ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

И. В. КОВАЛИШИНА

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКТИВНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

1°. В статье рассматривается аналитическая матрица-функция, удовлетворяющая условиям:

$$W(\lambda)\,J\,W^*(\lambda) - J \geqslant 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0), \tag{1.1}$$

$$\overline{W(\lambda)} = W(\bar{\lambda}), \tag{1.2}$$

$$W'(\lambda)\,Jj\,W(\lambda) \equiv Jj, \tag{1.3}$$

которую мы будем в дальнейшем называть цепной. Здесь $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ и $j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ связаны соотношением $Jj = -jJ^*$.

Цепную матрицу-функцию $W(\lambda)$ назовем реактивной, если она аналитическая и J-унитарная на мнимой оси, то есть если

$$W(\lambda)\,J\,W^*(\lambda) = J \quad (\operatorname{Re}\lambda = 0). \tag{1.4}$$

Из (1.2) и (1.4) вытекает возможность аналитического продолжения реактивной матрицы-функции $W(\lambda)$ в левую полуплоскость, где она будет J-нерастягивающей, и справедливость тождества

$$W(-\lambda)\,J\,W'(\lambda) = J \tag{1.5}$$

во всей расширенной комплексной плоскости, после чего из (1.5) и (1.3) легко следует:

$$jW(-\lambda)\,j = W(\lambda).$$

В связи с этим, реактивная матрица-функция $W(\lambda)$, имеющая полюс порядка k в точке λ_0, будет одновременно иметь полюсы того же порядка и в точках $\bar{\lambda}_0$, $-\bar{\lambda}_0$, $-\lambda_0$, и разложения в ряд Лорана в окрестностях этих полюсов имеют вид:

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 c}{(\lambda-\lambda_0)^k} + \cdots,$$

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 \bar{c}}{(\lambda-\bar{\lambda}_0)^k} + \cdots,$$

---

* Материал, излагаемый в этой статье, тесно связан с [2]. Однако, дополнительное по сравнению с условиями (1), (2) работы [2], условие

$$W'(\lambda)\,Jj\,W(\lambda) = Jj$$

значительно усложняет вопрос о расщеплении цепной матрицы-функции на множители.

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0(-1)^k j\bar{c}j}{(\lambda+\bar{\lambda}_0)^k} + \cdots,$$

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0(-1)^k jcj}{(\lambda+\lambda_0)^k} + \cdots.$$

Простейшую реактивную матрицу-функцию $R(\lambda)$, голоморфную во всех точках расширенной комплексной плоскости за исключением четырех точек λ_0, $\bar{\lambda}_0$, $-\bar{\lambda}_0$, $-\lambda_0$, в которых она имеет полюсы первого порядка, и нормированную условием $R(\infty) = I$, будем называть элементарным реактивным множителем и записывать так:

$$R(\lambda) = I + \frac{2\sigma_0 A}{\lambda-\lambda_0} + \frac{2\sigma_0\bar{A}}{\lambda-\bar{\lambda}_0} - \frac{2\sigma_0 j\bar{A}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0} - \frac{2\sigma_0 jAj}{\lambda+\lambda_0}.$$

Здесь мы считаем, что $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$, $\operatorname{Im}\lambda_0 > 0$.

Элементарный реактивный множитель можно, очевидно, разложить на произведение четырех комплексных множителей:

$$R(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0\tilde{P}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right) \times$$

$$\times\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}j}{\lambda+\lambda_0}\right) = b_{\lambda_0}(\lambda)\, b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\, b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\, b_{-\lambda_0}(\lambda),$$

где $P^2 = P$, $PJ \geqslant 0$, $\tilde{P}^2 = \tilde{P}$, $\tilde{P}J \geqslant 0$, $Q^2 = Q$, $QJ \geqslant 0$, $\tilde{Q}^2 = \tilde{Q}$, $\tilde{Q}J \geqslant 0$.

При этом произведения $b_{\lambda_0}(\lambda)\, b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ и $b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\, b_{-\lambda_0}(\lambda)$ на основании (1.2) и [2] будут вещественными элементарными множителями.

2°. Рассмотрим разложение цепной матрицы-функции $W(\lambda)$ в ряд Лорана в окрестности точки λ_0:

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 c}{(\lambda-\lambda_0)^k} + \cdots.$$

Тогда справедливы и разложения:

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0\bar{c}}{(\lambda-\bar{\lambda}_0)^k} + \cdots,$$

$$W^{-1}(\lambda) = \frac{2\sigma_0 jJc'Jj}{(\lambda-\lambda_0)^k} + \cdots,$$

$$W^{-1}(\lambda) = \frac{2\sigma_0 jJc^*Jj}{(\lambda-\bar{\lambda}_0)^k} + \cdots.$$

Будем отщеплять от матрицы-функции $W(\lambda)$ друг за другом четыре множителя, пользуясь формулами отщепления

$$c^*Jcx = c^*, \qquad P = cxJ.$$

Множители $b_{\lambda_0}(\lambda)$, $b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ отщепим от матрицы-функции $W(\lambda)$ слева:

$$b_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\,W(\lambda)=W_1(\lambda),$$

$$b_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)\,W_1(\lambda)=b_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\,W(\lambda)=W_2(\lambda).$$

Легко проверить, что повышение порядка полюсов λ_0, $\bar{\lambda}_0$ матрицы-функции $W_2^{-1}(\lambda)=W^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ является лишь кажущимся. Отщепим от $W_2^{-1}(\lambda)$ последовательно элементарные множители $\beta_{\lambda_0}(\lambda)$, $\beta_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ справа.

Тогда

$$W_2^{-1}(\lambda)\,\beta_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)=W_3^{-1}(\lambda),$$

$$W_3^{-1}(\lambda)\,\beta_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)=W_2^{-1}(\lambda)\,\beta_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\,\beta_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)=W^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,\beta_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\beta_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)=$$

$$=W^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\lambda_0}(\lambda)=W_4^{-1}(\lambda)$$

и

$$W(\lambda)=b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\lambda_0}(\lambda)\,W_4(\lambda).$$

Можно доказать, что произведение

$$b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\lambda_0}(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\bar{P}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\times$$

$$\times\left(I-\frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{Q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$$

является элементарным реактивным множителем, а $W_4(\lambda)$ остается цепной матрицей-функцией.

Этот процесс отщепления приводит к основной теореме.

Теорема 1. *Реактивная рациональная матрица-функция $W(\lambda)$ разлагается на произведение конечного числа элементарных реактивных множителей:*

$$W(\lambda)=R_1(\lambda)\,R_2(\lambda)\cdots R_k(\lambda)\,V$$

где V — постоянная, J — унитарная вещественная матрица, удовлетворяющая равенству $V'JjV=Jj^*$.

3°. Таким образом, изучение реактивной матрицы-функции $W(\lambda)$ сводится к описанию структуры элементарного реактивного множителя $R(\lambda)$.

Однако, структура элементарного реактивного множителя настолько сложна, что удовлетворительное описание его можно получить лишь для реактивного множителя первого ранга:

---

* Теорема 1 для матрицы $W(\lambda)$ второго порядка известна давно в теории цепей [5]. Здесь удобно описание и реализацию элементарного множителя $R(\lambda)$ осуществлять с помощью так называемой матрицы сопротивлений $Z(\lambda)$, связанной с $R(\lambda)$ преобразованием $Z(\lambda)=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}R(\lambda)+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}R(\lambda)+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}$. В общем случае этот прием неприемлем, так как матрицы $Z(\lambda)$ и $Z^{-1}(\lambda)$ могут не иметь смысла.

$$r(\lambda)=I+\frac{2\sigma_0 A}{\lambda-\lambda_0}+\frac{2\sigma_0\bar{A}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}-\frac{2\sigma_0 j\bar{A}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}-\frac{2\sigma_0 jAj}{\lambda+\lambda_0},$$

где A — матрица первого ранга. Множитель такого вида будем также называть примарным.

Затем, как и в статье [2], мы покажем, что произвольный элементарный реактивный множитель разлагается на произведение реактивных множителей первого ранга.

Рассмотрим примарный реактивный множитель

$$r(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{q}j}{\lambda+\lambda_0}\right),$$

записанный в виде произведения двух вещественных множителей.

Очевидно, что p, $\tilde{p}$, q, $\bar{q}$ — проекторы первого ранга, то есть

$$p=Jg^*g,\quad gJg^*=1,\quad \tilde{p}=J\tilde{g}^*\tilde{g},\quad \tilde{g}J\tilde{g}^*=1,\quad q=Jh^*h,$$

$$hJh^*=1,\quad \bar{q}=J\bar{h}^*\bar{h},\quad \bar{h}J\bar{h}^*=1.$$

В [2] показано, что орты g и h, порождающие проекторы p и q удовлетворяют условиям:

$$|\bar{g}Jg^*|<\sec\theta,\qquad |\bar{h}Jh^*|<\sec\theta\quad (\theta=\arg\lambda_0).$$

Будем считать, что g и h правильно нормированы, то есть

$$\bar{g}Jg^*=\operatorname{th}a\sec\theta e^{i\theta},$$
$$\bar{h}Jh^*=-\operatorname{th}b\sec\theta e^{i\theta}.$$

Тогда векторы $\tilde{g}$ и $\bar{h}$, порождающие проекторы $\tilde{p}$ и $\bar{q}$ запишутся так:

$$\tilde{g}=\operatorname{ch}a\bar{g}-\operatorname{sh}a\,g,$$

$$\bar{h}=\operatorname{ch}b\bar{h}+\operatorname{sh}b\,h.$$

Введем, кроме того, дополнительно параметры

$$gjJg^*=i\alpha\operatorname{tg}\theta,$$
$$hjJh^*=i\beta\operatorname{tg}\theta.$$

Легко видеть, что α и β являются действительными числами.

Доказана следующая

Теорема 2. *Для того чтобы примарный множитель*

$$r(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$$

был реактивным, необходимо и достаточно, чтобы между векторами g и h существовала следующая двусторонняя связь:*

* Из доказательства необходимости вытекает, что $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$.

$$
\begin{aligned}
h &= x(\bar{g} - \alpha \bar{g} j) + y \tilde{g} j, \\
\tilde{g} &= x_1(\tilde{h} - \beta \tilde{h} j) + y_1 \bar{h} j.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Следствие. *Если между векторами g и h существует двусторонняя связь, то она может быть записана в следующей уточненной форме:*

$$h = \operatorname{ch} s e^{i\varphi} \frac{\bar{g} - \alpha \bar{g} j}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \tilde{g} j,$$

$$\tilde{g} = \operatorname{ch} s e^{-i\varphi} \frac{\tilde{h} - \beta \tilde{h} j}{\sqrt{1-\beta^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \bar{h} j,$$

причем между параметрами α, β, $\operatorname{th} a$, $\operatorname{th} b$ *векторов* g *и* h *и параметрами связи* s, φ, ψ *имеют место соотношения:*

$$\frac{1-\alpha^2}{1-\operatorname{th}^2 a} = \frac{1-\beta^2}{1-\operatorname{th}^2 b}, \tag{3.2}$$

$$0 \leqslant \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \cdot \frac{\operatorname{th} b - \operatorname{th} a}{\operatorname{th} b + \operatorname{th} a} < 1, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{th}^2 s = \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \cdot \frac{\operatorname{th}^2 b - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th}^2 a + \operatorname{th}^2 b - 2 \operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos 2\psi}, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b} \operatorname{tg} \psi. \tag{3.5}$$

Отметим, что теорема 2 носит условный характер, так как пока неясно, являются ли требования двусторонне совместимыми. Имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы из равенства*

$$h = \operatorname{ch} s e^{i\varphi} \frac{\bar{g} - \alpha \bar{g} j}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \tilde{g} j$$

вытекало

$$\tilde{g} = \operatorname{ch} s e^{-i\varphi} \frac{\tilde{h} - \beta \tilde{h} j}{\sqrt{1-\beta^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \bar{h} j,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (3.2), (3.4), (3.5).

Пусть теперь задан примарный вещественный множитель с полюсами в точках λ_0, $\bar{\lambda}_0$:

$$z_1(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right),$$

Будем среди примарных вещественных множителей с полюсами в точках $-\bar{\lambda}_0$, $-\lambda_0$ искать множитель, дополняющий $z_1(\lambda)$ до реактивного.

Правила отыскания дополняющего множителя сформулированы и доказаны в следующей теореме.

Теорема 4. *Для любого примарного вещественного множителя*

$$z_1(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \bar{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right),$$

удовлетворяющего условию $|\alpha| < 1$, *существует и притом бесконечное множество, вещественных множителей первого ранга*

$$z_2(\lambda) = \left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right)$$

таких, что произведение

$$r(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right)$$

будет примарным реактивным множителем.

Построение любого правильно нормированного вектора h, *порождающего дополняющий вещественный множитель, проводится следующим образом:*

1. *По паре чисел (действительных)* α, $\operatorname{th} a$ *выбирается произвольно вторая пара чисел* β, $\operatorname{th} b$, *удовлетворяющая соотношениям:*

$$\frac{1 - \alpha^2}{1 - \operatorname{th}^2 a} = \frac{1 - \beta^2}{1 - \operatorname{th}^2 b},$$

$$0 \leqslant \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\operatorname{th} b - \operatorname{th} a}{\operatorname{th} b + \operatorname{th} a} < 1.$$

2. *Выбираем произвольно* ψ, *удовлетворяющее неравенству*

$$\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\operatorname{th}^2 b - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th}^2 a + \operatorname{th}^2 b - 2 \operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos 2\psi} < 1.$$

3. *Определяем* $\operatorname{th} s$ *и* $\operatorname{tg} \varphi$ *по формулам*

$$\operatorname{th}^2 s = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\operatorname{th}^2 b - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th}^2 a + \operatorname{th}^2 b - 2 \operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos 2\psi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b} \operatorname{tg} \psi.$$

4. *Строим вектор* h, *полагая*

$$h = \operatorname{ch} s\, e^{i\varphi} \frac{\bar{g} - \alpha \bar{g} j}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + \operatorname{sh} s\, e^{i\psi} \bar{g} j.$$

4°. В заключение докажем, что элементарный реактивный множитель $R(\lambda)$ разлагается на произведение примарных реактивных множителей. Рассмотрим

$$R(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{P}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}j}{\lambda + \lambda_0}\right) =$$
$$= Z_1(\lambda) Z_2(\lambda),$$

записанный в виде произведения двух вещественных элементарных множителей. Отщепим от $Z_1(\lambda)$, на основании теоремы 4 [2], примарный вещественный множитель, порожденный правильно нормированным ортом $g \in HP$, а от $Z_2(\lambda)$ — примарный вещественный множитель, порожденный ортом $h \in HQ$:

$$Z_1(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{P}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right),$$

$$Z_2(\lambda)=\left(I-\frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jQ_1j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}_1j}{\lambda+\lambda_0}\right)$$

и, следовательно,

$$R(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{P}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\times$$

$$\times\left(I-\frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jQ_1j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}_1j}{\lambda+\lambda_0}\right).$$

Переставим местами второй и третий вещественные множители:

$$R(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\hat{q}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\hat{\tilde{q}}j}{\lambda+\lambda_0}\right)\times$$

$$\times\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{P}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\tilde{P}}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jQ_1j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}_1j}{\lambda+\lambda_0}\right).$$

Для того чтобы множитель

$$\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\hat{q}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\hat{\tilde{q}}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$$

был реактивным, необходимо и достаточно, чтобы между векторами g и $\hat{h}$ $(\hat{q}=J\hat{h}^*\hat{h})$ существовала двусторонняя связь (3.1).

Таким образом, вопрос сводится к существованию вектора $h \in HQ$ такого, что g и $\hat{h}$ удовлетворяют соотношениям (3.1).

Однако, здесь целесообразнее воспользоваться другим критерием реактивности примарного множителя.

Из тождества $r(\lambda)\equiv Jjr^{-1'}(\lambda)\,j\,J$

$$\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)=$$

$$=\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{p}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{p}j}{\lambda+\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{q}}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \tilde{q}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$$

видно, что второй вещественный множитель, дополняющий первый до примарного реактивного, после перестановки его на первое место имеет вид:

$$\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{p}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{\bar{p}}j}{\lambda+\lambda_0}\right).$$

Существенно то, что это условие является не только необходимым, но и достаточным для реактивности $r(\lambda)$.

Имея в виду этот критерий реактивности $r(\lambda)$ и производя над вещественными множителями перестановки, аналогичные перестановкам в теореме 4 [2], приходим к теореме.

Теорема 5. *Пусть дан элементарный реактивный множитель*

$$R(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\widetilde{P}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\times$$

$$\times\left(I-\frac{2\sigma_0 j\widetilde{Q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)=Z_1(\lambda)\,Z_2(\lambda).$$

Для любого наперед заданного примарного вещественного множителя $\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$, *отщепляемого от* $Z_1(\lambda)$, *найдется один и только один вещественный примарный множитель* $\left(I-\frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\times$ $\times\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$, *отщепляемый от* $Z_2(\lambda)$, *такой, что после перестановки произведение*

$$r(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\hat{p}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\hat{\tilde{p}}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$$

будет примарным реактивным множителем и будет отщепляться от $R(\lambda)$.

Повторяя $m-1$ раз $\{r(P_1)=m\}$ процесс отщепления, получаем разложение элементарного реактивного множителя на произведение m примарных множителей.

Таким образом, реактивная матрица-функция $W(\lambda)$ может быть разложена на произведение примарных реактивных множителей*.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Поступило 12. VI. 65

---

* Задача о разложении цепной матрицы-функции на примарные множители рассматривалась и в работах А. Г. Руткаса [3], [4]. Однако, ему удалось получить расщепление лишь в некоторых частных случаях.

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՌԵԱԿՏԻՎ ՄԱՏՐԻՑԱ-ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՒԼՏԻՊԼԻԿԱՏԻՎ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածը նվիրված է J—երկայնող $W(\lambda)$ մատրիցա-ֆունկցիաների առաջին կարգի պարզագույն արտադրիչների վերլուծությանը։

Տրվում է պարզագույն իրական արտադրիչի $Z(\lambda)$ գաղափարը և ապացուցվում է թեորեմ J—երկայնող իրական ռացիոնալ մատրիցա-ֆունկցիայի պարզագույն իրական արտադրիչների վերլուծության մասին։

Դիտարկված են $z(\lambda)$ իրական լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

Նկարագրված է առաջին կարգի $z(\lambda)$ արտադրիչի ստրուկտուրան և նշված են նրա իրական լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

Ապացուցված է կամայական պարզագույն իրական արտադրիչի առաջին կարգի իրական արտադրիչների վերլուծելիության մասին թեորեմը։

I. V. KOVALISHINA

MULTIPLICATIVE STRUCTURE OF ANALYTICAL REACTANCE MATRIX—FUNCTIONS

S u m m a r y

This paper deals with the decomposition of J—stretching matrix functions into elementary factors of the first order.

The notion of elementary real factor ($Z(\lambda)$) is given and a theorem, concerning the decomposition of J-stretching real rational matrix functions into those factors, is proved.

Necessary and sufficient conditions are also stated under which $Z(\lambda)$ should be real.

We describe the structure of $Z(\lambda)$—a factor of first order—and point out necessary and sufficient conditions for the latter to be real.

We also prove a theorem relating to the decomposibility of an arbitrary elementary real factor into similar ones of the first order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов*. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды Московского математического общества, 4, 1955.
2. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов*. Мультипликативная структура аналитических вещественных J-растягивающих матриц-функций, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 6, 1965.
3. *А. Г. Руткас*. О цепочечном синтезе реактивного многополюсника, Труды Харьковского горного ин-та, XI, 1962, 89—94.
4. *А. Г. Руткас*. Передаточная матрица пассивного многополюсника, Труды Харьковского горного ин-та, XI, 1962.
5. *W. Cauer*. Theorie der linearen Wechselstroms-chaltungen, Academie—Verlag Berlin, 1954.