

Н. У. АРАКЕЛЯН

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, РАВНОМЕРНО УБЫВАЮЩИХ В УГЛЕ

Настоящая работа посвящена построению целых функций, равномерно и в определенном смысле максимально быстро убывающих в угле и имеющих минимальный рост в плоскости. Откладывая постановку задачи и формулировку полученных результатов до параграфа 2 отметим только, что эти целые функции имеют важные применения в теории приближений и в других вопросах теории функций комплексного переменного.

Работа состоит из двух параграфов. В первом параграфе доказываются несколько вспомогательных утверждений, относящихся к геометрической теории функций комплексного переменного, затем, во втором параграфе эти утверждения используются для построения указанных выше целых функций.

§ 1. Оценка граничных производных при конформном отображении

Рассмотрим область D , ограниченную кривой Жордана C , обладающей непрерывной кривизной, начинающейся и оканчивающейся в бесконечности. Пусть функция $w = f(z)$, $f(\infty) = \infty$, отображает область D конформно и однолистно на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$. Из геометрической теории функций комплексного переменного хорошо известно [1], что $f(z)$ непрерывна вплоть до границы C и имеет непрерывную и отличную от нуля производную $f'(z)$ на C по области D .

В этом параграфе нас интересует вопрос о том, при каких дополнительных ограничениях на C существуют положительные константы k_1 и k_2 такие, что

$$k_1 < |f'(z)| < k_2 \quad \text{для } z \in C.$$

В теоремах 1 и 2 настоящего параграфа указываются некоторые ограничения на кривую C , гарантирующие существование констант k_1 и k_2 .

1°. *Некоторые вариационные леммы.* Введем следующие обозначения. Пусть $D(C)$ —область, ограниченная кривой Жордана C , начинающейся и оканчивающейся в бесконечности. Через $w = f(z, C)$ обозначим функцию, реализующую конформное и однолистное отображение области $D(C)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, причем так, что $f(\infty, C) = \infty$.

В известном вариационном принципе Линделефа [2] для случая полуплоскости утверждается, в частности, что, если $D(C) \subseteq D(\tilde{C})$ и

кривые C и $\bar{C}$ удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, а отображения $f(z, C)$ и $f(z, \bar{C})$ соответствующим образом нормированы на бесконечности, то неравенство

$$|f'(z, C)| \leq |f'(z, \bar{C})|$$

выполняется во всех общих точках z кривых C и $\bar{C}$, где эти производные существуют.

Однако, для приложений, ограничения на C и $\bar{C}$ довольно жесткие. В нижеследующей лемме 1 все необходимые ограничения на C и $\bar{C}$ выражены в терминах отображающих функций.

Лемма 1. Пусть $D(C) \subseteq D(\bar{C})$ и

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D(C)}} \left| \frac{f(z, C)}{f(z, \bar{C})} \right|} \leq 1. \quad (1.1)$$

Тогда неравенство

$$|f'(z, C)| \leq |f'(z, \bar{C})| \quad (1.2)$$

выполняется во всех точках $z \in C \cap \bar{C}$, где эти производные существуют.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(w) = f(f^{-1}(w, C), \bar{C}),$$

которая определена и непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re} w \geq 0$, голоморфна при $\operatorname{Re} w > 0$ и $\operatorname{Re} \varphi(w) \geq 0$. В силу одной теоремы Вольфа [3] $\varphi(w)$ представляется в виде

$$\varphi(w) = \alpha w + \Phi(w), \quad (1.3)$$

где

$$\alpha = \inf_{\operatorname{Re} w > 0} \frac{\operatorname{Re} \varphi(w)}{\operatorname{Re} w}, \quad (1.4)$$

и равномерно в любом угле $|\arg w| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, имеем

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\Phi(w)}{w} = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.3), (1.5) и (1.1) следует, что

$$\alpha > \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{\varphi(w)}{w} \right| = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, \bar{C})}{f(z, C)} \right| > 1,$$

так что, в силу (1.4), имеем

$$\frac{\operatorname{Re} \varphi(w)}{\operatorname{Re} w} \geq 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} w > 0. \quad (1.6)$$

При доказательстве оценки (1.2) достаточно ограничиться такими точками $z_0 \in C \cap \bar{C}$, в которых $f'(z_0, C) \neq 0$. В соответствующей точке $w_0 = f(z_0, C)$, $\operatorname{Re} w_0 = 0$, функция $\varphi(w)$ имеет конечную производную $\varphi'(w_0)$, причем $\operatorname{Re} \varphi(w_0) = 0$. Если, теперь, точка w лежит на прямой $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} w_0$, то, в силу (1.6), имеем

$$\left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} \right| \geq \frac{\operatorname{Re} \varphi(w)}{\operatorname{Re} w} > 1,$$

откуда, переходя к пределу при $w \rightarrow w_0$, получим

$$|\varphi'(w_0)| \geq 1. \quad (1.7)$$

В замкнутой области $\bar{D}(C)$ имеем

$$f(z, \bar{C}) = \varphi(f(z, C)),$$

откуда

$$f'(z_0, \bar{C}) = \varphi'(w_0) f'(z_0, C).$$

Неравенство (1.2) следует теперь из (1.7). Лемма доказана.

Замечание. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что нижний предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, \bar{C})}{f(z, C)} \right|$$

всегда конечен. Поэтому особый интерес представляют те ограничения на C и $\bar{C}$, при которых

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, \bar{C})}{f(z, C)} \right| > 0. \quad (1.8)$$

Выполнение условия (1.8) не зависит от выбора отображений $f(z, C)$ и $f(z, \bar{C})$, поскольку любая другая пара таких же отображений выражается линейно через $f(z, C)$ и $f(z, \bar{C})$. Таким образом, выполнение условия (1.8) зависит лишь от областей $D(C)$ и $D(\bar{C})$, а условие (1.1) является при этом условием нормировки. Из теорем типа Альфорса [4] и [5] или Варшавского [6] можно получить ряд довольно общих ограничений на области $D(C)$ и $D(\bar{C})$, при которых условие (1.8) выполняется. Эти ограничения в общем выражают тот факт, что $D(C)$ и $D(\bar{C})$ должны быть „близки“ друг к другу (а не полуплоскости!). Конечно, при желании условие (1.1) можно заменить более прозрачным (но зато и более жестким) условием

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, C)}{z} \right| < 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, \bar{C})}{z} \right| > 1, \quad (1.9)$$

что для наших целей вполне достаточно.

Следующая лемма показывает, что в некоторых случаях имеют место оценки, противоположные неравенству (1.2).

Лемма 2. Пусть $D(C) \subseteq D(\bar{C})$, а кривые C и $\bar{C}$ имеют общую дугу γ , соединяющую некоторую точку z_0 с бесконечностью. Если при этом

$$f(z_0, C) = f(z_0, \bar{C}) = 0, \quad (1.10)$$

то имеет место неравенство

$$\left| \frac{f'(z, \bar{C})}{f'(z, C)} \right| \leq \left| \frac{f(z, \bar{C})}{f(z, C)} \right| \quad (1.11)$$

во всех точках $z \neq z_0$ дуги γ , где эти производные существуют и отличны от нуля*.

Доказательство. Пусть функция $w = f(z, C)$, для определенности, переводит дугу γ на верхнюю мнимую полуось $\Gamma: \operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w > 0$. Из условий леммы следует, что функция $w = f(z, \bar{C})$ тоже отображает γ на Γ , переводя при этом область $D(C)$ на некоторую область G , лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ и содержащую на своей границе полуось Γ .

Рассмотрим теперь, как и в лемме 1, функцию

$$\varphi(w) = f(f^{-1}(w, C), \bar{C}), \quad (1.12)$$

нормированную условиями $\varphi(0) = 0, \varphi(\infty) = \infty$. Она отображает полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ на область G , причем полуось Γ переходит на Γ . В силу принципа симметрии функция $\varphi(w)$ продолжима на всю плоскость с разрезом Γ' вдоль отрицательной мнимой полуоси и отображает внешность Γ' на некоторую симметричную относительно мнимой оси область, не содержащую точек Γ' . Образует теперь функцию

$$\psi(\zeta) = [-i\varphi(i\zeta^2)]^{1/2}, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(\infty) = \infty, \quad (1.13)$$

отображающую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$ на некоторую область, лежащую в правой полуплоскости и симметричную относительно действительной оси, так что

$$\operatorname{Im} \psi(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \zeta = 0. \quad (1.14)$$

Для функции $\psi(\zeta)$ имеет место фундаментальное неравенство Жулиа

$$\left| \frac{\psi(\zeta') - \psi(\zeta)}{\psi(\zeta') + \psi(\zeta)} \right| \leq \left| \frac{\zeta' - \zeta}{\zeta' + \zeta} \right|,$$

где ζ' и ζ — произвольные точки из правой полуплоскости.

* Нетрудно видеть, что в условиях леммы 2 производные $f'(z, C)$ и $f'(z, \bar{C})$ в некоторой точке $z \in \gamma, z \neq z_0$ существуют одновременно и обращаются в нуль тоже одновременно. Впрочем, это будет видно также из хода доказательства леммы 2.

Переходя здесь к пределу при $\zeta' \rightarrow \zeta$, получим

$$|\psi'(\zeta)| \leq \frac{\operatorname{Re} \psi(\zeta)}{\operatorname{Re} \zeta},$$

откуда, учитывая (1.14), в частности, имеем

$$|\psi'(\zeta)| \leq \left| \frac{\psi(\zeta)}{\zeta} \right| \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \zeta = 0.$$

Далее, в силу (1.13) и (1.14), отсюда следует оценка

$$|\varphi'(w)| \leq \left| \frac{\varphi(w)}{w} \right| \quad \text{для} \quad w \in \Gamma, \quad w \neq 0. \quad (1.15)$$

Заметим теперь, что, в силу (1.12), имеет место тождество

$$f(z, \tilde{C}) = \varphi(f(z, C)), \quad z \in \overline{D(C)},$$

и, так как $\varphi(w)$ аналитична, $\varphi'(w) \neq 0$ при $w \in \Gamma$, то в некоторой точке $z \in \gamma$ производные $f'(z, \tilde{C})$ и $f'(z, C)$ существуют одновременно и обращаются в нуль также одновременно. Пусть $z \in \gamma$ — точка, где эти производные существуют. Тогда

$$f'(z, \tilde{C}) = \varphi'(w) f'(z, C),$$

где $w = f(z, C)$. Учитывая (1.15) получим отсюда требуемую оценку (1.11). Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 непосредственно следует

Лемма 3. Пусть $D(C) \subseteq D(\tilde{C})$, кривые C и $\tilde{C}$ имеют общую дугу γ , соединяющую некоторую точку z_0 с бесконечностью. Пусть при этом

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D(C)}}} \left(\left| \frac{f(z, C)}{f(z, \tilde{C})} \right| + \left| \frac{f(z, \tilde{C})}{f(z, C)} \right| \right) < +\infty. \quad (1.16)$$

Тогда существуют константы $k_3 > 0$ и $k_4 > 0$ такие, что во всех точках $z \in \gamma$, $|z - z_0| > 1$, где существуют отличные от нуля производные $f'(z, C)$ и $f'(z, \tilde{C})$, выполняется оценка

$$k_3 < \left| \frac{f'(z, C)}{f'(z, \tilde{C})} \right| < k_4. \quad (1.17)$$

Правая часть этой оценки следует из леммы 1. Для получения левой оценки достаточно к отображениям $f(z, C) - f(z_0, C)$ и $f(z, \tilde{C}) - f(z_0, \tilde{C})$ применить лемму 2, учитывая (1.16) и условие $f(\infty, C) = f(\infty, \tilde{C}) = \infty$.

2°. Леммы о линиях Жордана. Рассмотрим кривую Жордана в плоскости z , $z = x + iy = re^{i\theta}$ ($-\pi < \theta \leq \pi$), представимую уравнением в полярных координатах r, θ :

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi(r)}{r}, \quad r \geq r_0 > 0, \quad (1.18)$$

где $\varphi(t) \geq 0$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция при $t \geq r_0$.

Нам сначала необходимо выяснить, при каких условиях эту кривую можно, начиная с некоторого места, представить в декартовых координатах уравнением вида

$$x = -\psi(y), \quad y \geq y_0, \quad (1.19)$$

где функция $\psi(t) \geq 0$ дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $t \geq y_0$, и как при этом связаны свойства функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ около точки $t = +\infty$? Следующая лемма дает ответ на этот вопрос и показывает, что эти функции имеют одинаковые во многих отношениях качественные и количественные свойства.

Лемма 4. При условии $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0$ кривая Γ вида (1.18) представима в виде (1.19), где $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi'(t) = 0$, и для $z = x + iy = re^{i\theta} \in \Gamma, z \rightarrow \infty$, имеют место равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'_r = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{r} = 1, \quad (1.20)$$

$$\psi(y) = \varphi(r) \left[1 + o\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right) \right], \quad (1.21)$$

$$\psi'(y) = \varphi'(r) + \left(\frac{\varphi(r)}{r} \right), \quad (1.22)$$

$$\psi''(y) = [1 + o(1)]\varphi''(r) + o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (1.23)$$

Если дополнительно предположить, что $\frac{\varphi(t)}{t}$ не растет, то не растет и $\frac{\psi(t)}{t}$. При этом, если $\varphi(t)$ не убывает (выпукла), то не убывает (выпукла) и $\psi(t)$.

Доказательство. В силу (1.18) кривая Γ представляется в параметрическом виде

$$x = -r \sin \alpha(r), \quad y = r \cos \alpha(r), \quad r \geq r_0, \quad (1.24)$$

где $\alpha(r) = \frac{\varphi(r)}{r}$. Из условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t\alpha'(t) = 0, \quad (1.25)$$

откуда немедленно следует (1.20). Далее, из (1.20) вытекает, что функция $y = r \cos \alpha(r)$ при $r \geq r_1 \geq r_0$ является строго растущей к $+\infty$ функцией, так что существует обратная функция $r = r(y)$, тоже строго растущая. Подставляя $r = r(y)$ в (1.24), получим требуемое представление (1.19).

Равенства (1.21) и (1.22) следуют из тождества

$$\psi(y) = \varphi(r) \frac{\sin \alpha(r)}{\alpha(r)}, \quad r = r(y), \quad (1.26)$$

если учитывать (1.25) и (1.20). Аналогично, из формулы

$$\psi''(y) = (y')^{-3} \{ \varphi''(r) + r^2 [z'(r)]^3 \} \quad (1.27)$$

следует (1.23). Последние три утверждения леммы вытекают соответственно из тождества $\frac{\psi(y)}{y} = \operatorname{tg} \alpha(r)$ и из формул (1.26) и (1.27).

Лемма доказана.

Некоторые утверждения леммы 4 обратимы. Справедлива

Лемма 5. При условии $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi'(t) = 0$ кривая Γ вида (1.19) представима в виде (1.18), где $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0$. Кроме того, остаются в силе равенства (1.20)–(1.23) с заменой в них $\varphi(t)$ на $\psi(t)$ и y на r . Если дополнительно предположим, что $\frac{\psi(t)}{t}$ не растет, то и $\frac{\varphi(t)}{t}$ не будет расти.

Доказательство. В самом деле, кривая Γ представляется в параметрическом виде

$$r = [y^2 + \psi^2(y)]^{1/2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\psi(y)}{y}, \quad y > y_0. \quad (1.28)$$

Используя условия $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi'(t) = 0$, получим

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{r}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} r' = 1,$$

откуда следует, что функция $r = [y^2 + \psi^2(y)]^{1/2}$ строго растет при $y > y_1 \geq y_0$ и разрешима относительно y , т. е. $y = y(r)$.

Подставляя $y = y(r)$ в (2.28), получим представление (1.18), где

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \operatorname{arctg} \frac{\psi(y)}{y}, \quad y = y(r). \quad (1.29)$$

Из (1.29) следует, что функции $\frac{\psi(t)}{t}$ и $\frac{\varphi(t)}{t}$ убывают одновременно и что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0,$$

$$\frac{\varphi(r)}{r} = [1 + o(1)] \frac{\psi(y)}{y}. \quad (1.30)$$

Таким образом, кривая Γ удовлетворяет условиям леммы 4, так что справедливы равенства (1.20)–(1.23). Лемма будет доказана, если в этих равенствах учитывать (1.30).

Для дальнейших лемм настоящего пункта нам нужны некоторые термины и обозначения. Пусть кривая Γ имеет вид (1.19). Мы скажем, что точка $z = x + iy$ лежит *правее* (*левее*) кривой Γ , если $y > y_0$ и $x > -\psi(y)$ ($x < -\psi(y)$). Некоторое множество точек лежит *правее* (*левее*) Γ , если все его точки лежат *правее* (*левее*) Γ . Эти термины мы сохраняем для любой кривой вида (1.19), даже если $y_0 = -\infty$.

Возьмем теперь произвольную точку $\zeta = \xi + i\eta \in \Gamma$ и проведем через ζ нормаль n_ζ к кривой Γ . Обозначим через $K^+(\zeta, R)$ ($K^-(\zeta, R)$) открытый круг, ограниченный окружностью радиуса R , проходящей через точку ζ , центр которого лежит на части нормали n_ζ , направленной *правее* (*левее*) Γ . Кроме того, для произвольного вещественного числа γ рассмотрим точку пересечения $z_\gamma = x_\gamma + iy_\gamma$ прямой $x = \gamma y$ с n_ζ . Вокруг точки z_γ опишем открытый круг $K_\gamma(\zeta)$ радиуса $R_\gamma = |\zeta - z_\gamma|$. Справедлива следующая

Лемма 6. Пусть кривая Γ представима в виде (1.19), где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi'(t) = 0, \quad (1.31)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\psi''(t) > -\infty \quad (\lim_{t \rightarrow \infty} t\psi''(t) < +\infty). \quad (1.32)$$

Тогда существуют числа $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что при $|\zeta| \geq \rho$ круги $K_\gamma(\zeta)$ лежат *правее* Γ , если $0 < \gamma \leq \varepsilon$ (*левее*, если $-\varepsilon \leq \gamma < 0$). При этом

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{R_\zeta}{|x_\zeta|} = 1. \quad (1.33)$$

Если дополнительно предположить, что $\psi(t) = O\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)$ при $t \rightarrow \infty$, то имеем

$$\psi(\eta) = [1 + o(1)] \psi(y_\gamma), \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (1.34)$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\gamma > 0$, так как рассуждения для случая $\gamma < 0$ аналогичны. Пусть $\alpha(r)$ —угол между положительным направлением действительной оси с нормалью к кривой Γ в точке $\zeta = -\psi(\eta) + i\eta$, направленной в сторону прямой $x = \gamma y$. Центр круга $K_\gamma(\zeta)$ —точка $z_\gamma = x_\gamma + iy_\gamma$ связана с R_ζ соотношениями

$$y_\gamma = \eta + R_\zeta \sin \alpha(\eta), \quad x_\gamma = -\psi(\eta) + R_\zeta \cos \alpha(\eta), \quad (1.35)$$

откуда, учитывая равенства

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \alpha(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \psi'(\eta) = 0,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{|\zeta|}{\eta} = 1, \quad x_\zeta = \eta y_\zeta,$$

получим

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{R_\zeta}{\eta} = \gamma, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{R_\zeta}{y_\zeta} = \gamma, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{R_\zeta}{x_\zeta} = 1. \quad (1.36)$$

Докажем теперь, что существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ такие, что круги $K_\gamma(\zeta)$ при $0 < \gamma \leq \varepsilon$ и $|\zeta| > \rho$ лежат правее кривой Γ , причем ясно, что можно ограничиться случаем $\gamma = \varepsilon$.

В силу условия (1.32), имеем

$$t\psi''(t) > -A, \quad (1.37)$$

где $A > 1$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{4A}$, а число ρ выберем так, чтобы (см. (1.36))

$$\frac{1}{2}\varepsilon < \frac{R_\zeta}{y_\zeta} < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad |\zeta| > \rho. \quad (1.38)$$

Отсюда имеем, во-первых, что $R_\zeta < y_\zeta$ при $|\zeta| > \rho$, так что круги $K_\varepsilon(\zeta)$ лежат в верхней полуплоскости. Далее, уравнение границы $C_\varepsilon(\zeta)$ круга $K_\varepsilon(\zeta)$ имеет вид

$$x = x_\zeta \pm [R_\zeta^2 - (y - y_\zeta)^2]^{1/2}, \quad |y - y_\zeta| \leq R_\zeta,$$

и нам надо доказать, что при $|\zeta| > \rho$ имеет место неравенство

$$g(y) \equiv \psi(y) + x_\zeta - [R_\zeta^2 - (y - y_\zeta)^2]^{1/2} \geq 0 \quad \text{при} \quad |y - y_\zeta| \leq R_\zeta. \quad (1.39)$$

С этой целью заметим сначала, что, в силу (1.35), $|\eta - y_\zeta| < R_\zeta$. Кроме того, тот факт, что окружность $C_\varepsilon(\zeta)$ проходит через точку ζ и имеет общую касательную с кривой Γ , означает, что $g(\eta) = 0$ и $g'(\eta) = 0$. По формуле Тейлора имеем

$$g(y) = \frac{(y - \eta)^2}{2} g''(c) \geq \frac{(y - \eta)^2}{2} \left(\psi''(c) + \frac{1}{R_\zeta} \right), \quad |c - y_\zeta| < R_\zeta.$$

Отсюда, учитывая (1.37), (1.38), получим (1.39).

Докажем теперь (1.34). В силу (1.35) и (1.36) имеем

$$y_\zeta - \eta = O(\gamma \alpha(\eta)) = O(\eta \psi'(\eta)).$$

Кроме того, воспользовавшись теоремой о среднем, получим

$$\psi(y_\zeta) - \psi(\eta) = \psi'(c)(y_\zeta - \eta),$$

где $c = \eta + \theta(y_\zeta - \eta)$, $0 < \theta < 1$, так что $c = \eta[1 + o(1)]$, следовательно

$$\psi(y_\zeta) - \psi(\eta) = o(y_\zeta - \eta) = o(\eta \psi'(\eta)) = o(\psi(\eta)),$$

откуда следует (1.34). Лемма доказана.

В случае $\gamma = 0$, т. е. когда центры кругов $K_\gamma(\zeta) \equiv K_0(\zeta)$ лежат на прямой $x = 0$, имеет место следующая лемма с несколько более слабыми ограничениями на функцию $\psi(t)$.

Лемма 7. Пусть кривая Γ представима в виде (1.19), где $\psi(t) > 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi'(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \psi''(t) > -1. \quad (1.40)$$

Тогда существует число $\rho > 0$ такое, что круги $K_0(\zeta)$ при $|\zeta| > \rho$ лежат правее Γ .

Доказательство. Повторяя рассуждения леммы 6, сначала доказываем, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{R_\zeta}{y_\zeta} = 0, \quad (1.41)$$

так что $R_\zeta < y_\zeta$ при $|\zeta| > \rho_0$ и нам надо установить, что

$$\psi(y) - [R_\zeta^2 - (y - y_\zeta)^2]^{1/4} > 0 \quad \text{при} \quad |y - y_\zeta| \leq R_\zeta, \quad |\zeta| > \rho > \rho_0.$$

Для этого достаточно доказать неравенство

$$g(y) = \psi^2(y) + (y - y_\zeta)^2 - R_\zeta^2 > 0 \quad \text{при} \quad |y - y_\zeta| \leq R_\zeta, \quad |\zeta| \geq \rho.$$

Учитывая условия $g(\eta) = 0$, $g'(\eta) = 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) согласно формуле Тейлора имеем

$$g(y) = \frac{(y - \eta)^2}{2} g''(c) = (y - \eta)^2 [1 + \psi(c) \psi''(c)], \quad |c - y_\zeta| < R_\zeta. \quad (1.42)$$

Из условия (1.40) следует, что $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} c = \infty$, а тогда из (1.40) и (1.42) получаем, что $g(y) \geq 0$ при $|\zeta| > \rho$. Лемма доказана.

Ослаблением в лемме 6 условия (1.32), аналогично, доказывается

Лемма 8. Пусть кривая Γ представима в виде (1.19), где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi'(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi''(t) > -\infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \psi''(t) < +\infty.$$

Тогда существуют числа $R > 0$ и $\rho > 0$ такие, что при $|\zeta| > \rho$ круги $K^+(\zeta, R)$ ($K^-(\zeta, R)$) лежат правее (левее) кривой Γ .

3°. Оценка граничных производных при конформном отображении. В настоящем пункте приводится решение поставленной в начале настоящего параграфа задачи о поведении граничных производных около изолированной точки.

Мы воспользуемся обозначениями пункта 1°. Пусть $D(C)$ означает область, ограниченную кривой C Жордана, которая начинается и оканчивается в бесконечности и имеет непрерывную кривизну. Обозначим через $f(z, C)$ функцию, осуществляющую конформное и однолистное отображение области $D(C)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, при-

чем так, что $f(\infty, C) = \infty$. Для оценки граничных производных функции $f(z, C)$ мы предполагаем, что кривая C представима, начиная с некоторого места, уравнением в полярных координатах (r, θ) ($-\pi < \theta \leq \pi$), а область $D(C)$ определяется соответствующими неравенствами.

Именно, мы предполагаем, что точки $z = re^{i\theta}$ области $D(C)$, начиная с некоторого места, определяются одним из следующих двух неравенств:

$$-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1(r)}{r}\right) < \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_2(r)}{r} \quad (1.43)$$

или

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1(r)}{r}\right) < \theta < \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_2(r)}{r}, \quad (1.44)$$

где $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ — неотрицательные и дважды непрерывно дифференцируемые функции при $r \geq r_0$, причем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_1'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_2'(r) = 0, \quad (1.45)$$

$$\int \frac{\varphi_1(r) + \varphi_2(r)}{r^2} dr < +\infty. \quad (1.46)$$

Из теорем искажения Альфорса [4] и [5] следует, при указанных выше условиях, оценка

$$|f(z, C)| > k_5 |z|, \quad |z| \geq r_1 \geq r_0, \quad (1.47)$$

где k_5 — положительная константа*. Если же дополнительно предположить, что функции $\frac{\varphi_1(r)}{r}$ и $\frac{\varphi_2(r)}{r}$ имеют ограниченную вариацию (в частности, если они не растут), тогда имеем также

$$|f(z, C)| < k_6 |z|, \quad |z| \geq r_2 \geq r_0, \quad (1.48)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая простая

Лемма 9. Пусть функция $U(z)$ гармонична и неотрицательна в круге $|z - z_0| < R$. Если она непрерывна в граничной точке ζ , причем $U(\zeta) = 0$ и существует производная $\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n}$ по внутренней нормали, то справедлива оценка

$$\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} > \frac{U(z_0)}{2R}. \quad (1.49)$$

В самом деле, из неравенств Гарнака имеем

$$U(z) \geq U(z_0) \frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} \quad \text{при } |z - z_0| < R.$$

* Всюду в этой работе через $k_i (i = 1, 2, \dots)$ мы обозначаем только положительные константы.

Если точка z находится на нормали, проходящей через ζ , то $R - |z - z_0| = |\zeta - z|$, и мы получим

$$\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{U(z) - U(\zeta)}{|z - \zeta|} > \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{U(z_0)}{R + |z - z_0|} = \frac{U(z_0)}{2R}.$$

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основных теорем настоящего параграфа.

Теорема 1. Пусть область $D(C)$ представима в виде (1.43).

а) Если $\lim_{r \rightarrow \infty} r \varphi_i^+(r) > -\infty$ ($i = 1, 2$), то

$$|f'(z, C)| > k_7, \quad z \in C. \quad (1.50)$$

б) Если же функции $\varphi_i(r)$ растут, а функции $\frac{\varphi_i(r)}{r}$ убывают и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_i^+(r) < +\infty, \text{ то}$$

$$|f'(z, C)| < k_8, \quad z \in C. \quad (1.51)$$

Доказательство. Докажем сначала оценку (1.50). Так как граница C области $D(C)$ имеет непрерывную кривизну, то функция

$$f(z, C) = U(z, C) + iV(z, C)$$

непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D(C)}$. Пусть n есть нормаль к C , направленная в сторону области $D(C)$. Из существования граничных производных $f'(z, C)$ и из условия $U(z, C) \equiv 0$ на C следует, что

$$|f'(z, C)| = \frac{\partial U(z, C)}{\partial n}, \quad z \in C,$$

и нам, следовательно, нужно оценить снизу производную $\frac{\partial U(z, C)}{\partial n}$.

С этой целью выберем число $a \geq 0$ так, чтобы полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$ лежала целиком в $D(C)$. Согласно теореме Вольфа, о которой говорится в доказательстве леммы 1, при $\operatorname{Re} z > a$

$$U(z, C) \geq a(\operatorname{Re} z - a), \quad \text{где } a \geq 0,$$

и равномерно в любом угле $|\arg z| \leq \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{2}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z, C)}{z} = a.$$

Сопоставляя это с оценкой (1.47), мы получим, что $a \geq k_5 > 0$, поэтому

$$U(z, C) \geq k_5(\operatorname{Re} z - a), \quad \operatorname{Re} z > a. \quad (1.52)$$

Производную $\frac{\partial U(z, C)}{\partial n}$ оценим снизу, например, на кривой

$$\Gamma: \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_2(r)}{r}, \quad r \geq r_0, \quad (1.53)$$

имеющей вид (1.18).

В силу (1.45) и леммы 4 кривая Γ представима в виде (1.19), где функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям (1.31) и (1.32) леммы 6, если учитывать (1.23) и условие $\lim_{r \rightarrow \infty} r \varphi_2^*(r) > -\infty$ теоремы. Поэтому,

в силу леммы 6, при $\zeta \in \Gamma$, $|\zeta| \geq r$ функция $U(z, C)$ гармонична и неотрицательна в круге $K_1(\zeta)$, причем $U(\zeta, C) = 0$.

По лемме 6 и, в силу (1.52), имеем оценку

$$\frac{\partial U(\zeta, C)}{\partial n} > \frac{U(z_c, C)}{2R_c} > \frac{k_c}{2} \frac{x_c - a}{R_c},$$

откуда и получается требуемая оценка (1.50), если учесть (1.33).

б) Докажем теперь оценку (1.51), например, на части (1.53) кривой C . Выберем число $R_0 > 0$ таким образом, чтобы вне круга $|z| < R_0$ область $D(C)$ определялась неравенствами (1.43), а кривая (1.53) была, в силу леммы 4, представима в виде (1.19). Рассмотрим область

$$D(C_0): -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_0(r)}{r}, \quad r > 0,$$

где

$$\varphi_0(r) = \begin{cases} \varphi_2(R_0) \frac{r}{R} & \text{для } 0 \leq r \leq R_0, \\ \varphi_2(r) & \text{для } r \geq R_0. \end{cases}$$

Учитывая оценки (1.47) и (1.48), а также лемму 3, получаем

$$|f'(z, C)| < k_0 |f'(z, C_0)| \quad \text{при } z \in \Gamma, \quad |z| \geq R_0 + 1,$$

так что достаточно доказать оценку (1.51) для функции $f'(z, C_0)$ при достаточно больших $z \in \Gamma$.

Кривая C_0 в декартовых координатах представляется уравнением вида

$$x = -\psi_0(y), \quad -\infty < y < +\infty, \quad (1.54)$$

где $\psi_0(y) \equiv 0$ при $y \leq 0$, а при $y \geq 0$ функция $\psi_0(y)$ не убывает, функция $\frac{\psi_0(y)}{y}$ не растет, причем, в силу (1.20)–(1.23) и (1.46),

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_0^*(y) = 0, \quad \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \psi_0^*(y) < +\infty, \quad (1.55)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi_0(y)}{y^2} dy < +\infty. \quad (1.56)$$

На оси $-\infty < y < +\infty$ определим новую функцию $\psi(y)$ формулой

$$\psi(y) = \int_0^y \frac{\psi_0(t)}{t} dt,$$

так что $\psi(y) \equiv 0$ при $y \leq 0$. Учитывая равенства

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\psi(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \psi'(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\psi_0(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \psi'_0(y) = 0 \quad (1.57)$$

и (1.56), интегрированием по частям находим, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi(y)}{y^2} dy = \psi(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\psi_0(y)}{y^2} dy < +\infty. \quad (1.58)$$

Кривая $\Gamma \subset C_n$ удовлетворяет, в силу (1.55), условиям леммы 8.

Пусть $R > 0$ — число, существование которого доказано в лемме 8. Обозначим через $D(C^*)$ часть области

$$x + \psi(y) > 0, \quad -\infty < y < +\infty,$$

лежащую вне круга $|z| \leq R$, так что кривая C^* содержит полуокружность $|z| = R$, $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Функция $f(z, C^*)$ аналитична на этой полуокружности и, во всяком случае,

$$|f'(z, C^*)| < k_{10} \quad \text{при} \quad z \in \gamma: |z| = R, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}. \quad (1.59)$$

Кроме того, функцию $f(z, C^*)$ мы подчиняем условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, C^*)}{z} \right| > 1. \quad (1.60)$$

Возможность такой нормировки следует из того, что для $f(z, C^*)$ имеет место оценка (1.47). В самом деле, учитывая (1.57), (1.58) и лемму 5, мы получим, что область $D(C^*)$, начиная с некоторого места, представима в виде (1.43), где $\varphi_1(r) \equiv 0$, причем условия (1.45) и (1.46) выполняются.

Сопоставим теперь каждой достаточно удаленной точке $\zeta \in \Gamma$ точку $z \in \gamma: |z| = R$, $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ следующим образом. Проведем через точку ζ нормаль к Γ , направленную в сторону области $D(C_0)$, и пусть $\alpha = \alpha(\zeta)$ означает угол между этой нормалью и положительным направлением действительной оси. Можно считать, что $0 \leq \alpha(\zeta) \leq \frac{\pi}{4}$, так как, в силу (1.54) и (1.55), имеем

$$\alpha(\zeta) = \arctg \psi'_0(\eta) \geq 0 \quad (\zeta = \xi + i\eta), \quad \alpha(\zeta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Положим $z_\zeta = Re^{i\alpha(\zeta)}$ и осуществим сдвиг плоскости z так, чтобы точка z_ζ перешла в точку ζ . Область $D(C^*)$ перейдет при этом в некоторую область $D(C_\zeta)$, а функция

$$w = f(z, C_\zeta) = f(z - \zeta + z_\zeta, C^*)$$

отобразит $D(C_\zeta)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ и, в силу (1.60), будет удовлетворять условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, C)}{z} \right| \geq 1. \quad (1.61)$$

Докажем, что область $D(C_0)$ содержится в $D(C_\zeta)$.

В самом деле, при указанном сдвиге, окружность $|z| = R$ переходит в некоторую окружность, проходящую через точку ζ , внешняя нормаль к которой в этой точке совпадает с нормалью к кривой Γ , направленной в сторону $D(C_0)$. Согласно лемме 8 и выбору числа R , внутренность этой окружности лежит вне области $D(C_0)$. Следовательно, вне области $D(C_0)$ лежит также образ точки $z = 0$ — точка $\zeta - z_\zeta = x_0 + iy_0$, так что

$$x_0 + \psi(x_0) < 0. \quad (1.62)$$

Теперь нам достаточно доказать, что вне области $D(C_0)$ лежит образ кривой $x = -\psi(y)$, $-\infty < y < +\infty$. Пусть L_1^1 — часть этого образа, соответствующая значениям $-\infty < y \leq 0$, а L_2^1 — остальная часть образа. Точки $z = x + iy \in L_1^1$ определяются условиями $x = x_0$, $y \leq y_0$, так что, в силу (1.62) и монотонности функции $\psi_0(y)$, имеем

$$x + \psi_0(y) \leq x_0 + \psi_0(y_0) < 0,$$

и z лежит вне $D(C_0)$. Пусть теперь $z = x + iy \in L_2^1$. Тогда

$$x = -\psi(y - y_0) + x_0, \quad y \geq y_0,$$

нужно доказать, что $x + \psi_0(y) < 0$, т. е. что

$$\psi(y - y_0) > \psi_0(y) + x_0 \quad \text{при} \quad y > y_0.$$

Последнее неравенство немедленно следует из монотонности функции $\frac{\psi_0(y)}{y}$, если учитывать, что

$$\psi'(y - y_0) = \frac{\psi_0(y - y_0)}{y - y_0} > \frac{\psi_0(y)}{y} \geq \psi'_0(y).$$

Таким образом, мы доказали, что $D(C_0) \subset D(C_\zeta)$. Так как функция $f(z, C_0)$ удовлетворяет оценке вида (1.46), можно считать, что

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, C_0)}{z} \right| \leq 1.$$

Учитывая это, а также (1.61) и (1.9), мы можем к областям $D(C_0)$ и

$D(C)$ применить лемму 1. Воспользовавшись, наконец, оценкой (1.59), получим

$$|f'(z, C_0)| \leq |f'(z, C)| = |f'(z, C^*)| < k_{10}.$$

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. Пусть область $D(C)$ представима в виде (1.44), где функции $\frac{\varphi_i(r)}{r}$ ($i = 1, 2$) имеют ограниченную вариацию.

а) Если $\lim_{r \rightarrow \infty} r \varphi_i'(r) < +\infty$, то

$$|f'(z, C)| > k_{11}, \quad z \in C; \quad (1.63)$$

б) Если же $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_i(r) \varphi_i'(r) > -1$, то имеем

$$|f'(z, C)| < k_{12}, \quad z \in C. \quad (1.64)$$

Доказательство. Докажем оценки (1.63) и (1.64), например, на части $\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1(r)}{r}$ кривой C . Не ограничивая общности можно считать, что область $D(C)$ симметрична относительно действительной оси и, после поворота на угол π , лежит целиком в левой полуплоскости, т. е. имеет вид

$$|\theta| > \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1(r)}{r}, \quad r > 0. \quad (1.65)$$

Этого можно добиться, используя оценки (1.47), (1.48) и лемму 3.

Для доказательства оценки (1.63) нам нужно, как и в пункте а) предыдущей теоремы, оценить снизу нормальную производную $\frac{\partial U(z, C)}{\partial n}$ на границе C , где $U(z, C) = \operatorname{Re} f(z, C)$. В силу симметричности области $D(C)$ на полуоси $x < 0$ имеем

$$f(x, C) = U(x, C) + \text{const.}$$

Откуда, учитывая (1.47), получаем оценку

$$U(x, C) > k_{13}|x|, \quad |x| > |x_0|. \quad (1.66)$$

Покажем, что аналогичная оценка для $U(z, C)$ верна в любом угле $\Delta_\alpha: |\arg z| > \frac{\alpha}{2} > \frac{\pi}{2}$. В самом деле, Δ_α лежит, начиная с некоторого места, в области $D(C)$, так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_1'(r) = 0.$$

Из точки $t < 0$ опустим перпендикуляры на стороны угла Δ_β , где $\pi < \beta < \alpha$, и пусть R_l — длина каждого из этих перпендикуляров, а l_l — их части, лежащие в Δ_α . При $z \in l_l$ имеем, что $|z| \leq t$ и $|z - t| \leq k_{11}R_l$, где $k_{11} < 1$ — константа, зависящая лишь от α и β . Кроме

того, когда t пробегает всю полуось, l_i заполняют весь угол Δ_α , поэтому функцию $U(z, C)$, гармоническую и неотрицательную в круге $|z - t| < R_i$ при больших t , достаточно оценить на l_i . Из неравенств Гарнака, с учетом (1.66), получаем оценку

$$U(z, C) > U(t, C) \frac{R_i - |z - t|}{2R_i} > k_{15} |z|,$$

где $k_{15} = \frac{k_{12}}{2} (1 - k_{11})$. Заметив теперь, что граница области (1.65) при $\theta > 0$ имеет вид (1.18) и пользуясь леммами 4 и 6, мы проведем доказательство (1.63) так же, как и в заключении пункта а) теоремы 1.

Теперь докажем оценку (1.64). Через точку $\zeta \in C$ проведем нормаль к кривой C до пересечения с осью $x = 0$ в некоторой точке y_ζ . Учитывая условия теоремы и леммы 4 и 7, мы получим, что круг

$$K_\zeta: |z - y_\zeta| < |\zeta - y_\zeta|, \quad |\zeta| > \rho$$

лежит целиком вне области $D(C)$. Обозначим через $D(C_\zeta)$ общую часть полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ и внешности круга $\bar{K}_\zeta$. Вышесказанное означает, что $D(C) \subset D(C_\zeta)$, причем кривые C и C_ζ имеют общую точку ζ . Функция

$$w = f(z, C_\zeta) = -(z - y_\zeta) + \frac{|\zeta - y_\zeta|^2}{z - y_\zeta}$$

отображает область $D(C_\zeta)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$.

Считая, в силу (1.48), что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z, C)}{z} \right| \leq 1$$

и применяя лемму 1, получим оценку

$$|f'(\zeta, C)| \leq |f'(\zeta, C_\zeta)| \leq 2,$$

завершающую доказательство теоремы 2.

Замечание. Из процесса доказательства теорем 1 и 2 легко усмотреть, что оценки (1.50), (1.51) и (1.63), (1.64) остаются в силе, начиная с некоторого места, если кривая C , начиная с некоторого места, имеет непрерывную кривизну, удовлетворяя при этом всем остальным условиям.

Возьмем теперь произвольное число α , $0 < \alpha < 2\pi$, и в плоскости $z = re^{i\theta}$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) рассмотрим две области

$$D(C_\alpha^\pm): |\theta| < \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\varphi_\alpha(r)}{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad r > 0, \quad (1.67)$$

где функция $\varphi_\alpha(r)$ дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $r > 0$ и

$$0 \leq \frac{\varphi_\alpha(r)}{r^{\frac{\pi}{\alpha}}} < \min \left(\pi - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right).$$

Из всех результатов настоящего параграфа в дальнейшем нам понадобится только следующая

Теорема 3. Пусть области $D(C_\alpha^\pm)$ представимы в виде

(1.67), где функция $\varphi_\alpha(r)$ не убывает, функция $r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r)$ не растет, причем

$$\int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha} + 1\right)} \varphi_\alpha(r) dr < +\infty, \quad (1.68)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{2 - \frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha^*(r) = 0. \quad (1.69)$$

Тогда имеют место оценки

$$k_{10} (|z| + 1)^{\frac{\pi}{\alpha}} < |f(z, C_\alpha^\pm)| < k_{17} (|z| + 1)^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad z \in \overline{D(C_\alpha^\pm)}, \quad (1.70)$$

$$k_{18} |z|^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} < |f'(z, C_\alpha^\pm)| < k_{19} |z|^{\frac{\pi}{\alpha} - 1}, \quad z \in C_\alpha^\pm, \quad |z| > 1, \quad (1.71)$$

$$\operatorname{Re} f(z, C_\alpha^\pm) > k_{20} [\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + \varphi_\alpha(|z|)], \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad |z| > 1. \quad (1.72)$$

Для доказательства теоремы заметим сначала, что из свойств функции $\varphi_\alpha(r)$ следует неравенство

$$0 \leq r \varphi_\alpha'(r) \leq \frac{\pi}{\alpha} \varphi_\alpha(r),$$

откуда, учитывая (1.68), получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1 - \frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r) = 0. \quad (1.73)$$

Теперь осуществим преобразование плоскости, заменяя z на $z^{\frac{\alpha}{\pi}}$. Области $D(C_\alpha^\pm)$ преобразуются при этом следующим образом:

$$D(C_\alpha^\pm): |\theta| < \frac{\pi}{2} \pm \frac{\varphi_\alpha(r)}{r}, \quad r > 0,$$

где $\varphi_\pi(r) = \frac{\pi}{\alpha} \varphi_\alpha(r^{\frac{\alpha}{\pi}})$. Области $D(C_\pi^\pm)$ имеют вид (1.43) и (1.44) и удовлетворяют, в силу (1.68), (1.69), (1.73) и свойств функции $\varphi_\alpha(r)$, всем условиям теорем 1 и 2. Оценки (1.70) и (1.71) получаются, если

к функциям $f(z, C_{\pi}^{\pm}) = f(z^{\pm}, C_{\pi}^{\pm})$ применить неравенства (1.47), (1.48) и оценки теорем 1 и 2. Для доказательства оценки (1.72) достаточно показать, что

$$\operatorname{Re} f(z, C_{\pi}^{+}) \geq k_{21} \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Re} f(z, C_{\pi}^{+}) \geq k_{22} \varphi_{\pi}(|z|)$$

при $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| > 1$. Первая из этих оценок следует, как и (1.52), из теоремы Вольфа и из (1.47). Для доказательства второй оценки заметим, что кривая C_{π}^{+} при $\theta > 0$ представляется, согласно лемме 4, в виде (1.19) и удовлетворяет всем условиям леммы 6. Пусть $\varepsilon > 0$ — число, существование которого доказано в лемме 6, а точка $z = x + iy$ лежит в угле $\varepsilon|y| \leq x$. Учитывая, что $\frac{\varphi_{\pi}(r)}{r}$ не растет, имеем

$$\operatorname{Re} f(z, C_{\pi}^{+}) \geq k_{21}x > \frac{\varepsilon}{2} k_{21}|z| \geq k_{23} \varphi_{\pi}(|z|).$$

Пусть теперь точка $z = x + iy$ лежит вне угла $\varepsilon|y| \leq x$ и в полуплоскости $x > 0$. Считая $y > 0$, проведем через z нормаль к кривой C_{π}^{+} , пересекающую C_{π}^{+} в точке $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta > 0$. В обозначениях леммы 6 функция $\operatorname{Re} f(z, C_{\pi}^{+})$ гармонична и положительна в круге $|z - \zeta| < R_{\zeta}$, $z_{\zeta} = x_{\zeta} + iy_{\zeta}$, так что, учитывая неравенства Гарнака и (1.33), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z, C_{\pi}^{+}) &\geq \operatorname{Re} f(z_{\zeta}, C_{\pi}^{+}) \frac{R_{\zeta} - |z - z_{\zeta}|}{2R_{\zeta}} > \\ &> \frac{k_{21}}{2} \frac{x_{\zeta}}{R_{\zeta}} |\zeta - z| > k_{21} |\zeta - z| > k_{21} \psi(\eta), \end{aligned}$$

где функция $\psi(t)$ не убывает, а функция $\frac{\psi(t)}{t}$ не растет (это следует, согласно лемме 4, из аналогичных свойств функции $\varphi_{\pi}(r)$). Из указанного свойства вытекает, в частности, что $\psi'(t) = O\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)$.

Учитывая далее (1.34) и (1.21), окончательно получим

$$\psi(\eta) \geq k_{25} \psi(y) \geq k_{25} \psi(y) \geq k_{25} \varphi_{\pi}(|z|).$$

Теорема полностью доказана.

§ 2. Построение убывающих в угле целых функций конечного порядка.

Задача о возможности асимптотического приближения целыми функциями сводится [7] к задаче о построении целых функций $\omega(z)$, не имеющих нулей на заданном замкнутом неограниченном множестве

E , равномерно и предельно быстро (в определенном смысле) убывающих на E к нулю при $z \rightarrow \infty^*$.

В связи с задачей о наилучшей асимптотической аппроксимации встает также вопрос об оценке роста функций $\omega(z)$.

Однако последняя задача имеет и вполне самостоятельный интерес: построить нетривиальную целую функцию, которая равномерно и по возможности быстро стремится к нулю на E и имеет минимальный рост в плоскости.

Что можно сказать в общем случае о росте функций $\omega(z)$? Пусть E — неограниченный континуум, $z = 0 \in E$ и пусть целая функция $\omega(z) \not\equiv 0$ удовлетворяет на E неравенству

$$|\omega(z)| < \varepsilon(|z|), \quad (2.1)$$

где функция $\varepsilon(r) > 0$ монотонно стремится к нулю на полуоси $r > 0$.

Обозначим $M(r) = \max_{|z| \leq r} |\omega(z)|$. Из известной теоремы Валирона [9] следует, что в круге $|z| \leq r$ и вне некоторых исключительных кружков, сумма радиусов которых меньше $\frac{r}{2}$, выполняется неравенство

$$\ln M(2er) > k \ln \left| \frac{1}{\omega(z)} \right|, \quad (2.2)$$

где $k > 0$ — абсолютная константа. Исключительные кружки не могут полностью покрыть часть континуума E , лежащую в кольце $\frac{r}{2} \leq |z| \leq r$.

Учитывая (2.1) и (2.2), окончательно получим оценку

$$\ln M(r) > k \ln \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{r}{4e}\right)}.$$

В этом неравенстве метрические свойства множества E отражаются в скорости убывания $\varepsilon(r)$. Однако для более полной характеристики возможного роста функций $\omega(z)$ нужно учитывать также теоремы типа Фрагмена-Линделефа для дополнения к E .

В настоящей работе подробно рассматривается случай, когда E является замкнутым углом $\Delta_\alpha: |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$ произвольного раствора α , $0 < \alpha < 2\pi$. М. В. Келдыш сконструировал [7] целые функции порядка $\rho = \max \left[\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \right]$ и нормального типа, с нулями вне Δ_α ,

которые убывают в Δ_α , как функции $z^{\text{const}} e^{-z^{\frac{\pi}{\alpha}}}$. В связи с этим результатом М. М. Джрбашяном было высказано предположение, что

* Подробнее об этом см. [8].

должны существовать целые функции $\omega_\alpha(z)$ порядка ρ и нормального типа, удовлетворяющие в Δ_α неравенству (2.1), где функция $\varepsilon(r)$ подчинена условию*

$$\int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} \ln \varepsilon(r) dr > -\infty. \quad (2.3)$$

Справедливость этого предположения в случае $\alpha = \pi$ следует, например, из результатов книги [10]. Более того, М. М. Джрбашян построил [11] функцию $\omega_\pi(z)$ с дополнительным условием, что все ее нули лежат на границе полуплоскости Δ_π .

В общем случае конструирование целых функций $\omega_\alpha(z)$ осуществляется ниже, в пунктах 1 и 2 настоящего параграфа. В наших построениях мы следуем общей схеме к задачам подобного характера, предложенной М. В. Келдышем [7]. Сущность метода М. В. Келдыша заключается в том, что для построения функции $\omega(z)$ строится некоторая функция $H(z)$, гармоничная вне конечного числа линий Жордана, непрерывная и субгармоничная во всей конечной плоскости и имеющая примерно такие же свойства, как и предполагаемая функция $\ln |\omega(z)|$. Затем построение $\omega(z)$ завершается заменой в $H(z)$ логарифмического потенциала простого слоя хорошо подобранной дискретной суммой**. Отметим, что в отличие от рассмотренного М. В. Келдышем случая, когда функцию $H(z)$ можно выписать сразу и в явном виде, в нашем случае основная трудность заключается именно в построении $H(z)$. Специально для этой цели и была доказана „геометрическая“ теорема 3.

1°. *Построение субгармонической мажоранты $H(z)$.* Пусть α — произвольное число, $0 < \alpha < 2\pi$, и пусть $p(r)$ — неотрицательная на полуоси $r \geq 1$ функция такая, что

$$r^{-\frac{\pi}{\alpha}} p(r) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad r \uparrow +\infty, \quad (2.4)$$

$$\int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} p(r) dr < k < +\infty. \quad (2.5)$$

Продолжим функцию $p(r)$ на интервал $0 \leq r \leq 1$, полагая

$$p(r) = p(1) r^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (2.6)$$

и введем новую функцию $\varphi_\alpha(r)$ формулой

$$\varphi_\alpha(r) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{p(rt_1t_2t_3)}{t_1t_2t_3} dt_1 dt_2 dt_3. \quad (2.7)$$

* В работе [8] доказывается, что условие (2.3) является необходимым и достаточным для существования целой функции $\omega(z)$, удовлетворяющей в Δ_α неравенству (2.1).

** Подробнее см. в пункте 2.

Функция $\varphi_2(r)$ определена, неотрицательна и дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $r > 0$. Кроме того, в силу (2.4) и (2.7), имеет

$$\varphi_2(r) > p(r) \quad \text{при } r > 0. \quad (2.8)$$

Докажем, что $\varphi_2(r)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

В самом деле, учитывая (2.5), (2.6) и (2.7), получим

$$\begin{aligned} \int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} \varphi_2(r) dr &= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (t_1 t_2 t_3)^{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{t_1 t_2 t_3}^\infty \tau^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} p(\tau) d\tau dt_1 dt_2 dt_3 \leq \\ &\leq \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (t_1 t_2 t_3)^{\frac{\pi}{\alpha}} \left[k + p(1) \ln \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \right] dt_1 dt_2 dt_3 < +\infty, \end{aligned}$$

что доказывает справедливость (1.68). Далее, функция $\varphi_2(r)$ не убывает, а функция $r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2(r)$, в силу (2.4) и (2.7), не растёт, поэтому

$$0 \leq r \varphi_2'(r) \leq \frac{\pi}{\alpha} \varphi_2(r).$$

Отсюда, учитывая (1.68), получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2(r) = 0. \quad (2.9)$$

Кроме того, из равенства

$$r \varphi_2'(r) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{p(r t_1 t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2$$

следует, что функция $r \varphi_2'(r)$ не убывает, а функция $r^{1-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2'(r)$ не растёт, в силу (2.4), так что

$$- \varphi_2'(r) \leq r \varphi_2'(r) \leq \left(\frac{\pi}{\alpha} - 1 \right) \varphi_2'(r).$$

Отсюда и из (2.9) следует справедливость (1.69). Наконец, в силу

(2.6) и (2.7), учитывая монотонность функции $r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2(r)$, получим

$$\max_{r > 0} r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2(r) = \varphi_2(1) = p(1).$$

Это позволяет нам, не ограничивая общности, считать, что

$$r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2(r) < \min \left(\pi - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right), \quad \text{при } r > 0,$$

поскольку убывающую в угле $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$ целую функцию $\omega(z)$ мы можем построить сначала для функции $\frac{1}{n} p(r)$, где n — достаточно большое натуральное число, а затем рассматривать функцию $\omega^n(z)$.

Таким образом, области $D(C_\alpha^\pm)$, определяемые по формуле (1.67), будут удовлетворять всем условиям теоремы 3, если функцию $\varphi_\alpha(r)$ определить раз и навсегда формулой (2.7).

Теперь, наряду с областями $D(C_\alpha^\pm)$, рассмотрим дополнительные к ним области $G(C_\alpha^\pm)$, которые после поворота на угол π определяются неравенствами

$$|\theta| < \frac{\beta}{2} \mp \frac{\varphi_\beta(r)}{r^{\frac{\pi}{\beta}}}, \quad (2.10)$$

где $\beta = 2\pi - \alpha$, $\varphi_\beta(r) = r^{\frac{\pi}{\beta} - \frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r)$.

Легко проверить, что в случае $\alpha > \pi$ функция $\varphi_\beta(r)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 с заменой там α на β , т. е. области (2.10) являются областями типа $D(C_\alpha^\pm)$. Кроме того, в силу (2.6) и (2.7), имеем

$$r^{-\frac{\pi}{\beta}} \varphi_\beta(r) = r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r) = p(1), \text{ если } 0 < r \leq 1. \quad (2.11)$$

Перейдем к построению субгармонической мажоранты $H(z)$. Обозначим через $w = f(z, C_\alpha^\pm)$ ($w = f_\alpha(z, C_\alpha^+)$) фиксированные функции, осуществляющие конформное и однолистное отображение областей $D(C_\alpha^\pm)$ ($G(C_\alpha^+)$) на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, переводящие точки $z = 0$ и $z = \infty$, соответственно, в $w = 0$ и $w = \infty$. В плоскости z определим функции $U^\pm(z)$ и $V(z)$ формулами

$$U^\pm(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} f(z, C_\alpha^\pm) & \text{для } z \in \overline{D(C_\alpha^\pm)}, \\ 0 & \text{для } z \in G(C_\alpha^\pm), \end{cases} \quad (2.12)$$

$$V(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} f_\alpha(z, C_\alpha^+) & \text{для } z \in \overline{G(C_\alpha^+)}, \\ 0 & \text{для } z \in D(C_\alpha^+). \end{cases} \quad (2.13)$$

Наконец, искомую функцию $H(z)$ определим формулой

$$H(z) = \begin{cases} k^2 U^-(e^{i\alpha} z) + k^2 U^-(e^{-i\alpha} z) - k U^+(z), & \text{если } 0 < \alpha < \pi, \\ k^2 V(z) - k U^+(z), & \text{если } \pi \leq \alpha < 2\pi, \end{cases} \quad (2.14)$$

где k — достаточно большая положительная константа.

Функция $H(z)$ непрерывна во всей плоскости и гармонична вне некоторого контура Γ , который определяется следующим образом: в случае $0 < \alpha < \pi$ Γ означает совокупность двух кривых, которые по-

лучаются из кривой C_{α}^{-} при помощи вращений $e^{\pm i\alpha}z$, а в случае $\pi \leq \alpha < 2\pi$ полагаем $\Gamma = C_{\alpha}^{+}$, так что всегда $C_{\alpha}^{\pm} \subseteq \Gamma$. Функция $H(z)$ имеет на Γ двусторонние нормальные производные $\frac{\partial H(\zeta)}{\partial n_1}$ и $\frac{\partial H(\zeta)}{\partial n_2}$. Полагая

$$\mu(\zeta) = \frac{\partial H(\zeta)}{\partial n_1} + \frac{\partial H(\zeta)}{\partial n_2}$$

и учитывая (2.12), (2.13) и (2.14), имеем, если $0 < \alpha < \pi$, то

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} k^2 |f'(e^{i\alpha}\zeta, C_{\alpha}^{-})| + k^2 |f'(e^{-i\alpha}\zeta, C_{\alpha}^{-})| - k |f'(\zeta, C_{\alpha}^{+})| & \text{для } \zeta \in C_{\alpha}^{+}, \\ k^2 |f'(e^{\pm i\alpha}\zeta, C_{\alpha}^{-})| & \text{для } \zeta \in \Gamma \setminus C_{\alpha}^{+}, \end{cases} \quad (2.15)$$

а в случае $\pi \leq \alpha < 2\pi$

$$\mu(\zeta) = k^2 |f'(\zeta, C_{\alpha}^{+})| - |f'(\zeta, C_{\alpha}^{+})|, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.16)$$

Из (2.15), (2.16) и оценки (1.71) следует, что

$$|\zeta|^{\rho-1} < \mu(\zeta) < k_{27} |\zeta|^{\rho-1}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad |\zeta| \geq 1, \quad (2.17)$$

где $\rho = \max \left[\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \right]$. Для того чтобы оценить $\mu(\zeta)$ в случае $|\zeta| \leq 1$ заметим, что, в силу (2.11), области $D(C_{\alpha}^{+})$ и $G(C_{\alpha}^{+})$ являются угловыми областями при $|z| \leq 1$. Поэтому существует константа $\gamma > \frac{1}{2}$ такая, что

$$|\mu(\zeta)| \leq k_{28} |\zeta|^{\gamma-1}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (2.18)$$

$$|H(z)| \leq k_{29} |z|^{\gamma}, \quad \left| \frac{\partial H(z)}{\partial |z|} \right| \leq k_{30} |z|^{\gamma-1}, \quad |z| \leq 1. \quad (2.19)$$

Из (1.70) при $|z| \geq 1$ получаем оценки

$$H(z) < k_{31} |z|^2, \quad (2.20)$$

$$H(z) > -k_{32} |z|^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad z \in \overline{D(C_{\alpha}^{+})}. \quad (2.21)$$

Далее из (2.12), (2.13) и (2.14) непосредственно следует, что

$$H(z) \equiv 0 \text{ в области } |\theta| > \frac{3\alpha}{2} - r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2(r), \quad (2.22)$$

где $z = re^{i\theta}$, $0 < \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$.

Наконец, из (1.72) следует важное свойство функции $H(z)$

$$H(z) < -2[\operatorname{Re} z + \varphi_2(|z|)] \text{ при } |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geq 1. \quad (2.23)$$

Пусть теперь D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей L , а функция $U(z)$ гармонична в D , непрерывна на $\bar{D}$ и имеет непрерывную производную $\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n}$ на L по внутренней нормали. Тогда имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \left[\ln|\zeta - z| \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} - U(\zeta) \frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial n} \right] ds = \begin{cases} U(z), & \text{если } z \in D, \\ 0, & \text{если } z \notin \bar{D}. \end{cases}$$

Возьмем произвольные числа $0 < \varepsilon < R$ и применим эту формулу к функциям $U^\pm(z)$ и $V(z)$, когда в качестве D фигурируют соответственно части областей $D(C_\varepsilon^-)$ и $G(C_\varepsilon^+)$, лежащие в кольце $\varepsilon < |z| < R$. Затем, учитывая (2.14), оценку (2.19) и устремив ε к нулю, получим

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \ln|\zeta - z| \mu(\zeta) ds_\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \left[H(\zeta) \frac{\partial \ln|\zeta - z|}{\partial |\zeta|} - \ln|\zeta - z| \frac{\partial U(\zeta)}{\partial |\zeta|} \right] ds_\zeta,$$

где Γ_R — часть контура Γ , лежащая в круге $|z| < R$. Отсюда, учитывая, что $H(0) = 0$, окончательно получаем формулу

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \mu(\zeta) ds_\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \left[H(\zeta) \frac{\partial}{\partial |\zeta|} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| - \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \frac{\partial H(\zeta)}{\partial |\zeta|} \right] ds_\zeta, \quad (2.24)$$

справедливую в любом круге $|z| < R$. Поскольку второй интеграл гармоничен в круге $|z| < R$, из этой формулы, учитывая (2.17), получаем, что $H(z)$ субгармонична вне круга $|z| < 1$.

2°. *Построение убывающей целой функции $\omega_1(z)$.* Теперь мы, следуя М. В. Келдышу [7], „стираем“ особенности функции $H(z)$, сосредотачивая „массу“ $\frac{1}{2\pi} \mu(\zeta)$ на дискретной совокупности точек из Γ , сгущающихся к бесконечности.

Для любой точки $\zeta \in \Gamma$, Γ_1 обозначим через L_ζ дугу Γ , лежащую в кольце $1 < |z| < |\zeta|$, содержащую ζ , и рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\zeta} \mu(t) ds_t.$$

Обозначив через $\{g(\zeta)\}$ дробную часть $g(\zeta)$, покажем, что

$$I(z) = I_1(z) + I_2(z) = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \mu(\zeta) ds_\zeta - \int_{\Gamma_1} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\{g(\zeta)\} \quad (2.25)$$

сходится равномерно в любом круге $|z| \leq R$, за исключением точек z , где $g(z)$ целая, и оценим $I(z)$.

Функция $I_1(z)$ всюду непрерывна. Учитывая неравенство

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \right| \leq \ln(1 + |z|) + \ln \frac{1}{|\zeta|} \quad \text{при } |\zeta| \leq 1, \quad |z| > 2$$

и оценки (2.18), мы получим, что

$$|I_1(z)| \leq k_{33} \ln(1 + |z|) + k_{33}.$$

Для того чтобы оценить $I_2(z)$ заметим, что $\Gamma \setminus \Gamma_1$ состоит из нескольких изолированных неограниченных ветвей, и все оценки достаточно провести для интеграла $I_3(z)$ по одной из них, например, по кривой

$$\Gamma_0: \theta = \frac{z}{2} + r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_2(r), \quad r \geq 1.$$

С этой целью на Γ_0 возьмем последовательность точек ζ_n , $|\zeta_n| \uparrow +\infty$, определяемых из условия

$$g(\zeta_n) = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

и обозначим через γ_n дугу кривой Γ_0 , соединяющую точки ζ_{n-1} и ζ_n . Учитывая (2.26) получим

$$\begin{aligned} I_3(z) &= - \int_{\Gamma_0} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d[g(\zeta)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta_n} \right| - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\gamma_n} \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dg(\zeta) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \ln \left| \frac{\zeta(\zeta_n - z)}{\zeta_n(\zeta - z)} \right| \mu(\zeta) ds_{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z). \end{aligned}$$

Для доказательства равномерной сходимости и для оценки этого ряда заметим сначала, что при $\zeta \in \gamma_n$ из (2.17) и (2.26) имеем

$$|\zeta_n - \zeta| \leq \int_{\gamma_n} ds \leq \frac{1}{|\zeta|^{p-1}} \int_{\gamma_n} \mu(\zeta) ds_{\zeta} = \frac{2\pi}{|\zeta|^{p-1}}. \quad (2.27)$$

Отсюда, полагая

$$1 + w_n = \frac{\zeta(\zeta_n - z)}{\zeta_n(\zeta - z)},$$

для любого z получим

$$|w_n| = \left| \frac{z(\zeta_n - \zeta)}{\zeta_n(\zeta - z)} \right| \leq \frac{2\pi|z|}{|\zeta|^p ||\zeta| - |z||}. \quad (2.28)$$

В частности, пусть $|z| \leq R$, $R > 2$. Выберем номер N так, чтобы при $n > N$ иметь $|\zeta_{n-1}| \geq 2R$. Тогда

$$|w_n| < \frac{2\pi}{|\zeta|^{p+1}}, \quad |w_n| < \frac{1}{2},$$

$$|\ln|1 + w_n|| \leq |w_n| \left(1 + \frac{1}{1 - |w_n|} \right) \leq 3|w_n| < \frac{6\pi}{|\zeta|^{p+1}},$$

и, в силу (2.17), имеем

$$|U_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} |\ln|1 + w_n||^n(\zeta) ds_\zeta \leq 3k_{27} \int_{\Gamma_n} \frac{ds_\zeta}{|\zeta|^2}.$$

Учитывая теперь неравенство

$$ds_\zeta \leq k_{31} d|\zeta|, \quad (2.29)$$

которое следует из (2.29), при $k > N$ и любом $m > 1$ получим

$$\sum_{n=k+1}^{k+m} |U_n(z)| \leq k_{35} \int_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+m}|} \frac{d|\zeta|}{|\zeta|^2} \leq \frac{k_{35}}{|\zeta_k|} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow +\infty,$$

что доказывает равномерную сходимость $I_3(z)$ в любом круге $|z| \leq R$.

Перейдем к оценке $I_1(z)$. Пусть сначала точка z лежит вне 1-окрестности кривой Γ_0 . Тогда, в силу (2.27), имеем

$$|\zeta_n - \zeta| \leq 2\pi, \quad \left| \frac{1}{1 + w_n} \right| = \left| \frac{\zeta_n}{\zeta} \right| \left| \frac{\zeta - z}{\zeta_n - z} \right| \leq (2\pi + 1)^2,$$

$$|\ln|1 + w_n|| \leq \ln(1 + |w_n|) + \ln\left(1 + \frac{|w_n|}{|1 + w_n|}\right) \leq 2\ln(1 + k_{36}|w_n|).$$

Отсюда, обозначив $|z| = r$, $|\zeta| = t$, а также учитывая (2.28), (2.17) и (2.29), получим

$$|I_3(z)| \leq k_{37} \int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{k_{37}r}{t^2|t-r|}\right) t^{2-1} dt = I_1(r).$$

Если же z произвольно, то из неравенства $\ln|1 + w_n| \leq \ln(1 + |w_n|)$ вполне аналогично имеем, что $I_3(z) \leq I_1(r)$, и в обоих случаях нам надо оценить $I_1(r)$. Разобьем его на два интеграла $\Gamma_1(r)$ и $\Gamma_4(r)$, когда соответственно $|t-r| \geq \frac{t+r}{2}$ и $|t-r| < \frac{t+r}{2}$. Первый интеграл оценивается просто

$$\Gamma_4(r) \leq \int_1^\infty \frac{2k_{37}^2 r}{t(t+r)} dt = 2k_{37}^2 \ln(1+r).$$

Во втором интеграле $\frac{r}{3} < t < 3r$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma_1(r) &\leq k_{38} \int_{\frac{r}{3}}^{3r} \ln\left(1 + \frac{k_{38}}{r^{2-1}|t-r|}\right) r^{2-1} dt \leq 2k_{38} \int_0^{2r^2} \ln\left(1 + \frac{k_{38}}{\tau}\right) d\tau \leq \\ &\leq k_{39} \ln(1+r) + k_{39}. \end{aligned}$$

Таким образом, в конечном счете, мы доказали сходимость $I(z)$ и получили соответствующие оценки. Обозначив

$$U_2(z) = H(z) + I(z)$$

для всех z имеем

$$U_2(z) < H(z) + k_{10} \ln(2 + |z|). \quad (2.30)$$

Если же z лежит вне 1-окрестности кривой $\Gamma \setminus \Gamma_1$, то

$$|U_2(z) - H(z)| < k_{11} \ln(2 + |z|). \quad (2.31)$$

Обозначим теперь через z_k все те точки кривой $\Gamma \setminus \Gamma_1$, где функция $g(z)$ принимает натуральные значения, число которых в любом круге $|z| < R$ конечно. Из (2.24) и (2.25) при $|z| < R$ имеем

$$U_2(z) = \sum_{|z_k| < R} \ln \left| 1 - \frac{z}{z_k} \right| + U_R(z),$$

где $U_R(z)$ гармонична при $|z| < R$. Таким образом, функция $U_2(z)$ гармонична во всей плоскости, за исключением точек z_k , где она имеет логарифмические особенности. Существует целая функция $\omega_2(z)$ с нулями в точках z_k такая, что

$$|\omega_2(z)| = \varepsilon e^{U_2(z)}, \quad (2.32)$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема. Пусть $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max \left[\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \right]$, функция $p(r)$ удовлетворяет условиям (2.4) и (2.5). Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ порядка ρ и нормального типа, все нули которой лежат вне угла $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$ и которая удовлетворяет неравенствам

$$e^{-k|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}} < |\omega_\alpha(z)| < e^{-[\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + p(|z|)]}, \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad |z| > 1. \quad (2.33)$$

Указанный порядок или тип нельзя понизить.

При доказательстве теоремы мы можем, очевидно, ограничиться случаем, когда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{p(r)}{\ln r} = +\infty.$$

Тогда функция (2.32) является искомой. В самом деле, левое неравенство в (2.33) следует из (2.21) и (2.31), а правое — из (2.8), (2.23) и (2.30). Кроме того, из (2.20) и (2.30) следует, что

$$\ln |\omega_\alpha(z)| \leq k_{12} (|z| + 1)^\rho.$$

Пусть теперь $\omega(z)$ — некоторая целая функция, $\omega(0) \neq 0$, удовлетворяющая неравенству

$$\ln |\omega(z)| < -\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \text{если } |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad |z| > 1.$$

Поскольку $\omega(z)$ ограничена на линии $|\arg z| = \frac{\alpha}{2}$, из теоремы Фрагмена-Линделефа следует, что она имеет, по крайней мере, порядок $\frac{\pi}{2\pi - \alpha}$ и нормальный тип. Полагая далее

$$M(r) = \max_{|z|=r} |\omega(z)|$$

и учитывая субгармоничность функции $\ln |\omega(z)|$, при любом $r > 1$ получим

$$\ln |\omega(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\omega(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \ln M(r) - \frac{\alpha}{\pi} r^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

откуда следует, что $\omega(z)$ имеет, по крайней мере, порядок $\frac{\pi}{\alpha}$ и нормальный тип. Теорема полностью доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 2. III. 1966

Ն. Ն. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ԱՆԿՅԱՆ ՄԵՋ ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ԵՎԱԶՈՂ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԿԱՐԴԻ
ԱՄՐՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո մ

Ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ. Եթե $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max \left[\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \right]$, իսկ $p(r)$ ֆունկցիան բավարարում է (2.4) և (2.5) պայմաններին:

Դուրսիցում ունի ρ կարգի ու նորմալ տիպի $\omega_\alpha(z)$ ամբողջ ֆունկցիա, որի բոլոր զերոները ընկած են $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$ անկյունից դուրս և որը բավարարում է

$$e^{-k|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}} < |\omega_\alpha(z)| < e^{-[\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + p(|z|)]}, \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geq 1$$

ամնավասարություններին: Նշված կարգը կամ տիպը հնարավոր չէ ցածրացնել:

Այս թեորեմն ապացուցելու համար հարկ է լինում ստանալ որոշ գնահատականներ կոնֆորմ արտապատկերող ֆունկցիաների եզրային ածանցյալների համար:

N. H. ARAKELIAN

THE CONSTRUCTION OF ENTIRE FUNCTIONS OF FINITE ORDER DECREASING UNIFORMLY IN THE ANGLE

S u m m a r y

The following proposition is stated:

Theorem. Let $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max \left[\frac{\pi}{\alpha}; \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \right]$ and $p(r)$ be any function satisfying (2.4) and (2.5). Then, there exists an entire function $\omega_\alpha(z)$ of finite order and of mean type satisfying the inequalities

$$e^{-k|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}} < |\omega_\alpha(z)| < e^{-|\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + p(|z|)|}, \quad |\arg z| < \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geq 1$$

its zeros being situated outside the angle $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$.

In order to prove this proposition it has been necessary to obtain some estimations of boundary derivatives of conformal mapping functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
3. Ж. Валирон. Аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
4. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
5. С. Мандельброт. Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИЛ, М., 1962.
6. С. Е. Варшавский. Конформное отображение бесконечных полос, Математика, 2:4 (1958), 67—116.
7. С. Н. Мерелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН VII, вып. 2 (48) (1952), 31—122.
8. Н. У. Аракелян. Об асимптотическом приближении целыми функциями в бесконечных областях, Мат. сборник, 53 (95), № 4 (1961), 515—538.
9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
10. С. Мандельброт. Квазианалитические классы функций, Гостехиздат, М.—Л., 1937.
11. М. М. Джрбашян. Об асимптотическом приближении целыми функциями в полуплоскости, ДАН СССР, 111, № 4 (1956), 749—752.