

К. А. АБГАРЯН

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений вида

$$A(\tau, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon) x + f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t), \quad (1)$$

где $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка n , допускающие разложения:

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau), \quad (0 \leq \tau \leq L). \quad (2)$$

В предположении, что $f(t, \tau, \varepsilon)$ есть вектор-функция вида $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(\tau) e^{i\theta(t, \varepsilon)}$ (в частности, нуль), где $\frac{d\theta}{dt} = k(\tau)$, причем, $k(\tau)$, $p_k(\tau)$ имеют на сегменте $0 \leq \tau \leq L$ достаточное число производных по τ , в работах [1]—[6] показано существование преобразований, приводящих к асимптотическому расщеплению системы (1) на независимые подсистемы меньшего порядка и указаны соответствующие способы построения формального процесса для такого расщепления.

В настоящей статье рассматривается общий случай, когда $f(t, \tau, \varepsilon)$ — произвольная непрерывная вектор-функция, регулярная относительно ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Так же как и в цитированных выше работах мы пользуемся асимптотическими методами, разработанными Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [7], [8].

2. Квадратную матрицу $u(\tau)$, собственные числа которой разбиты на p групп $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_{k_s}^{(s)}$ ($s = 1, \dots, p$; $\sum_{s=1}^p k_s = n$) так, что на сегменте $[0, L]$ выполняются условия

$$|\lambda_i^{(s)} - \lambda_j^{(s)}| > c > 0 \quad (s \neq s; i = 1, \dots, k_s; j = 1, \dots, k_s), \quad (3)$$

при каждом фиксированном $\tau \in [0, L]$ можно представить так [9]:

$$u = \sum_{s=1}^p K_s \Lambda_s M_s, \quad (4)$$

где K_s , Λ_s , M_s — матрицы типа, соответственно, $n \times k_s$, $k_s \times k_s$, $k_s \times n$, удовлетворяющие равенствам:

$$M_s K_s = \begin{cases} E_{k_s} & (s = \sigma), \\ 0 & (s \neq \sigma). \end{cases} \quad (5)$$

(E_r — единичная матрица порядка r).

Собственные числа матрицы Λ_σ суть собственные числа матрицы u , включенные в группу τ .

Введя коагулированные матрицы

$$K = (K_1 \dots K_p), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix},$$

будем также иметь:

$$u = K \Lambda M, \quad (6)$$

$$MK = KM = E_n. \quad (7)$$

В качестве матрицы K_σ может быть взята любая матрица, составленная из k_σ линейно независимых линейных комбинаций столбцов матрицы

$$\Delta_\sigma(u) = \prod_{s=\sigma}^p \prod_{j=1}^{k_s} (u - \lambda_j^{(s)} E_{n_s}), \quad (8)$$

ранг которой равен k_σ и, в частности, из k_σ линейно независимых столбцов этой матрицы. Зная матрицу K легко определить M и Λ , используя соотношения (6) и (7).

Пусть K_σ , Δ_σ , M_σ ($\sigma = 1, \dots, p$) — построенные таким путем матрицы. Тогда выражения $K_\sigma N_\sigma$, $N_\sigma^{-1} M_\sigma$, $N_\sigma^{-1} \Lambda_\sigma N_\sigma$, где N_σ — произвольная невырожденная матрица порядка k_σ , представляют общий вид матриц, осуществляющих разложение (4). Соответственно, если N — квазидиагональная матрица, составленная из матриц N_σ , то KN является общим выражением матриц, преобразующих матрицу u к квазидиагональному виду.

Для дальнейшего представляют интерес те матрицы K_σ , которые нужное число раз дифференцируемы на $[0, L]$. Вопрос о дифференцируемости матрицы K_σ тесно связан с дифференцируемостью матрицы $\Delta_\sigma(u)$. Покажем, что матрица $\Delta_\sigma(u)$ дифференцируема на $[0, L]$ по крайней мере столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица $u(\tau)$.

Рассмотрим многочлен с коэффициентами, зависящими от параметра τ ,

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1(\tau) \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\tau) \lambda + a_n(\tau). \quad (9)$$

Допустим, что корни этого многочлена, не обязательно разные, разбиты каким-нибудь образом на две группы: $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(2)}$. В соответствии с этим, многочлен $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda) \cdot \Delta_2(\lambda), \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= f_1(a_1, \dots, a_n), \\
 &\vdots \\
 x_k &= f_k(a_1, \dots, a_n), \\
 \beta_1 &= f_{k+1}(a_1, \dots, a_n), \\
 &\vdots \\
 \beta_m &= f_n(a_1, \dots, a_n),
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

удовлетворяющие системе (13) и условиям

$$\begin{aligned}
 x_1(\tau_0) &= f_1(a_1(\tau_0), \dots, a_n(\tau_0)), \\
 &\vdots \\
 \beta_m(\tau_0) &= f_n(a_1(\tau_0), \dots, a_n(\tau_0)),
 \end{aligned}$$

причем эти функции имеют непрерывные производные в некоторой окрестности точки $(a_1(\tau_0), \dots, a_n(\tau_0))$.

Поскольку a_j ($j=1, \dots, n$) — дифференцируемые функции от τ , то из равенств (16) следует существование производных по τ от $x_1, \dots, \beta_m$ в окрестности точки τ_0 . Учитывая это, продифференцируем равенства (13) по τ . Получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{d\beta_1}{d\tau} &= \frac{da_1}{d\tau}, \\
 \frac{dx_2}{d\tau} + x_1 \frac{d\beta_1}{d\tau} + \beta_1 \frac{da_1}{d\tau} + \frac{d\beta_2}{d\tau} &= \frac{da_2}{d\tau}, \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_k}{d\tau} \beta_m + x_k \frac{d\beta_m}{d\tau} &= \frac{da_n}{d\tau}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Решая эту систему, будем иметь

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{1}{R(\Delta_1, \Delta_2)} \psi_1 \left(a_1, \dots, \beta_m; \frac{da_1}{d\tau}, \dots, \frac{da_n}{d\tau} \right), \\
 &\vdots \\
 \frac{d\beta_m}{d\tau} &= \frac{1}{R(\Delta_1, \Delta_2)} \psi_n \left(a_1, \dots, \beta_m; \frac{da_1}{d\tau}, \dots, \frac{da_n}{d\tau} \right),
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Здесь ψ_j — функции, дифференцируемые по своим аргументам любое число раз.

Если существуют вторые производные $\frac{d^2 a_1}{d\tau^2}, \dots, \frac{d^2 a_n}{d\tau^2}$, то из

(18) можно непосредственно получить выражения для $\frac{d^2 x_1}{d\tau^2}, \dots, \frac{d^2 \beta_m}{d\tau^2}$.

Для этого достаточно продифференцировать равенства (18) по τ и в правых частях исключить $\frac{da_1}{d\tau}, \dots, \frac{d\beta_m}{d\tau}$ с помощью тех же равенств

(18). Этим путем можно получить все производные по τ от $x_1, \dots, \beta_m$ вплоть до $\frac{d^l x_1}{d\tau^l}, \dots, \frac{d^l \beta_m}{d\tau^l}$. Итак, в произвольной точке $\tau_0 \in [0, L]$ коэф-

коэффициенты многочленов Δ_1 и Δ_2 дифференцируемы столько раз, сколько раз дифференцируемы коэффициенты многочлена Δ . Тем самым лемма доказана.

Пусть теперь Δ — характеристический многочлен матрицы $u(\tau)$. Коэффициенты этого многочлена дифференцируемы по τ по крайней мере столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица $u(\tau)$. Коэффициенты матричного многочлена (8) равны коэффициентам многочлена $\Delta_\sigma(\lambda)$, корнями которого являются собственные числа матрицы u , не включенные в группу σ . Многочлен $\Delta_\sigma(\lambda)$ является множителем многочлена $\Delta(\lambda)$, причем имеют место неравенства (3). Условия леммы, таким образом, выполняются. Согласно лемме, коэффициенты многочленов $\Delta_\sigma(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ дифференцируемы одинаковое число раз. Отсюда следует, что матрица $\Delta_\sigma(u)$ дифференцируема по τ по крайней мере столько раз, сколько раз дифференцируема матрица $u(\tau)$. То же самое, очевидно, справедливо и для любой линейной комбинации столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$ с соответствующим числом раз дифференцируемыми коэффициентами.

Из вышеизложенного ясно, что если на рассматриваемом сегменте $[0, L]$ линейная независимость каких-нибудь фиксированных k_τ столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$ не нарушается, то в качестве искомой матрицы K_σ (дифференцируемой столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица u) можно взять матрицу, составленную из этих k_τ столбцов. Если же таких k_τ столбцов не окажется, то матрицу K_σ следует набрать из k_τ линейных комбинаций столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$ с соответствующим числом раз дифференцируемыми коэффициентами, выбор которых должен быть подчинен условию линейной независимости этих k_σ линейных комбинаций.

Последний случай проиллюстрируем на следующем простом примере.

Пусть u — r раз дифференцируемая на $[0, L]$ матрица третьего порядка, собственные числа которой разбиты на две непересекающиеся группы.

Допустим, что первый столбец матрицы

$$\Delta_1(u) = (\delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}),$$

ранг которой равен двум, не обращается в нуль на $[0, L]$, но два других столбца (δ_{12} и δ_{13}) в некоторых точках этого промежутка (но конечно разных) обращаются в нуль. Искомую матрицу $K_1 = (k_{11}k_{12})$ можно построить следующим образом.

Положим

$$k_{11} = \delta_{11},$$

$$k_{12} = \alpha_1\delta_{11} + \alpha_2\delta_{12} + \alpha_3\delta_{13},$$

где α_j — некоторые произвольные функции из класса $C^{(r)}$.

Линейная независимость столбцов k_{11} и k_{12} будет обеспечена, если α_j ($j = 1, 2, 3$) будут выбраны так, что

$$k_{12}(\tau) \neq 0 \quad (\tau \in [0, L]), \quad (19)$$

и что, например, скалярное произведение k_{11} и k_{12} равно нулю, т. е.

$$k_{11}^*(\tau) \cdot k_{12}(\tau) = 0 \quad (\tau \in [0, L]) \quad (20)$$

(через a^* обозначена эрмитова сопряженная матрица).

Используя условие (20), получим:

$$k_{12} = \alpha_2 \left[\dot{\gamma}_{12} - \frac{\dot{\gamma}_{11} \cdot \dot{\gamma}_{12}}{\|\dot{\gamma}_{11}\|^2} \dot{\gamma}_{11} \right] + \alpha_3 \left[\dot{\gamma}_{13} - \frac{\dot{\gamma}_{11} \cdot \dot{\gamma}_{13}}{\|\dot{\gamma}_{11}\|^2} \dot{\gamma}_{11} \right].$$

Поскольку выражения, заключенные в квадратные скобки, не могут одновременно обратиться в нуль (это противоречило бы тому, что ранг матрицы $\Delta_1(u)$ на сегменте $[0, L]$ равен 2), ясно, что соответствующим выбором $\alpha_2(\tau)$ и $\alpha_3(\tau)$ всегда можно добиться выполнения условия (19).

В последующих разделах при использовании формул (4)–(7), не оговаривая особо, будем предполагать, что матрицы u и K_σ ($\sigma=1, \dots, p$) на сегменте $[0, L]$ имеют одинаковое число производных по τ .

3. Теорема. Если на сегменте $[0, L]$ матрицы $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) имеют нужное число производных по τ , а $A_0(\tau)$, кроме того, является невырожденной матрицей, то, предполагая, что собственные числа матрицы $u(\tau) = A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$ разбиты на p групп при условии (3), формальное решение системы (1) может быть представлено так:

$$x = \sum_{\sigma=1}^p \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma, \quad (21)$$

где

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma + \bar{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\sigma=1, \dots, p), \quad (22)$$

а $\bar{K}_\sigma$, $\bar{\Lambda}_\sigma$, $\bar{M}_\sigma$, R — матрицы типа, соответственно, $n \times k_\sigma$, $k_\sigma \times k_\sigma$, $k_\sigma \times n$, $n \times n$, представляемые формальными рядами

$$\begin{aligned} \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{K}_\sigma^{[k]}(\tau), & \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{\Lambda}_\sigma^{[k]}(\tau), \\ \bar{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{M}_\sigma^{[k]}(\tau), & R(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R_k(\tau). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя формулы (21), (22), определяющие вектор x , в систему (1) и отделяя в полученном тождестве коэффициенты при y_σ ($\sigma=1, \dots, p$) и свободный член, будем иметь:

$$A(\tau, \varepsilon) \left[\varepsilon \frac{d\bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) \right] = B(\tau, \varepsilon) \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \quad (24)$$

$$(\sigma=1, \dots, p),$$

$$\left[A(\tau, \varepsilon) \sum_{\sigma=1}^n \bar{K}_{\sigma}(\tau, \varepsilon) \bar{M}_{\sigma}(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) - E_n \right] f(t, \tau, \varepsilon) = 0. \quad (25)$$

Подставим в равенство (24) разложения (2) и (23) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим:

$$\begin{aligned} uK_{\sigma}^{[0]} &= K_{\sigma}^{[0]} \Lambda_{\sigma}^{[0]}, \\ uK_{\sigma}^{[k]} &= K_{\sigma}^{[k]} \Lambda_{\sigma}^{[0]} + K_{\sigma}^{[0]} \Lambda_{\sigma}^{[k]} + D_{\sigma}^{[k-1]} \\ &\quad (\sigma = 1, \dots, p; k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\sigma}^{[k-1]} &= \sum_{j=1}^{k-1} K_{\sigma}^{[k-j]} \Lambda_{\sigma}^{[j]} + A_{\sigma}^{-1} \left[\sum_{\nu=1}^k \left(A_{\nu-1} \frac{dK_{\sigma}^{[k-\nu]}}{d\tau} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - B_{\nu} K_{\sigma}^{[k-\nu]} + \sum_{j=0}^{k-\nu} A_{\nu} K_{\sigma}^{[k-\nu-j]} \Lambda_{\sigma}^{[j]} \right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Положим

$$K_{\sigma}^{[k]}(\tau) \equiv K_{\sigma}(\tau), \quad \Lambda_{\sigma}^{[0]}(\tau) \equiv \Lambda_{\sigma}(\tau). \quad (28)$$

При этом первое равенство (26) выполняется тождественно.

Пусть $K_{\sigma}^{[0]}, \Lambda_{\sigma}^{[0]}, \dots, K_{\sigma}^{[k-1]}, \Lambda_{\sigma}^{[k-1]}$ уже найдены. Определим $K_{\sigma}^{[k]}$ и $\Lambda_{\sigma}^{[k]}$. Отметим, что теперь $D_{\sigma}^{[k-1]}$ является известной матрицей.

Умножим $k+1$ -ое равенство (26) слева на M . Получим:

$$\Lambda Q_{\sigma}^{[k]} = Q_{\sigma}^{[k]} \Lambda_{\sigma} + MK_{\sigma} \Lambda_{\sigma}^{[k-1]} + MD_{\sigma}^{[k-1]}, \quad (29)$$

где

$$Q_{\sigma}^{[k]} = MK_{\sigma}^{[k]}. \quad (30)$$

Коагулируем матрицу $Q_{\sigma}^{[k]}$, состоящую из n строк и k_{σ} столбцов, следующим образом:

$$Q_{\sigma}^{[k]} = \begin{pmatrix} Q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ Q_{p\sigma}^{[k]} \end{pmatrix},$$

где $Q_{s\sigma}^{[k]}$ — субматрица типа $k_s \times k_{\sigma}$ ($Q_{s\sigma}^{[k]} = M_s K_{\sigma}^{[k]}$). Тогда, так как Λ имеет квазидиагональную структуру, то равенство (29) распадается на следующие p независимых матричных равенств:

$$\Lambda_{\sigma} Q_{s\sigma}^{[k]} = Q_{s\sigma}^{[k]} \Lambda_{\sigma} + \Lambda_{\sigma}^{[k]} + M_{\sigma} D_{\sigma}^{[k-1]}, \quad (31)$$

$$\Lambda_s Q_{s\sigma}^{[k]} = Q_{s\sigma}^{[k]} \Lambda_{\sigma} + M_s D_{\sigma}^{[k-1]} \quad (s \neq \sigma). \quad (32)$$

Из (31) непосредственно находим:

$$\Lambda_{\sigma}^{[k]} = \Lambda_{\sigma} Q_{s\sigma}^{[k]} - Q_{s\sigma}^{[k]} \Lambda_{\sigma} - M_{\sigma} D_{\sigma}^{[k-1]}. \quad (33)$$

Здесь $Q_{s\sigma}^{[k]}$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая квадратная матрица порядка k_{σ} . В частности, можно принять $Q_{s\sigma}^{[k]} = 0$.

Равенства же (32) однозначно определяют $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ ($s = 1, \dots, p; s \neq \sigma$), так как Λ_s и Λ_σ не имеют общих собственных чисел.

Определив из (32) $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ ($s \neq \sigma$) и задавшись матрицей $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$, найдем $Q_\sigma^{[k]}$, после чего легко получить $K_\sigma^{[k]}$ по формуле

$$K_\sigma^{[k]} = K Q_\sigma^{[k]} \quad (34)$$

(см. (30)).

Таким образом, с помощью, рекуррентных формул (33), (32), (34) можно последовательно определить $\Lambda_\sigma^{[1]}$, $K_\sigma^{[1]}$, $\Lambda_\sigma^{[2]}$, $K_\sigma^{[2]}$, ...

Теперь о построении матриц $\bar{M}$ и R , фигурирующих в соотношении (25).

Это соотношение можно представить в виде

$$[A(\tau, \varepsilon) \bar{K}(\tau, \varepsilon) \bar{M}(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) - E_n] f(t, \tau, \varepsilon) = 0, \quad (35)$$

где

$$\bar{K} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k K^{[k]}, \quad \bar{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M^{[k]},$$

$$K^{[k]} = (K^{[k]}_1 \dots K^{[k]}_p), \quad M^{[k]} = \begin{pmatrix} M^{[k]}_1 \\ \vdots \\ M^{[k]}_p \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Легко проверить, что если члены формальных рядов $\bar{M}$ и R определить посредством рекуррентных формул

$$M^{[0]} = M, \quad M^{[k]} = -M \sum_{l=1}^k K^{[l]} M^{[k-l]} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (37)$$

$$R_0 = A_0^{-1}, \quad R_k = -A_0^{-1} \sum_{l=1}^k A_l R_{k-l} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то будут иметь место равенства

$$\begin{aligned} \bar{K}(\tau, \varepsilon) \bar{M}(\tau, \varepsilon) &= E_n, \\ A(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) &= E_n,^* \end{aligned} \quad (38)$$

а значит, будет выполняться и равенство (25).

* Эти равенства следует понимать в том смысле, что для любого m

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon^k K^{[k]} \cdot \sum_{k=0}^m \varepsilon^k M^{[k]} - E_n = O(\varepsilon^{m+1}),$$

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon^k A_k \cdot \sum_{k=0}^m \varepsilon^k R_k - E_n = O(\varepsilon^{m+1}).$$

4. Через $x_m(t, \varepsilon)$ обозначим вектор, определенный равенствами (21) и (22), если в формулах (23) ограничиться членами порядка не выше m относительно ε .

Используя метод построения асимптотической оценки, приведенный в [8], можно показать, что если

$$x|_{t=t_1} = x_m|_{t=t_1},$$

то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для некоторых постоянных c_m и ε_1 ($\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$) на сегменте $t_1 \leq t \leq t_2$, $t_1, t_2 \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon_1}\right]$ имеет место оценка

$$\|x - x_m\| \leq c_m \varepsilon^{m+1} \quad (\varepsilon < \varepsilon_1, t \in [t_1, t_2]). \quad (39)$$

Если, помимо сделанных выше предположений, все собственные числа эрмитовой матрицы $P = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*)$ неположительны, то

$$\|x - x_m\| \leq c_m \varepsilon^{m-1} \quad \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]\right).$$

В случае однородной системы имеет место оценка

$$\|x - x_m\| \leq c_m \varepsilon^m \quad \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]\right).$$

Таким образом, формальное решение x_m имеет асимптотический характер.

Замечание. Матрицы $\bar{K}_\sigma$ и $\bar{\Lambda}_\sigma$ не зависят от $f(t, \tau, \varepsilon)$. Поэтому для получения решения однородной системы достаточно в приведенных выше соотношениях положить $f(t, \tau, \varepsilon) = 0$.

5. Интересно отметить связь введенных выше матриц $\bar{M}_\sigma$ с асимптотическим решением сопряженной однородной системы.

Пусть, для простоты, $A(\tau, \varepsilon) \equiv E_n$. Тогда решение системы (1) представляется в виде

$$x = \sum_{\sigma=1}^p \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma, \quad (40)$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma + \bar{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\sigma = 1, \dots, p). \quad (41)$$

Нетрудно показать, что формальное решение сопряженной однородной системы

$$\frac{dz}{dt} = -B^*(\tau, \varepsilon) z \quad (42)$$

может быть представлено равенствами

$$z = \sum_{\sigma=1}^p \bar{M}_\sigma^* v_\sigma, \quad (43)$$

$$\frac{dv_\sigma}{dt} = -\bar{\Lambda}_\sigma^* v_\sigma, \quad (44)$$

где $\bar{M}_\sigma^*$ и $\bar{\Lambda}_\sigma^*$ — матрицы, фигурирующие в формуле (41).

6. Покажем, наконец, что в случае системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами применение метода, изложенного выше, приводит к известным результатам классической теории линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений

$$A \frac{dx}{dt} = Bx + f(t), \quad (45)$$

где A и B — постоянные матрицы, причем A — невырожденная матрица. Согласно вышеизложенному, решение этой системы представляется равенствами

$$x = \sum_{\sigma=1}^p \tilde{K}_{\sigma} y_{\sigma}, \quad (46)$$

$$\frac{dy_{\sigma}}{dt} = \tilde{\Lambda}_{\sigma} y_{\sigma} + \tilde{M}_{\sigma} A^{-1} f(t) \quad (\sigma = 1, \dots, p). \quad (47)$$

Так как в данном случае $u = A^{-1}B$ — постоянная матрица, то K_{σ} , Λ_{σ} , M_{σ} ($\sigma = 1, \dots, p$) — также постоянные матрицы. Учитывая это, из (32) последовательно при $k = 1, 2, \dots$ получаем:

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = 0, \quad (s \neq \sigma; k = 1, 2, \dots),$$

так как $\frac{dK_{\sigma}}{dt} = 0$. Полагая и $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$ ($\sigma = 1, \dots, p$), будем иметь:

$$\Lambda_{\sigma}^{[k]} = 0,$$

$$K_{\sigma}^{[k]} = 0,$$

$$M_{\sigma}^{[k]} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, p; k = 1, 2, \dots).$$

Таким образом,

$$\tilde{K}_{\sigma} = K_{\sigma}, \quad \tilde{\Lambda}_{\sigma} = \Lambda_{\sigma}, \quad \tilde{M}_{\sigma} = M_{\sigma}.$$

Повторю равенства (46) и (47) принимают вид:

$$x = \sum_{\sigma=1}^p K_{\sigma} y_{\sigma}, \quad (46')$$

$$\frac{dy_{\sigma}}{dt} = \Lambda_{\sigma} y_{\sigma} + M_{\sigma} A^{-1} f(t) \quad (\sigma = 1, \dots, p). \quad (47')$$

Решая (47'), находим

$$y_{\sigma} = e^{\Lambda_{\sigma} t} C_{\sigma} + \int_0^t e^{\Lambda_{\sigma}(t-t')} M_{\sigma} A^{-1} f(t') dt',$$

где C_{σ} — матрица произвольных постоянных.

В соответствии с этим

$$x = \sum_{\sigma=1}^p K_{\sigma} e^{\Lambda_{\sigma} t} C_{\sigma} + \int_0^t \sum_{\sigma=1}^p K_{\sigma} e^{\Lambda_{\sigma}(t-t')} M_{\sigma} A^{-1} f(t') dt'.$$

Преобразуем последнее выражение. Полагая

$$C_{\sigma} = M_{\sigma} x(0)$$

и учитывая, что

$$\sum_{\sigma=1}^p K_{\sigma} e^{\Lambda_{\sigma} t} M_{\sigma} = e^{K \Lambda M t} = e^{u t},$$

получим

$$x = e^{u t} x(0) + \int_0^t e^{u(t-t')} A^{-1} f(t') dt',$$

что представляет собой известное выражение для общего решения системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Московский ордена Ленина авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило 10. IV. 65

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

ԴԻՄԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ
ՃԵՂՔՄԱՆ ՄԵԹՈԴԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում շարադրված է ասիմպտոտիկ ճեղքման մեթոդը հետևյալ
դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմների համար:

$$A(\tau, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon) x + f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t),$$

որտեղ $A(\tau, \varepsilon)$ -ը և $B(\tau, \varepsilon)$ -ը n կարգի քառակուսային մատրիցաներ են,
որոնք թույլ են տալիս հետևյալ վերածումը՝

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau),$$

իսկ $f(t, \tau, \varepsilon)$ -ը անընդհատ վեկտոր-ֆունկցիա է, ε -ի նկատմամբ, ռեզուլյար
 $\varepsilon = 0$ կետի շրջակայքում:

K. A. ABGARIAN

THE METHOD OF ASYMPTOTICAL SPLITTING OF A SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper we set forth the method of asymptotical splitting for the following system of differential equations

$$A(\tau, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon) x + f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t),$$

where A and B are square matrices of order n permitting the expansions

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau)$$

$$B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau)$$

while f is an arbitrary vector function regular with respect to ε in a neighbourhood of $\varepsilon = 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Э. Штокало. Критерия устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Матем. сб., 19 (61), № 2, 1946.
2. С. Ф. Фещенко. Малые колебания системы с конечным числом степеней свободы, Уч. зап. Киевск. пед. инст., 9, № 4, 1949.
3. С. Ф. Фещенко. Об асимптотическом приведении интегралов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Доклады АН УССР, № 1, 1949.
4. Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн. О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, Укр. матем. журн., 2, № 4, 1950.
5. Ю. Л. Далецкий. Об асимптотическом решении одного векторного дифференциального уравнения, ДАН СССР, 92, № 5, 1953.
6. Н. И. Шкиль. Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, ДАН СССР, 150, № 5, 1963.
7. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, 1937.
8. Н. Н. Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945.
9. К. А. Абгарян. Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Известия АН АрмССР, 18, № 2, 1965.