

К. Д. ЗАТУЛОВСКАЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ F -МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В в е д е н и е

Назовем алгеброй A какую-нибудь ассоциативно-коммутативную алгебру с единицей и с конечным базисом над полем комплексных чисел (или же A есть поле комплексных чисел). Мы нормируем алгебру A , полагая для всякого элемента $a \in A$: $|a| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_r|^2}$, где $a_1, \dots, a_r$ — комплексные компоненты элемента a . Имеем для любой пары элементов $a, b \in A$: $|ab| \leq N|a||b|$, где $N \geq 1$ [2]. Всюду в дальнейшем через N обозначаем только эту постоянную.

Пусть f и t — непрерывно-дифференцируемые функции многих действительных переменных

$$x_1, \dots, x_S \quad (S \geq 2) \quad (1)$$

со значениями из данной алгебры A .

Назовем функцию f F -моногенной (моногенной в смысле В. С. Федорова [1], [2]) в области Δ , если найдется функция переменных (1), которую мы обозначим через $f^{(1)}$, такая, что в данной области Δ $df = f^{(1)} dt$; $f^{(1)}$ называется F -производной функции f .

Для однозначного выбора функции $f^{(1)}$ допустим возможность деления элемента алгебры A на какую-нибудь одну частную производную первого порядка от t всюду в Δ .

Множество всех F -моногенных относительно t функций в области Δ обозначаем через (t, Δ, A) .

Аналогично определяются F -производные различных порядков, обозначаемые $f^{(n)}$, $n = 2, 3, \dots$, а именно, имеем

$$df^{(n)} = f^{(n+1)} dt,$$

если $f^{(n)} \in (t, \Delta, A)$.

Примеры

1) Пусть $f = z^5$, $t = z^3$, $z = x_1 + ix_2$, $i^2 = -1$, $S = 2$.

Здесь $f^{(1)} = \frac{5}{3} z^2$; f — многозначная функция от t в любой окрестности точки $z = 0$, F -моногенная по t в этой окрестности.

2) Пусть $f = x_1 + \dots + x_S$, $t = ae^{it}$, $i^2 = -1$, где a — постоянная, принадлежащая A и имеющая обратный $-a^{-1}$.

Имеем

$$df = \frac{1}{ti} dt, \quad f^{(1)} = \frac{1}{ti} \dots$$

f —многозначная функция от t , так как t имеет одно и то же значение на всех следующих гиперплоскостях:

$$x_1 + \dots + x_s = \alpha + 2k\pi, \quad k = 0, 1, \dots,$$

α —действительное число, а f принимает разные значения на различных плоскостях.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для каждой точки области Δ найдется координата из (1), которую обозначим через x , такая, что в этой точке существует $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-1}$.

Одним из основных и мало разработанных вопросов в теории F —моногенных функций является вопрос о характере зависимости функции f от функции t , если $f \in (t, \Delta, A)$.

Определение. Функция f , моногенная по t в области Δ , называется аналитической однозначной функцией от t в этой области, если существуют F -производные от f любого порядка* и в некоторой окрестности $\Delta(P)$ каждой точки $P \in \Delta$

$$f^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f_0^{(k)} (t - t_0)^{k-n}}{(k-n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

($f_0^{(k)}$, t_0 —значения $f^{(k)}$ и t в точке P), причем все эти ряды абсолютно и равномерно сходятся в $\Delta(P)$.

В. С. Федоров [1], считая все компоненты функций f и t аналитическими (в обычном смысле) от координат (1) в Δ , доказал, что f —однозначная аналитическая функция от t в этой области при следующем дополнительном условии:

$$\left| \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \right| < AB^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad U = \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^{-1}, \quad A, B = \text{const.}$$

В настоящей работе мы обобщаем эту теорему В. С. Федорова, освобождаясь от этого дополнительного условия (§ 2, „Основная теорема“).

Заметим, что функция f может быть аналитической однозначной функцией от t (в вышеуказанном смысле) и в том случае, когда f и t не имеют непрерывных частных производных порядка выше первого по переменным (1). Например, f —любой полином от t , причем t в некоторой области Δ имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным (1).

* Это будет иметь место, если все компоненты функций f и t бесконечно дифференцируемы по переменным (1) в Δ . Условие это достаточное, но не необходимое [2].

1° Пусть $f \in (t, \Delta, A)$. Всюду в дальнейшем полагаем

$$D = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad D^0 \lambda = \lambda.$$

Пусть все компоненты функций f и t аналитичны относительно координат (1) в Δ . Тогда, как известно, для всякой заданной ограниченной и замкнутой области Δ_0 , расположенной строго внутри Δ , найдутся для данных f и t такие постоянные $a > 1$, $b > 1$, $C > 1$, что в Δ_0

$$|D^k \lambda| < ab^k k!, \quad |D^k f| < ab^k k!, \quad |\lambda^{-1}| < C, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Всюду в дальнейшем рассматриваем значения изучаемых функций и их производных в такой области Δ_0 , что всякий раз не оговариваем.

Назовем произведением класса „ k “ произведение вида

$$\prod_{j=1}^n D^{m_j} v_j \quad (v_1 = f, v_j = \lambda, j = 2, \dots, k), \quad (3)$$

взятое со знаком $+$ или $-$, где m_1 — целое положительное число, $m_2, \dots, m_k$ — целые неотрицательные числа (не обязательно попарно различные), подчиненные единственному условию: $m_1 + \dots + m_k = k$. Отметим очевидное свойство F-производных функции f

$$\left. \begin{aligned} f^{(n)} &= \frac{1}{\lambda} D f^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ f^{(1)} &= \frac{1}{\lambda} D f, \\ f^{(2)} &= \frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 D^2 f - D \lambda \cdot D f) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Теорема 1. Справедливо следующее представление:

$$\left. \begin{aligned} f^{(n)} &= \lambda^{1-2n} \varphi_n, \\ \varphi_n &= \sum_{j=1}^m a_j, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где каждое a_j есть произведение класса „ n “, m — некоторое натуральное число, большее или равное единице.

Доказательство. 1) Теорема верна для $n = 1$, что следует из (4).

2) Пусть теорема справедлива для некоторого n , докажем ее для $n + 1$.

Из (4) и (5) имеем

$$f^{(n+1)} = \frac{1}{\lambda} D f^{(n)} = \lambda^{1-2n-2} [\lambda D \varphi_n - (2n - 1) \varphi_n D \lambda]. \quad (6)$$

Легко видеть, поскольку теорема верна для n , что выражение внутри прямых скобок в правой части уравнения (6) есть сумма произведений класса „ $n+1$ “. Из представления (6) следует также справедливость теоремы для $n+1$. Теорема доказана.

2°. Основная теорема. Если все компоненты f и t есть аналитические функции переменных (1) в некоторой области Δ , в которой f — F -монотонна относительно t , тогда в некоторой окрестности каждой точки указанной области f есть аналитическая функция от t .

Доказательство. 1. Из (4) и (5) следует, что

$$\varphi_{n+1} = \sum_{j=1}^m [\lambda D a_j - (2n-1) a_j D i]. \quad (7)$$

Исходя из выражения $\varphi_1 = Df$ строим для $n=2, 3, \dots$, с помощью равенства (7), упорядоченную систему $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ произведений класса „ n “, которая определяет функцию φ_n формулы (5): $\varphi_n = a_1 + \dots + a_m$.

Пусть, теперь, P_k — любое произведение вида (3) класса „ k “ ($k=1, 2, \dots$). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma(P_k) &= m_1! m_2! \dots m_k!, \\ \sigma(\varphi_k) &= \sigma(a_1) + \dots + \sigma(a_m), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma(\lambda D P_k) = \sum_{q=1}^k \sigma(\beta_q),$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda (D^{m_1+1} V_1) \prod_{j=2}^k D^{m_j} V_j, \quad \beta_k = \lambda (D^{m_k+1} V_k) \prod_{j=1}^{k-1} D^{m_j} V_j, \\ \beta_q &= \lambda (D^{m_q+1} V_q) \prod_{j=1}^{q-1} D^{m_j} V_j \prod_{j=q+1}^k D^{m_j} V_j, \quad q=2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Очевидно, имеем

$$\sigma(\beta_q) = (m_q + 1) \sigma(P_k), \quad q=1, \dots, k, \quad \sum_{q=1}^k (m_q + 1) = 2k,$$

а поэтому $\sigma(\lambda D P_k) = 2k \sigma(P_k)$, откуда

$$\sigma(\lambda D a_j) = 2n \sigma(a_j).$$

Легко также видеть, что $\sigma(a_j D i) = \sigma(a_j)$, $j=1, \dots, m$.

Из (7), (8) получаем

$$\sigma(\varphi_{n+1}) < 4n \sigma(\varphi_n), \quad n=1, 2, \dots. \quad (9)$$

Так как, в силу (4), $\sigma(\varphi_1) = \sigma(Df) = 1$, то из неравенства (9) получим, полагая последовательно $n=2, 3, \dots$,

$$\sigma(\varphi_n) \leq 4^{n-1} (n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Далее, из (2) и (8) следует, что для всякого произведения класса „ k “ имеем

$$|P_k| < (ab)^k N^{k-1} \sigma(P_k),$$

откуда, в силу теоремы 1 и равенства (8), получим

$$|\varphi_n| \leq \sum_{j=1}^n |z_j| < (ab)^n N^{n-1} \sigma(\varphi_n).$$

Из последнего неравенства и из (10) находим

$$|\varphi_n| \leq (4N)^{n-1} (ab)^n (n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а так как из (2) и (5) имеем

$$|f^{(n)}| < N^{2n} C^{2n-1} |\varphi_n|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то

$$|f^{(n)}| < M^n n!, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где M —некоторая постоянная, не зависящая от n .

II. Из последних неравенств следует, что для каждой данной точки $P \in \Delta$ найдется такая ее окрестность $\Delta(P)$, в которой абсолютно и равномерно сходятся ряды

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} U_k, \quad S_n = \sum_{k=n}^{\infty} U_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $U_k = f_0^{(k)} \frac{(t-t_0)^k}{k!}$, $f_0^{(k)}$, t_0 —значения F -производных функции f порядка k и функции t в точке P , соответственно, а $U_k^{(n)}$ — k -производная порядка n от U_k , $k = 1, 2, \dots$. В самом деле, полагая $|t - t_0| = \rho$, получим

$$|U_k| < N^k M^k \rho^k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Пусть $\tilde{\Delta}$ —область, содержащаяся в Δ , такая, что для всех ее точек $\rho < CR$, $R = \frac{1}{MN}$, $0 < C < 1$, $C = \text{const}$. При $\rho < R$ сходит

ряд: $\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} (B\rho)^k$, где $B = MN$. Пусть $\rho = CR$. Найдется такое

число $\delta > 0$, что $\rho_1 + \delta < R$. Таким образом, $\sum_{k=0}^{\infty} (B\rho_1)^k < \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k (\rho_1 + \delta)^k < \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k [(\rho_1 + \delta)^k - \rho_1^k] < \infty.$$

Из очевидного неравенства

$$(\rho_1 + \varepsilon)^k - \rho_1^k > \frac{k!}{n! (k-n)!} \rho_1^{k-n} \varepsilon^n \quad (k \geq n)$$

имеем

$$\frac{k!}{(k-n)!} \rho_1^{k-n} < \frac{n!}{\delta^n} [(\rho_1 + \varepsilon)^k - \rho_1^k] \quad (k \geq n),$$

и потому ряд

$$\sum_{k=n}^{\infty} B^k \frac{k!}{(k-n)!} \rho_1^{k-n} < \infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда следует равномерная сходимость ряда

$$\sigma_n \equiv \sum_{k=n}^{\infty} B^k \frac{k!}{(k-n)!} \rho^{k-n} \quad \text{для } \rho \leq \rho_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

В качестве области Δ возьмем достаточно малый фиксированный шар с центром в точке P . Пусть $\Delta(P)$ есть этот шар. Ряд σ_n , равномерно сходящийся в этом шаре, мажорирует ряд S_n . Следовательно, в этом шаре абсолютно и равномерно сходится ряд S_n для всякого n . В этом шаре сходится равномерно и абсолютно и ряд S , ибо сходится там равномерно ряд σ , мажорирующий S .

Поэтому, полагая

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} U_k,$$

получим, что θ монотонна по t в $\Delta(P)$ и для ее F -производной порядка n имеем

$$\theta^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} U_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Этот результат вытекает из следующей теоремы автора.

Пусть σ — бесконечный ряд функций класса (t, Δ, A) и пусть σ — ряд их F -производных. Если ряд σ сходится равномерно в Δ , а ряд S сходится хотя бы в одной точке области Δ , тогда S сходится равномерно в области Δ , его сумма принадлежит классу (t, Δ, A) и ее F -производная равна сумме ряда σ [3].

Очевидно, имеем

$$\theta_0^{(n)} = f_0^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Как известно (см. [2], стр. 366), из (11) следует, что f и θ совпадают в $\Delta(P)$.

Теорема доказана.

Կ. Դ. ԶԱՏՈՒՆՆԻՍԿԱՅԱ

F -ՄՈՆՈԳԵՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՏԻԱՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիցույ f -ը և t -ն հիպերկոմպլեքս ֆունկցիաներ են $x_1, \dots, x_s$ ($s \geq 2$) իրական փոփոխականներից, որոնց արժեքները ընկած են ինչ որ միավոր-ված դուգորդա-տեղափոխական գծային հանրահաշվում, իրական թվերի դաշ-տում:

Ապացուցվում է, որ եթե f -ի և t -ի կոմպոնենտները անալիտիկ ֆունկ-ցիաներ են մի տիրույթում, որտեղ f -ը t -ի նկատմամբ մոնոգեն է Ֆեդո-րովի իմաստով, ապա նշված տիրույթի լուրաքանչյուր կետի մի ինչ որ շրջակայքում f -ը միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է t -ից:

K. D. ZATULOVSKAYA

F -MONOGENIC ANALYTIC FUNCTIONS

S u m m a r y

Let f and t be hypercomplex functions of several real variables $x_1, \dots, x_s$ ($s \geq 2$) with their values in an associative-commutative linear algebra over the real number field with an identity element.

Here we prove that if the components of f and t are analytic functions in a domain where f is monogenic with respect to t in the sense of Feodorov then f is a single-valued analytic function in a neighbourhood of each point of that domain.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. С. Федоров. Моногенность, Мат. сб., 18/60, 1946, 353—378.
2. В. С. Федоров. Основные свойства обобщенных моногенных функций, Изв. высш. учебн. зав., Математика, 1958, № 6 (7), 257—265.
3. К. Д. Затуловская. Об уравнениях в полных дифференциалах и моногенных функциях в смысле В. С. Федорова, Bull. math. soc. Roum. Sci, 4 (52), № 2, 1960, 109—119.