VqV^{-1}u}{P(x)-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, V_q * \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{Vq * u}{P(x)-\lambda}\right\}$$

или

$$VT_\lambda V^{-1}u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(t-s)\, u(s)\, ds \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{q}(x-t)\, \tilde{q}(t-s)}{P(t)-\lambda}\, dt \right\} u(s)\, ds.$$

Будем считать, что u и v—финитные функции. Тогда

$$(VT_\lambda V^{-1}u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(x-t)\, \overline{v(x)}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(t-s)\, u(s)\, ds}{P(t)-\lambda}\, dt,$$

т. е. формулы (2.3) и (2.4) доказаны при финитных u, v и q.

Заметим теперь, что если при некоторой ограниченной измеримой функции $q(x)$ формулы (2.3) и (2.4) справедливы для всех $u \in G_1$ и всех $v \in G_2$, где G_1 и G_2—плотные многообразия в $L_2(-\infty, \infty)$, то они остаются справедливыми и при любых $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| V^{-1}(qV\bar{v}) \cdot V(qV^{-1}u) - V^{-1}(qV\bar{v}_k) \cdot V(qV^{-1}u_k) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \|q V\bar{v}\| \cdot \|q V^{-1}(u-u_k)\| + \|q V^{-1} u_k\| \cdot \|q V(v-v_k)\|,$$

и достаточно в обеих частях (2.3) перейти к пределу при $u_k \to u$, $v_k \to v$. Пусть теперь $q(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и ограничена, G_1—совокупность тех $u \in L_2(-\infty, \infty)$, для которых $V^{-1}u$—ограниченная функция, а G_2—совокупность тех $v \in L_2(-\infty, \infty)$, для которых $V\bar{v}$ ограничена. Если $q_k(x)$ финитна, $u \in G_1$, $v \in G_2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} | V^{-1}(q V\bar{v}) \cdot V(q V^{-1}u) - V^{-1}(q_k V\bar{v}) \cdot V(q_k V^{-1}u) | \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|q V\bar{v}\| \cdot \|(q-q_k) V^{-1}u\| + \|q_k V^{-1}u\| \cdot \|(q-q_k) V\bar{v}\|,$$

и, переходя к пределу в обеих частях (2.3) при $q_k \to q$ (на этот раз оператор T_λ непрерывно зависит от q), находим, учитывая предыдущее замечание (G_1 и G_2, очевидно, плотны в $L_2(-\infty, \infty)$), что формулы (2.3) и (2.4) справедливы при любой ограниченной $q(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и всех $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, что и утверждалось.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей элементарной леммой.

Лемма 2.1. *Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ измеримая комплекснозначная функция $q(s)$ допускает оценку*

$$|q(s)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|s|}, \quad C = \text{const}. \tag{2.6}$$

Тогда при любых заданных $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$ интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s) e^{is(t-x)} ds \right) u(x) \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s) e^{is(x-t)} ds \right) \overline{v(x)} \, dx \tag{2.7}$$

аналитически зависят от t в полосе $|\mathrm{Im}\, t| < \varepsilon$, причем производные их можно находить путем формального дифференцирования под знаком внутреннего интеграла. Далее, если последовательности $u_k \in L_2(-\infty, \infty)$ и $v_k \in L_2(-\infty, \infty)$ слабо сходятся, соответственно, к $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, то интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s) e^{is(t-x)} ds \right) u_k(x) \, dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s) e^{is(x-t)} ds \right) \overline{v_k(x)} \, dx,$$

рассматриваемые как функции от t, ограниченно сходятся во всякой внутренней полосе $|\mathrm{Im}\, t| \leqslant \tau < \varepsilon$ к интегралам (2.7).

Доказательство. Ограничимся случаем первого из интегралов (2.7) и введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(s) e^{is(t-x)} ds. \tag{2.7'}$$

Выберем далее числа ε_1 и δ так, чтобы

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \varepsilon_1,$$

где через ε обозначено число, входящее в условие (2.6) леммы. Если $|\operatorname{Im} t| < \delta$, то из условия (2.6) следует существование такой константы C_1, что

$$isq(s)e^{ist}| \leqslant C_1 e^{-(\varepsilon_1-\delta)|s|} \quad (|\operatorname{Im} t| < \delta). \tag{2.8}$$

Пусть далее

$$0 < \delta_0 < \varepsilon_1 - \delta.$$

Тогда, очевидно, существует такая константа C_2, что

$$\left| isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}\right| \leqslant C_2 e^{-(\varepsilon_1-\delta-\delta_0)|s|} \quad (|\operatorname{Im} t| < \delta, \quad |\Delta t| < \delta_0). \tag{2.9}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi_N(s) = \begin{cases} 1, & s \in [-N, N], \\ 0, & s \overline{\in} [-N, N]. \end{cases}$$

Пусть ε_0—произвольное положительное число. В силу (2.8) и (2.9) можно выбрать N столь большим, чтобы

$$\|(1-\chi_N(s))\, isq(s)e^{ist}\| < \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}},$$

$$(|\operatorname{Im} t| < \delta, \quad |\Delta t| < \delta_0)$$

$$\left\|(1-\chi_N(s))\, isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}\right\| < \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому, в силу изометричности оператора Фурье, будем иметь

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} (1-\chi_N(s))\, isq(s)e^{ist}e^{-isx}ds\right\| < \varepsilon_0,$$

$$(|\operatorname{Im} t| < \delta, \quad |\Delta t| < \delta_0) \tag{2.10}$$

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} (1-\chi_N(s))\, isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}e^{-isx}ds\right\| < \varepsilon_0.$$

С другой стороны, опять-таки в силу изометричности оператора Фурье, имеем, очевидно,

$$\underset{\Delta t\to 0}{\text{l. i. m.}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_N(s)\, isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}e^{-isx}ds = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_N(s)\, isq(s)e^{ist}e^{-isx}ds.$$

Отсюда и из (2.10) следует, что при заданном $\varepsilon_0 > 0$ существует такое δ^* ($\delta^* \leqslant \delta_0$), что при $|\Delta t| < \delta^*$ имеем

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} \frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t} e^{-isx} ds - \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} e^{-isx} ds \right\| < 3\varepsilon_0.$$

Но в силу обозначения (2.7)

$$\frac{\Phi(x, t+\Delta t) - \Phi(x, t)}{\Delta t} = \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} \frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t} e^{-isx} ds,$$

и предыдущее неравенство показывает, что

$$\underset{\Delta t \to 0}{\text{l. i. m.}} \frac{\Phi(x, t+\Delta t) - \Phi(x, t)}{\Delta t} = \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} e^{-isx} ds. \quad (|\operatorname{Im} t| < \delta).$$

Из этого предельного соотношения и следует, как легко видеть, первая часть леммы.

Перейдем к доказательству второй части леммы. Если $|\operatorname{Im} t| \leqslant \leqslant \tau < \varepsilon$, то из условия (2.6) вытекает оценка

$$\| q(s)\, e^{ist} \| \leqslant C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \tau^2}}.$$

Поэтому, в силу изометричности оператора Фурье,

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} q(s)\, e^{is(t-x)} ds \right\| \leqslant \sqrt{2\pi}\, C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \tau^2}}$$

и, следовательно,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} q(s)\, e^{is(t-x)} ds \right\} u(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{2\pi}\, C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \tau^2}} \| u \|.$$

Отсюда и следует вторая часть леммы, ибо всякая слабо сходящаяся последовательность u_k ограничена.

Чтобы сформулировать следующую теорему удобно ввести в рассмотрение оператор

$$T = A + S^2, \tag{2.11}$$

где оператор A определен формулой (2.1), а S есть оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$ ($q(x)$ определена на всей вещественной оси и ограничена).

Теорема 2.1. *Если комплекснозначная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (2.6), то точка λ_0 спектра оператора A, определенного формулой (2.1), не может быть предельной точкой собственных значений (включая и вещественные) оператора T, определенного формулой (2.11).*

Доказательство. Пусть λ_0 принадлежит спектру оператора A, т. е. пусть при некотором вещественном $s = s^*$ имеем $P(s^*) - \lambda_0 = 0$. Пусть $s_1, s_2, \cdots, s_r$ — все вещественные корни уравнения $P(s) - \lambda_0 = 0$, расположенные в порядке возрастания, а $\mu_1, \cdots, \mu_r$ — их кратности. При заданном $\sigma > 0$ (σ будет выбрано надлежащим образом позже) положим

$$K_0^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{-\infty}^{s_1-\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda} dt, \qquad K_r^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{s_r+\sigma}^{\infty} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda} dt,$$

$$K_j^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{s_j+\sigma}^{s_{j+1}-\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda} dt \qquad (j = 1, 2, \cdots, r-1), \tag{2.12}$$

где $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, а $M_{u,v}(t)$ определено формулой (2.4). Введем далее обозначение

$$\Gamma_l^\sigma = \{z: \ |z - s_l| = \sigma; \quad \pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi\} \tag{2.13}$$

и положим

$$K^\sigma(u, v, \lambda) = \sum_{j=0}^{r} K_j^\sigma(u, v, \lambda) + \sum_{j=1}^{r} \int_{\Gamma_j^\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda} dt, \tag{2.14}$$

где контур Γ_j^σ следует проходить в направлении от $s_j - \sigma$ к $s_j + \sigma$. Наконец, обозначим через S_j^σ замкнутый контур, проходимый против часовой стрелки и состоящий из дуги Γ_j^σ и отрезка $[s_j - \sigma, s_j + \sigma]$. Пусть

$$I_j^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{S_j^\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda} dt. \tag{2.15}$$

Ясно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda} dt = K^\sigma(u, v, \lambda) - \sum_{j=1}^{r} I_j^\sigma(u, v, \lambda). \tag{2.16}$$

Рассмотрим функцию $I_j^\sigma(u, v, \lambda)$. По условию s_j является корнем кратности μ_j уравнения $P(s) - \lambda_0 = 0$. Так как производная левой части уравнения $P(s) - \lambda = 0$ по λ отлична от нуля, то как известно ([6], стр. 30), если положить

$$\lambda = \lambda_0 + z^{\mu_j}, \tag{2.17}$$

тогда при достаточно малых по модулю z все корни уравнения $P(s) - \lambda = 0$, расположенные в окрестности точки s_j, можно получить по формуле

$$w_j(z) = s_j + b_j^1 z + b_j^2 z^2 + \cdots, \tag{2.18}$$

($w_j(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$), подставляя в нее все те z, полученные при однократном обходе начала координат, при которых $\lambda_0 + z^{\mu_j} = \lambda$. Будем в дальнейшем считать, что λ достаточно близки к λ_0 и лежат в верхней полуплоскости. Очевидно, таким λ соответствуют z, удовлетворяющие любому из следующих условий:

$$\frac{2\pi k}{\mu_j} < \arg z < \frac{2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\mu_j} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, \mu_j - 1).$$

Таким образом, если при заданном λ обозначить через z то значение, которое удовлетворяет (2.17) и условию

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{\mu_j}, \tag{2.19}$$

то все остальные z имеют вид

$$z, \ ze^{i\frac{2\pi}{\mu_j}}, \cdots, \ ze^{i\frac{2\pi(\mu_j - 1)}{\mu_j}}. \tag{2.20}$$

Нас, однако, будут интересовать лишь те значения из ряда (2.20), при которых функция (2.18) принимает значения из нижней полуплоскости. В этой связи заметим следующее. Легко видеть, что всякий угол $\frac{2\pi k}{\mu_j} < \arg z < \frac{2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\mu_j}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, \mu_j - 1)$ целиком расположен или в верхней или в нижней полуплоскости. Отсюда следует, что каждая из функций

$$w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, \mu_j - 1)$$

принимает значения, лежащие целиком (при всех z, удовлетворяющих условию (2.19)) в верхней или целиком в нижней полуплоскости. В самом деле, если при $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{\mu_j}$ и $0 < \arg z_2 < \frac{\pi}{\mu_j}$ точки $w_j\left(z_1 e^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right)$ и $w_j\left(z_2 e^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right)$ лежат в разных полуплоскостях, то в угле (2.19) найдется такая точка z_3, что $w_j\left(z_3 e^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right)$ лежит на вещественной оси, что невозможно, потому что при вещественном w_j величина $P(w_j)$ также вещественна и не может совпадать с невещественным числом $\lambda = \lambda_0 + z_3^{\mu_j}$.

Обозначим теперь через $k_{j,m}$ те значения $k\,(m=1, 2, \cdots, l_j)$, при которых значения

$$w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)$$

лежат в нижней полуплоскости, если z удовлетворяет условию (2.19). Очевидно, что если z достаточно малы, то все $w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)$ различны и поэтому, считая

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{\mu_j}, \quad |z| < \sigma, \tag{2.21}$$

и определяя λ по формуле (2.17), на основании леммы 2.1, будем иметь

$$I_j^a(u, v, \lambda) = 2\pi i \sum_{m=1}^{l_j} \frac{M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}. \tag{2.22}$$

Введем обозначение (опуская зависимость от u и v):

$$M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\} = A_{j,m}(z)\cdot B_{j,m}(z) = M_{j,m}(z), \tag{2.23}$$

где

$$A_{j,m}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)\, e^{-isx} e^{isw_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)} ds\right) u(x)\, dx, \tag{2.24}$$

$$B_{j,m}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s) e^{isx} e^{-isw_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)} ds\right) \overline{v(x)}\, dx. \tag{2.25}$$

Заметим далее что, как нетрудно видеть,

$$(e^{\varphi(z)})^{(n)} = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+qm_q=n} \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_q!}\left(\frac{\varphi'(z)}{1!}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\varphi^{(q)}(z)}{q!}\right)^{m_q} e^{\varphi(z)}, \tag{2.26}$$

где $m_1 m_3 \cdots m_q > 0$. Положим теперь

$$2\pi e^{i(x-s_j)s}\cdot\alpha_r(s,\ x;\ j,\ m)=$$

$$=\sum_{m_1+\cdots+qm_q=r}\frac{r!}{m_1!m_2!\cdots m_q!}(is)^{m_1+\cdots+m_q}\left(\frac{w_j'(0)}{1!}\right)^{m_1}\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{w_j^{(q)}(0)}{q!}\right)^{m_q}e^{i\frac{2\pi r\cdot k_{j,m}}{\mu_j}}. \tag{2.27}$$

Из (2.26) и (2.27) следует, что

$$A_{j,m}^{(r)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\cdot\alpha_r(s,\ x;\ j,\ m)\,ds\right)u(x)\,dx, \tag{2.28}$$

$$B_{j,m}^{(r)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\,\alpha_r(-s,\ x;\ j,\ m)\,ds\right)\overline{v(x)}dx. \tag{2.29}$$

Далее, в силу (2.23),

$$\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_{j,m}^{(l)}(0)}{l!}z^l=\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\sum_{p=0}^{l}\frac{z^l}{p!\,(l-p)!}A_{j,m}^{(l-p)}(0)\cdot B_{j,m}^{(p)}(0).$$

Легко видеть, что эта формула может быть записана в виде

$$\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_{j,m}^{(l)}(0)}{l!}z^l=\sum_{p=0}^{\mu_j-2}\left\{\sum_{l=p}^{\mu_j-2}\frac{z^l}{p!\,(l-p)!}A_{j,m}^{(l-p)}(0)\right\}\cdot B_{j,m}^{(p)}(0). \tag{2.30}$$

Наконец, введя обозначения

$$\xi_{r,j,m}(x)=\frac{1}{r!}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\,\alpha_r(s,\ x;\ j,\ m)\,ds, \tag{2.31}$$

$$\eta_{r,j,m}(x)=\frac{1}{r!}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\,\alpha_r(-s,\ x;\ j,\ m)\,ds, \tag{2.32}$$

перепишем (2.30) в следующей форме:

$$\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_{j,m}^{(l)}(0)}{l!}z^l=\sum_{p=0}^{\mu_j-2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{l=p}^{\mu_j-2}\xi_{l-p,j,m}(x)\cdot z^l\right\}u(x)\,dx\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\eta_{p,j,m}(x)\cdot\overline{v(x)}\,dx. \tag{2.33}$$

Заметим, далее, что $z=0$ является нулем порядка μ_j-1 как для функции

$$M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}-\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_j^{(l)}(0)}{l!}z^l, \tag{2.34}$$

так и для функции

$$P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}. \tag{2.35}$$

Последнее следует из того, что $w_j(0)=s_j$, s_j — нуль порядка μ_j для $P(t)$ и в формуле (2.18) $b_j^1\neq 0$ ([6], стр. 30).

Таким образом, полагая

$$I_j^o(u, v, \lambda)=R_j(u, v; \lambda_0+z^{\mu_j})+P_j(u, v; \lambda_0+z^{\mu_j}), \tag{2.36}$$

где

$$R_j(u, v; \lambda_0+z^{\mu_j})=$$

$$=2\pi i\sum_{m=1}^{l_j}\frac{M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}-$$

$$-2\pi i\sum_{m=1}^{l_j}\frac{\sum\limits_{p=0}^{\mu_j-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum\limits_{l=p}^{\mu_j-2}\xi_{l-p,j;m}(x)\cdot z^l\right\}u(x)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_{p,j,m}(x)\overline{v(x)}\,dx}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}} \tag{2.37}$$

и

$$P_j(u, v, \lambda_0+z^{\mu_j})=$$

$$=2\pi i\sum_{m=1}^{l_j}\frac{\sum\limits_{p=0}^{\mu_j-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum\limits_{l=p}^{\mu_j-2}\xi_{l-p,j,m}(x)\cdot z^l\right\}u(x)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_{p,j,m}(x)\overline{v(x)}\,dx}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}, \tag{2.38}$$

получаем разложение $I_j^o(u, v, \lambda)$ в сумму двух слагаемых, первое из которых $R_j(u, v; \lambda_0+z^{\mu_j})$ является регулярной функцией от z в окрестности начала координат, а второе: $P(u, v; \lambda_0+z^{\mu_j})$ имеет полюс при $z=0$. Теперь мы перейдем от переменной z к новой переменной ζ следующим образом. Пусть

$$0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{\mu_1 \cdots \mu_r} \tag{2.39}$$

Если обозначить

$$z = \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_{j-1} \mu_{j+1} \cdots \mu_r}, \tag{2.40}$$

то

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{\mu_j} \tag{2.41}$$

Поэтому соотношение (2.17) принимает вид

$$\lambda = \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}, \tag{2.42}$$

а вместо (2.36) получаем разложение

$$\Gamma_j(u,\ v;\ \lambda) = R_j(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) + P_j(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}), \tag{2.43}$$

причем из (2.37), (2.38) и (2.40) вытекает, что первое слагаемое аналитически продолжается по ζ из области угла (2.39) в полную окрестность начала координат, а второе слагаемое в начале координат может иметь лишь полюс. Таким образом, при всех λ из верхней полуплоскости, достаточно близких к точке $\lambda = \lambda_0$, формула (2.16) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t) - \lambda}\, dt = K^a(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) - \sum_{j=1}^{r} R_j(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{r} P_j(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}). \tag{2.44}$$

Заметим, что здесь и первое слагаемое K^a допускает аналитическое по ζ продолжение в полную окрестность точки $\zeta = 0$, как это легко следует из (2.12) и (2.14). Наконец, из (2.12), (2.14), (2.37), (2.38), (2.23)—(2.25) и леммы 2.1 следует, что билинейные формы $K^a(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r})$ и $R_j(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r})$ обладают следующим свойством: если $u_k \xrightarrow{\text{сл.}} u$, $v_k \xrightarrow{\text{сл.}} v$, то

$$\lim_{k \to \infty} R_j(u_k,\ v_k;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) = R_j(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}),$$

$$\lim_{k \to \infty} K^a(u_k,\ v_k;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) = K^a(u,\ v;\ \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}).$$

Следовательно, порождающие их операторы вполне непрерывны. Таким образом, выполняется условие (1.1) леммы 1.2. Точно таким же образом можно удовлетворить и условию (1.2) леммы 1.2. Для этого надо выбрать λ из нижней полуплоскости и контуры интегрирования в (2.14) и (2.15) брать в верхней полуплоскости. Применение леммы 1.2 доказывает теорему.

Чтобы сформулировать следующую теорему, введем обозначения. Пусть числа K и R определяются следующим образом:

$$|P'(t)| > n\|q\|^2, \quad (|t| > K), \tag{2.45}$$

где n — степень полинома $P(t)$; и

$$|(P(t) - \lambda| > 0, \quad (|\lambda| > R, \ |t| \leqslant K), \tag{2.46}$$

где K определено условием (2.45).

Теорема 2.2. *Если комплекснозначная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (2.6), то все точки спектра оператора A, определенного формулой (2.1), принадлежат спектру оператора $T = A + S^2$, определенного формулой (2.11), причем оператор T может иметь лишь конечное число собственных значений (включая и вещественные). Вне круга радиуса R, подчиненного условию (2.46), оператор T не имеет собственных значений.*

Доказательство. Из (2.3) и (2.4), т. е. из

$$M_{u,v}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(x-t)}\,ds\right)\overline{v(x)}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(t-x)}\,ds\right)u(x)\,dx \tag{2.47}$$

следует, что оператор $VT_\lambda V^{-1}$ (T_λ определено формулой (2.2), а V — преобразование Фурье-Планшереля), а следовательно и оператор T_λ, вполне непрерывен (на основании второй части леммы 2.1). Ясно также, что при невещественных λ этот оператор аналитически зависит от λ. Поэтому, согласно теореме 2.1 и лемме 1.1, достаточно доказать лишь последнее утверждение теоремы. С этой целью оценим норму оператора $VT_\lambda V^{-1}$. Из (2.3) и (2.47) без труда получаем, что

$$(VT_\lambda V^{-1}u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\tilde{q}(t-s)\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda}\,dt\right\}u(s)\,\overline{v(x)}\,ds\,dx,$$

где $\tilde{q}(t)$ обозначает преобразование Фурье функции $q(t)$. Отсюда

$$|(VT_\lambda V^{-1}u, v)|^2 \leqslant \left(\frac{\|u\|\cdot\|v\|}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{q}(t-s)\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2 ds\,dx.$$

Пользуясь равенством Парсеваля и теоремой о преобразовании Фурье свертки двух функций, получаем следующую цепь равенств:

$$\|VT_\lambda V^{-1}\|^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{q}(t-s)\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda}\,dt\right\}\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\tilde{q}(t-s)}\,\overline{\tilde{q}(x-t)}}{\overline{P(t)}-\overline{\lambda}}\,dt\right\}ds\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{q}(t-s)\tilde{q}(x-t)\overline{\tilde{q}(\xi-s)}\overline{\tilde{q}(x-\xi)}}{(P(t)-\lambda)(\overline{P(\xi)}-\bar{\lambda})}\,dt\,d\xi\right\}ds\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(t-s)\overline{\tilde{q}(\xi-s)}\,ds\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(x-t)\overline{\tilde{q}(x-\xi)}\,dx}{(P(t)-\lambda)(\overline{P(\xi)}-\bar{\lambda})}\,dt\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|q(\eta)|^2e^{i(t-\xi,\,\eta)}d\eta\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}|q(\eta)|^2e^{i(\xi-t,\,\eta)}d\eta}{(P(t)-\lambda)(\overline{P(\xi)}-\bar{\lambda})}\,dt\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)q(-\zeta)|^2d\zeta\right\}e^{i(\xi-t,\,\eta)}d\eta}{(P(t)-\lambda)(\overline{P(\xi)}-\bar{\lambda})}\,dt\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)q(-\zeta)|^2d\zeta\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}e^{i\xi\eta}}{(P(t)-\lambda)(\overline{P(\xi)}-\bar{\lambda})}\,d\xi\,dt\right\}d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)q(-\zeta)|^2d\zeta\cdot\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2\right\}d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\sup_{\eta}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)q(-\zeta)|^2\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\|q\|^4\cdot\sup_{\eta}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2.$$

Таким образом,

$$\|VT_\lambda V^{-1}\| \leqslant \frac{\|q\|^2}{2\pi}\sup_{\eta}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|. \tag{2.48}$$

Заметим далее, что если $\eta > 0$ и λ невещественно, то, пользуясь теорией вычетов и леммой Жордана, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \frac{e^{-it_k\eta}}{P'(t_k)},$$

где t_k — корни уравнения $P(t)-\lambda=0$, расположенные в нижней полуплоскости. Аналогичная формула справедлива и при $\eta<0$, только суммирование распространяется на те корни уравнения $P(t)-\lambda=0$, которые лежат в верхней полуплоскости (в силу (2.45) и (2.46) все указанные корни простые при $|\lambda|>R$). Ясно, что при $|\lambda|>R$ все корни уравнения $P(t)-\lambda=0$ лежат вне круга радиуса K, а поэтому $|P'(t_k)|>n\|q\|^2$. Отсюда следует, что при $|\lambda|>R$ имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\eta}\,dt}{P(t)-\lambda}\right| < \frac{2\pi n}{n\|q\|^2} = \frac{2\pi}{\|q\|^2},$$

и на основании (2.48)

$$\|T_\lambda\| = \|VT_\lambda V^{-1}\| < 1, \quad |\lambda|>R.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой А из § 1.

Перейдем, наконец, к изучению спектра несамосопряженных возмущений оператора

$$A=(-\Delta)^k \tag{2.49}$$

в $L_2(E_n)$, где Δ — оператор Лапласа, E_n — евклидово пространство нечетной размерности $n\geqslant 3$, k — целое положительное число, причем $2k>n$. Как известно, оператор $A=(-\Delta)^k$ — самосопряженный и его спектр непрерывен и совпадает с положительной полуосью. Более того, как это следует из вычислений, приведенных в работе автора [4], ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_λ

$$R_\lambda f = \int_{E_n} K(x, y, \lambda) f(y)\,dy, \qquad f\in L_2(E_n), \tag{2.50}$$

этого оператора имеет вид

$$K(x, y, \lambda) = \frac{2i\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{m=0}^{k-1} e^{imn\frac{\pi}{k}}\,\Phi\left(te^{im\frac{\pi}{k}},\ x-y\right), \tag{2.51}$$

где положено $x=(x_1, x_2,\cdots, x_n)$,

$$\lambda = t^{2k}, \qquad 0<\arg t<\frac{\pi}{k} \tag{2.52}$$

и

$$\Phi(r, x) = \int_0^1 e^{ir|x|s}(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\,ds, \tag{2.53}$$

причем $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Справедлива следующая

Теорема 2.3. *Если размерность n пространства E_n нечетна, причем $n \geqslant 3$ и $2k > n$, то собственные значения оператора $T = A + S^2$ (включая и положительные), где A определен формулой (2.49), а S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$, удовлетворяющую условию*

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad C = \mathrm{const}, \tag{2.54}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса

$$R = \left\{ \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int\limits_{E_n} |q(x)|\, dx \right\}^{\frac{2k}{2k-n}} \tag{2.55}$$

собственных значений нет, и все остальные точки положительной полуоси принадлежат непрерывному спектру оператора T.

Доказательство. В самом деле, поскольку $\mathrm{Im}\left(te^{im\frac{\pi}{k}}\right) > 0$, то формулы (2.50)—(2.53), а также условие (2.54) показывают, что оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен при невещественных λ. Поэтому из леммы 1.1 вытекает, что вся положительная полуось принадлежит спектру оператора T и вне ее этот оператор может иметь лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне положительной полуоси. Из теоремы А § 1 вытекает далее, что вне круга радиуса (2.55) нет собственных значений оператора T, поскольку, как легко видеть,

$$\| SR_\lambda S \| \leqslant \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{t^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int\limits_{E_n} |q(x)|\, dx.$$

Остается показать, что ни одна точка положительной полуоси не может быть предельной для собственных значений (с учетом и положительных собственных значений!), т. е. что мы находимся в условиях применимости леммы 1.2. С этой целью введем обозначения (в предположении $2k - n > 0$)

$$\psi(r, x) = \int\limits_0^1 \left\{ e^{ir|x|s} - \sum_{l=0}^{2k-n-1} \frac{(ir|x|s)^l}{l!} \right\} (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds$$

и

$$a_l = \frac{1}{l!} \int\limits_0^1 s^l (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds.$$

Таким образом,

$$\Phi(r, x) = \sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l (ir|x|)^l + \psi(r, x).$$

Положим, наконец,

$$\Psi(t, x) = i\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\sum_{m=0}^{k-1}\psi\left(te^{im\frac{\pi}{k}}, x\right)e^{imn\frac{\pi}{k}}.$$

Ясно, что при всех x функция $\Psi(t, x)$ — целая по t и что ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты оператора A представляется в виде

$$K(x, y, \lambda) = i\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l(i|x-y|)^l t^l e^{im\frac{l+n}{k}\pi} + \Psi(t, x-y).$$

С другой стороны,

$$\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l(i|x-y|)^l t^l e^{im\frac{l+n}{k}\pi} = \sum_{l=0}^{2k-n-1}\frac{1-e^{i(l+n)\pi}}{1-e^{i\frac{l+n}{k}\pi}} a_l(i|x-y|)^l t^l.$$

Поскольку $l \leqslant 2k-n-1$, то $\frac{l+n}{2} \leqslant 2-\frac{1}{k}$ и, следовательно, $1-e^{i\frac{l+n}{k}\pi} \neq 0$. Но при четных l имеем, $1-e^{i(l+n)\pi} = 2$, а при нечетных l получаем $1-e^{i(l+n)\pi} = 0$. Поэтому

$$\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l(i|x-y|)^l t^l e^{im\frac{n+l}{k}\pi} = -2\sum_{p=0}^{k-\frac{n+1}{2}}\frac{a_{2p}}{1-e^{i\frac{2p+n}{k}\pi}}|x-y|^{2p} t^{2p}.$$

Окончательно имеем

$$K(x, y, \lambda) = -i\frac{4\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\sum_{p=0}^{k-\frac{n+1}{2}}\frac{a_{2p}}{1-e^{i\frac{2p+n}{k}\pi}}|x-y|^{2p} t^{2p} + \Psi(t, x-y).$$

Поскольку первый член правой части содержит лишь четные степени $|x-y|$, а второй член $\Psi(t, x-y)$ — целая функция по t, то условия леммы 1.2 выполняются, что и доказывает теорему.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР и
Ереванский государственный
университет.

Поступило 5.III.1966

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՈՐՈՇ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՈՉ-ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԳՐԳՌՈՒՄՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է անընդհատ սպեկտր ունեցող ոչ-ինքնահամալուծ օպերատորների մի դասի «փոքր» գրգռումների սպեկտրի ուսումնասիրման մի պարզ եղանակ։

Այդ եղանակը լուսաբանվում է 1) լրիվ առանցքի վրա տրված, իրական գործակիցներով, դիֆերենցման օպերատորից կամայական $P\left(i\frac{d}{dx}\right)$ *բազմանդամի օրինակով, ինչպես նաև 2) կենտ չափանի* ($n \geqslant 3$) *էվկլիդյան տարածության մեջ տրված* $(-\Delta)^k$ ($2k > n$) *պոլիհարմոնիկ օպերատորի օրինակով։*

Հիմնական արդյունքը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. այդ օպերատորները որոշ բազմապատկման օպերատորներով (անվերջում էքսպոնենցիալ նվազման կարգ ունեցող կոմպլեքսարժեք ֆունկցիաներով) գրգռելիս կարող են առաջ գալ միայն վերջավոր թվով սեփական արժեքներ։

H. M. MARTIROSIAN

ON THE SPECTRUM OF NON-SELF-ADJOINT PERTURBATIONS OF SOME SELF-ADJOINT DIFFERENTIAL OPERATORS

Summary

The paper offers a simple way for studying the spectrum of „small“ perturbations of a class of non-self-adjoint operators with continuous spectra.

This is well illustrated 1) in the case of an arbitrary polynomial $P\left(i\frac{d}{dx}\right)$ of differentiation operator with real coefficients and 2) in the case of the polyharmonic operator $(-\Delta)^k$ given in an odd-dimensional $(3 \leqslant n < 2k)$ Eucledean space.

The main result may be worded as follows: when perturbing these operators with a multiplication operator (by a complex-valued function exponentially decreasing at infinity) only a finite number of eigenvalues may arise.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. М. Мартиросян.* О спектре некоторых несамосопряженных операторов, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. науки, XIV, № 5, 1961.

2. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, XII, вып. 4 (76), 1957.
3. *Р. М. Мартиросян*. О спектре несамосопряженных возмущений бигармонического оператора в трехмерном пространстве, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. науки, XVI, № 4, 1963.
4. *Р. М. Мартиросян*. Об инвариантности спектра малых возмущений полигармонического оператора, Изв. АН СССР, серия матем., 28, I, 1964.
5. *М. М. Гехтман*, О спектре несамосопряженного дифференциального оператора четного порядка, ДАН СССР, 150, № 4, 1963.
6. *Р. Неванлинна*. Униформизация, М., 1955.