ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

Г. Ц. ТУМАРКИН

ОПИСАНИЕ КЛАССА ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДРОБЯМИ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

Пусть задана таблица $\{\alpha_{kj}\}$ комплексных чисел

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1N_1} \\ \vdots \\ \alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kN_k} \\ \cdots\cdots \end{matrix}, \qquad N_k \leqslant \infty, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{1}$$

подчиненных лишь единственному условию: $|\alpha_{kj}| \neq 1$.

В ряде работ Уолша, а также других математиков, рассматривалась задача о нахождении необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять заданная на $|z| = 1$ функция $F(e^{i\theta})$, чтобы ее можно было с любой точностью приблизить в метрике соответствующего пространства последовательностью рациональных дробей $\{R_k(z)\}$, имеющих своими полюсами лишь точки таблицы (1). Последнее означает, что полюсами k-ой дроби $R_k(z)$ могут быть только числа из k-ой строки таблицы (1). Так что, если в k-ой строке нет повторяющихся чисел α_{kj} и все $\alpha_{kj} \neq \infty$, то $R_k(z)$ можно представить в виде $R_k(z) = c_{k0} + \sum\limits_j \dfrac{c_{kj}}{z - \alpha_{kj}}$, где c_{kj}—комплексные числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля (при $N_k = \infty$). Некоторые числа α_{kj} в k-ой строке могут встречаться более одного раза, что означает допущение у $R_k(z)$ в точке α_{kj} полюса соответствующего порядка. Кроме того не исключается случай, когда $\alpha_{kj} = \infty$.

Обозначим те из чисел α_{kj}, для которых $|\alpha_{kj}| < 1$, через α_{kj}^+, а для которых $|\alpha_{kj}| > 1$—через α_{kj}^-. Положим

$$S_k^+ = \sum_j (1 - |\alpha_{kj}^+|), \qquad S_k^- = \sum_j \left(1 - \frac{1}{|\alpha_{kj}^-|}\right), \tag{2}$$

где суммирование распространяется на все числа α_{kj}^+ и α_{kj}^-, соответственно, из k-ой строки таблицы (1).

Хорошо известно [1], что если для таблицы (1)

$$\lim_{k\to\infty} S_k^+ = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} S_k^- = \infty, \tag{3}$$

то для любой функции $F(e^{i\theta}) \in C$ (или L^p, $p \geqslant 1$) найдется последовательность рациональных дробей $\{R_k(z)\}$ с полюсами, заданными таблицей (1), для которой $\|F(e^{i\theta}) - R_k(e^{i\theta})\| \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, если для всех чисел таблицы (1) $|\alpha_{kj}| > 1$, т. е. $S_k^+ = 0$, $k = 1, 2, \cdots$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^- = \infty$, то последовательностями $\{R_k(z)\}$ можно в метрике C приблизить те и только те функции $F(e^{i\theta})$, которые являются граничными значениями непрерывных в $|z| \leqslant 1$ и аналитических в $|z| < 1$ функций (см., напр., [10], [1]).

В заметке [5] мы указали необходимые и достаточные условия для функций $F(e^{i\theta})$, которые приближаются рациональными дробями в следующем случае:

$$\varliminf_{k\to\infty} S_k^+ < \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} S_k^- = \infty. \tag{4}$$

Функции $F(e^{i\theta})$ обязаны тогда совпадать почти всюду на $|z| = 1$ с угловыми граничными значениями некоторого подкласса мероморфных функций ограниченного вида, имеющих специальное представление. В дальнейшем, используя полученные нами результаты о последовательностях произведений Бляшке [5], мы установили необходимые и достаточные условия для функций $F(e^{i\theta})$ (в случае (4)) в терминах, непосредственно связанных с расположением чисел в таблице (1). Соответствующие результаты были получены также для пространств L_σ^p с $\int\limits_0^{2\pi} ln\, \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty$ при любом $p > 0$ (см. [6]).

Далее, изучается случай, когда

$$\varliminf S_k^+ < \infty, \qquad \varliminf S_k^- < \infty. \tag{5}$$

(Случай $\lim S_k^+ = \infty$, $\varliminf S_k^- < \infty$ аналогичен случаю (4), поэтому мы на нем здесь не останавливаемся.)

В теореме 1 мы устанавливаем необходимые и достаточные условия для функций $F(e^{i\theta})$, допускающих аппроксимацию в метрике L^p, $p > 1$, при выполнении условия (5). Функции $F(e^{i\theta})$, которые при указанных условиях могут быть аппроксимированы дробями, обязаны являться угловыми граничными значениями мероморфных в $|z| < 1$ и $|z| > 1$ функций, составляющих подклассы функций с ограниченной неванлинновской характеристикой, которые полностью описываются.

Примененный при доказательстве теоремы 1 метод позволяет доказать необходимость аналогичных условий и для аппроксимации в более общих пространствах L_σ^p (теоремы 2 и 3).

Для формулировки результатов нам понадобятся две функции $B^+(z)$ и $B^-(z)$, аналитические, соответственно, внутри и вне $|z| = 1$. Обозначим через $b_k^+(z)$ произведение Бляшке, нулями которого служат все числа α_{kj}^+ из k-ой строки таблицы (1):

$$b_k^+(z) = \prod_j \frac{\alpha_{kj}^+ - z}{1 - z\overline{\alpha}_{kj}^+} \frac{|\alpha_{kj}^+|}{\alpha_{kj}^+} \tag{6}$$

(если окажется, что для чисел α^+_{kj} из k-ой строки $\sum_j (1 - |\alpha^+_{kj}|) = \infty$, то полагаем $b^+_k(z) \equiv 0$).

Рассмотрим всевозможные равномерно сходящиеся внутри круга $|z| < 1$ подпоследовательности $\{b^+_{k_l}(z)\}$ последовательности $\{b^+_k(z)\}$. Предельные для таких подпоследовательностей функции $b^+(z)$ аналитичны в $|z| < 1$ и ограничены здесь по модулю единицей; среди них заведомо имеются функции, не равные тождественно нулю. В самом деле, если взять $\{b^+_{k_l}(z)\}$, для которой $\overline{\lim\limits_{k_l \to \infty}} \sum_j (1 - |\alpha^+_{k_l j}|) < \infty$, то $\lim b^+_{k_l}(z) \not\equiv 0$ (см. напр. [8]).

Обозначим теперь через $B^+(z)$ наилучшую аналитическую мажоранту семейства $\{b^+(z)\}$ всевозможных предельных функций для подпоследовательностей $\{b^+_{k_l}(z)\}$. Это означает, что, во-первых, $B^+(z)$ мажорирует по модулю в $|z| < 1$ все предельные функции $b^+(z)$:

$$|b^+(z)| \leqslant |B^+(z)|, \quad |z| < 1, \quad \text{для всех } b^+(z), \tag{7}$$

и, во-вторых, что $B^+(z)$ имеет наименьший модуль по сравнению со всякой другой аналитической мажорантой $\tilde{B}(z)$ семейства $\{b^+(z)\}$. (По поводу существования и свойств аналитической мажоранты см. нашу работу [9]). В силу свойств функций $b^+(z)$, очевидно, следует:

$$B^+(z) \not\equiv 0, \quad |B^+(z)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad |z| < 1. \tag{8}$$

Нетрудно, пользуясь сделанными выше замечаниями, доказать следующее равенство, непосредственно определяющее $B^+(z)$ через числа $\{\alpha_{kj}\}$ таблицы (1):

$$\ln |B^+(z)| = \overline{\lim_{k \to \infty}} \ln |b^+_k(z)| = \overline{\lim_{k \to \infty}} \sum_j \ln \left| \frac{z - \alpha^+_{kj}}{1 - z\bar{\alpha}^+_{kj}} \right|. \tag{9}$$

Функция $B^-(z)$ вводится аналогично: по числам $\{\alpha^-_{kj}\}$ при помощи построения последовательности $\{b^-_k(z)\}$ — произведений Бляшке для $|z| > 1$ с нулями в точках α^-_{kj} из k-ой строки таблицы (1). Условие (5) позволяет заключить, что $B^-(z)$, будучи наилучшей аналитической мажорантой семейства предельных функций для подпоследовательностей $\{b^-_{k_l}(z)\}$, обязана быть аналитической и ограниченной в $|z| > 1$ по модулю единицей функцией $\not\equiv 0$. Функция $B^-(z)$ определяется по числам таблицы (1) равенством:

$$\ln |B^-(z)| = \overline{\lim_{k \to \infty}} \ln |b^-_k(z)| = \overline{\lim_{k \to \infty}} \sum_j \ln \left| \frac{z - \alpha^-_{kj}}{1 - z\bar{\alpha}^-_{kj}} \right|. \tag{10}$$

Теорема 1. *Чтобы функция $F(e^{i\theta}) \in L^p$, $p > 1$, допускала аппроксимацию на $|z| = 1$ в метрике L^p последовательностями рацио-*

нальных дробей $\{R_k(z)\}$ с заданными таблицей (1) *полюсами $\{\alpha_{kj}\}$, удовлетворяющими условию* (5), *необходимо и достаточно, чтобы $F(e^{i\theta})$ являлась одновременно угловыми граничными значениями мероморфных, соответственно, внутри и вне $|z|=1$, функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$, имеющих в соответствующих областях ограниченные характеристики и таких, что их произведения $F^+(z)B^+(z)$ и $F^-(z)B^-(z)$ на ранее определенные нами функции $B^+(z)$ и $B^-(z)$ обязаны входить в классы H_p, соответственно, в $|z|<1$ и $|z|>1$.*

Замечание. Условия совпадения почти всюду на $|z|=1$ функций $F(e^{i\theta})B^+(e^{i\theta})$ и $F(e^{i\theta})B^-(e^{i\theta})$ с угловыми граничными значениями аналитических в $|z|<1$ и $|z|>1$ функций из классов H_p могут быть. в силу известных результатов о функциях классов H_p, выражены следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,B^+(e^{i\theta})\,e^{in\theta}\,d\theta=0, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\cdots, \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,B^-(e^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta=0, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\cdots. \tag{12}$$

В самом деле, эти условия равносильны совпадению рассматриваемых функций с граничными значениями функций из H_1. Но, как известно, из вхождения в класс H_1 и суммируемости граничных значений в степени $p>1$ вытекает принадлежность соответствующих функций классам H_p.

Для доказательства нам понадобится одна лемма функционального анализа, являющаяся некоторым обобщением хорошо известного необходимого и достаточного условия для возможности приближения в банаховом пространстве X элемента x_0 последовательностью элементов $\{x_k\}$, принадлежащих заданному линейному многообразию (см., напр., [3]). В рассматриваемом нами случае последовательность $\{x_k\}$, аппроксимирующая элемент x_0, набирается не из одного и того же линейного многообразия, а из заранее заданной последовательности $\{X_k\}$ линейных многообразий, натянутых на простейшие рациональные дроби с полюсами в числах k-ой строки таблицы (1).

Лемма. *Для того чтобы элемент x_0 из сепарабельного банахова пространства X мог быть аппроксимирован последовательностью $\{x_k\}$ элементов, принадлежащих заданной последовательности линейных многообразий $\{X_k\}$, $X_k\subset X$:*

$$\lim_{k\to\infty}\|x_0-x_k\|=0, \quad \text{где} \quad x_k\in X_k, \quad k=1,\ 2,\cdots,$$

необходимо и достаточно, чтобы у всякой последовательности линейных функционалов $\{y_k(x)\}$, нормы которых равномерно ограничены: $\|y_k\|\leqslant C$, $k=1,\ 2,\cdots$, и для которых

$$y_k(x) = 0, \quad x \in X_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{13}$$

предельный функционал $y(x)$ *для произвольной слабо сходящейся подпоследовательности* $\{y_{k_l}(x)\}$ $(y(x) = \lim y_{k_l}(x)$ *при любом* $x \in X)$ *должен обращаться в нуль на элементе* x_0.

Необходимость проверяется немедленно переходом к пределу при $k_l \to \infty$ в очевидном неравенстве:

$$|y_{k_l}(x_0)| = |y_{k_l}(x_0 - x_{k_l})| \leq \|y_{k_l}\| \cdot \|x_0 - x_{k_l}\|.$$

Доказательство достаточности можно легко провести методом от противного, используя хорошо известный факт существования функционалов $y_k^*(x)$ со свойствами $y_k^*(x_0) = 1$, $y_k^*(x) = 0$ при $x \in X_k$ и $\|y_k\| = \frac{1}{\rho_k}$, где $\rho_k = \inf\limits_{x \in X_k} \|x_0 - x\|$.

Переходим теперь к доказательству теоремы. Начинаем с доказательства необходимости. Чтобы воспользоваться леммой, возьмем специальным образом построенные последовательности линейных функционалов $\{y_k(x)\}$, обращающихся в нуль на линейных многообразиях X_k, натянутых в нашем случае на элементы $\left\{1, \frac{1}{e^{i\theta} - \alpha_{k1}}, \cdots\right\}$. Каждому из функционалов $y_k(x)$ пространства L^p будет соответствовать функция $g_k(\theta) \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. При этом

$$y_k(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\, g_k(\theta)\, d\theta, \qquad \|y_k\| = \sqrt[q]{\int\limits_0^{2\pi} |g_k(\theta)|^q d\theta}\,. \tag{14}$$

Покажем, что в качестве $\{g_k(\theta)\}$, порождающих последовательность линейных функционалов с требуемыми в лемме свойствами, можно брать $\{e^{i\theta} b_k^+(e^{i\theta})\}$. Здесь $b_k^+(e^{i\theta})$—граничные значения произведения Бляшке $b_k^+(z)$, нулями которого служат все числа α_{kj}^+ из k-ой строки таблицы (1). Как и для всякого произведения Бляшке $|b_k^+(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду на $|z| = 1$. Поэтому остается лишь убедиться, что каждый из функционалов

$$y_k^+(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\, e^{i\theta}\, b_k^+(e^{i\theta})\, d\theta \tag{15}$$

обращается в нуль на всех простейших дробях $\left\{1, \frac{1}{e^{i\theta} - \alpha_{k1}}, \cdots\right\}$, порождающих линейное многообразие X_k. Убедимся теперь, что

$$y_k^+\left(\frac{1}{e^{i\theta} - \alpha_{kj}}\right) = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\theta} \frac{b_k^+(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - \alpha_{kj}}\, d\theta = 0. \tag{16}$$

В самом деле, функция $\frac{b_k^+(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\alpha_{kj}}$ является граничными значениями функции $\frac{b_k^+(z)}{z-\alpha_{kj}}$, которая аналитична в $|z|<1$. Аналитичность этой функции внутри $|z|<1$ в случае, когда $|\alpha_{kj}|>1$, очевидна; в случае же, когда $|\alpha_{kj}|<1$, достаточно заметить, что $b_k^+(z)$ будет обращаться в нуль в α_{kj}.

Теперь достаточно учесть, что если $f(z)$ аналитична и ограничена в $|z|<1$, то $\int\limits_0^{2\pi} e^{im\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta = 0$ при всех $m=1, 2, \cdots$. Тем самым установлены равенства (16).

Приведенные рассуждения очевидным образом распространяются на случай кратных полюсов, соответствующих повторяющимся в строках таблицы (1) числам α_{kj}.

Выберем теперь из $\{y_k^+(x)\}$ какую-либо слабо сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_l}^+(x)\}$. Соответствующая этим функционалам последовательность $\{b_{k_l}^+(z)\}$ произведений Бляшке, граничные значения которых $b_{k_l}^+(e^{i\theta})$ фигурируют в определении $y_{k_l}^+(x)$, будет равномерно сходиться внутри $|z|<1$. Действительно, в силу слабой сходимости, существует $\lim y_{k_l}(x)$ при любой $x(\theta)\in L^p$. Взяв в качестве $x(\theta)$ функции $x(\theta)=\frac{1}{e^{i\theta}-z}$ с фиксированным z, $|z|<1$, убедимся, что будет существовать

$$\lim_{k_l\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{b_{k_l}^+(e^{i\theta})\,d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}, \qquad |z|<1.$$

Обозначим предельную функцию для подпоследовательности $\{b_{k_l}^+(z)\}$ через $b^+(z)$. Изложенные только что соображения показывают, что в представлении функционала $y^+(x)$, к которому слабо сходилась последовательность $\{y_{k_l}^+(x)\}$, будет участвовать функция $b^+(e^{i\theta})$ — граничные значения $b^+(z)=\lim b_{k_l}^+(z)$, $|z|<1$, (см. также [4] стр.171) т. е.

$$y^+(x)=\int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\, e^{i\theta} b^+(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{17}$$

Пусть теперь $F(e^{i\theta})$—какая-либо функция, допускающая аппроксимацию дробями в метрике L^p, $p>1$, с заданными таблицей (1) полюсами. Применяя тогда лемму, заключаем, что

$$y^{+}(F)=\int_{0}^{2\pi}F(e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,b^{+}(e^{i\theta})\,d\theta=0.$$

Заметим теперь, что мы могли бы с самого начала брать в качестве последовательности функционалов, удовлетворяющих условиям леммы, последовательность $\{y^{+}_{k,m}(x)\}$ вида:

$$y^{+}_{k,m}(x)=\int_{0}^{2\pi}x(\theta)\,e^{im\theta}b^{+}_{k}(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{18}$$

Здесь m—фиксированное целое число $\geqslant 1$. Из слабой сходимости последовательности функционалов $\{y^{+}_{k_l}(x)\}$ вида (15) к функционалу $y^{+}(x)$, определяемому формулой (17), немедленно вытекает слабая сходимость $\{y^{+}_{k_l,m}(x)\}$. Причем предельным функционалом будет, очевидно, функционал

$$y^{+}_{[m]}(x)=\int_{0}^{2\pi}x(\theta)\,e^{im\theta}\,b^{+}(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Но, по лемме, предельный функционал должен обращаться в нуль на элементе $F(e^{i\theta})$, допускающем аппроксимацию последовательностями элементов из заданных линейных многообразий. Откуда следует, что

$$y^{+}_{[m]}(F)=\int_{0}^{2\pi}F(e^{i\theta})\,e^{im\theta}\,b^{+}(e^{i\theta})\,d\theta=0,\quad m\geqslant 1. \tag{19}$$

Функция $F(e^{i\theta})\,b^{+}(e^{i\theta})$ входит, очевидно, в класс L^{p}, $p>1$, ибо $|b^{+}(e^{i\theta})|\leqslant 1$ почти всюду на $|z|=1$, а по условию, $F(e^{i\theta})\in L^{p}$. Из обращения в нуль моментов (19) вытекает, как известно (см., напр., [4]), что $F(e^{i\theta})\,b^{+}(e^{i\theta})$—граничные значения функции класса H_1. Суммируемость этой функции в степени $p>1$ дает теперь возможность заключить, что $F(e^{i\theta})\,b^{+}(e^{i\theta})$ является на самом деле угловыми граничными значениями функции класса H_p (см. там же).

Перед тем как формулировалась теорема, отмечалось существование равномерно сходящихся подпоследовательностей произведений Бляшке $\{b^{+}_{k_l}(z)\}$, предельные функции $b^{+}(z)$ которых $\not\equiv 0$ в $|z|<1$. Очевидно, можно было с самого начала считать, что взятым слабо сходящимся подпоследовательностям функционалов $\{y^{+}_{k_l}(x)\}$ соответствуют произведения Бляшке $\{b^{+}_{k_l}(z)\}$, для которых $\lim b^{+}_{k_l}(z)=b^{+}(z)\not\equiv 0$. Учитывая теперь, что функцию

$$F(e^{i\theta})=\frac{F(e^{i\theta})\,b^{+}(e^{i\theta})}{b^{+}(e^{i\theta})}$$

можно рассматривать как частное угловых граничных значений функции класса H_p и ограниченной в $|z|<1$ аналитической функции $b^+(z)\not\equiv 0$, заключаем о совпадении функции $F(e^{i\theta})$ почти всюду на $|z|=1$ с угловыми граничными значениями мероморфной в $|z|<1$ функции $F^+(z)$ с ограниченной характеристикой.

Остается проверить, что из вхождения функции $F(e^{i\theta})\,b^+(e^{i\theta})$ в класс H_p вытекает принадлежность классу H_p и произведения $F(e^{i\theta})\,B^+(e^{i\theta})$, где $B^+(e^{i\theta})$—угловые граничные значения функции $B^+(z)$—наилучшей аналитической мажоранты семейства всех предельных функций $\{b^+(z)\}$.

Суммируемость на $|z|=1$ функций $|F(e^{i\theta})|^p$ (по условию) и $\ln|F(e^{i\theta})|$ (вытекающая из того, что $F(e^{i\theta})$, по доказанному, является угловыми граничными значениями мероморфной функции ограниченного вида) дает возможность построить функцию

$$D(z)=\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|F(e^{i\theta})|\,d\theta \tag{20}$$

Функция $D(z)$ будет по теореме Сеге входить в класс H_p (см., напр., [4]).

Из выполнения неравенства $|F(e^{i\theta})\,b^+(e^{i\theta})|\leqslant|F(e^{i\theta})|$ почти всюду на $|z|=1$ вытекает, в силу хорошо известного свойства класса H_p, что аналитические в $|z|<1$ функции $F^+(z)\,b^+(z)$ класса H_p с угловыми граничными значениями $F(e^{i\theta})\,b^+(e^{i\theta})$ не превосходят по модулю функции „максимального модуля“ $D(z)$:

$$|F^+(z)\,b^+(z)|\leqslant|D(z)|,\quad |z|<1. \tag{21}$$

Это означает, что $D(z)$ является аналитической мажорантой семейства функций $\{F^+(z)\,b^+(z)\}$, получающихся умножением $F^+(z)$ на всевозможные предельные функции $b^+(z)$ равномерно сходящихся подпоследовательностей, выбранных из $\{b_k^+(z)\}$. Но тогда, учитывая (21), получаем, что произведение $F^+(z)\,B^+(z)$, которое, очевидно, будет наилучшей аналитической мажорантой семейства $\{F^+(z)\,b^+(z)\}$, удовлетворяет неравенству:

$$|F^+(z)\,B^+(z)|\leqslant|D(z)|,\qquad |z|<1.$$

Отсюда, используя включение $D(z)\in H_p$, следует принадлежность $F^+(z)\,B^+(z)$ классу H_p. Это в сущности завершает доказательство необходимости. Действительно, проверка вхождения $F^-(z)\,B^-(z)$ в класс H_p в $|z|>1$ проводится применением леммы к последовательности $\{y_k^-(x)\}$, построенной с помощью $\{b_k^-(z)\}$ совершенно аналогично.

Доказательство достаточности. В силу леммы, нам достаточно показать, что на функции $F(e^{i\theta})$, удовлетворяющей условию теоремы, будет обращаться в нуль всякий функционал $y(x)$:

$$y(x) = \int_0^{2\pi} x(\theta)\, g(\theta)\, d\theta, \quad \text{где} \quad g(\theta) \in L^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{22}$$

Этот функционал является пределом слабо сходящейся последовательности функционалов $\{y_{k_l}(x)\}$, обращающихся в нуль на функциях системы

$$\left\{1, \frac{1}{e^{i\theta} - \alpha_{k_l j}}\right\}, \quad j = 1, \cdots, N_{k_l}, \quad l = 1, 2, \cdots. \tag{23}$$

Используя хорошо известную форму линейных функционалов в L^p:

$$y_k(x) = \int_0^{2\pi} x(\theta)\, g_k(\theta)\, d\theta, \qquad g_k(\theta) \in L^q, \tag{24}$$

запишем условия обращения в нуль наших функционалов на функциях системы (23)

$$\int_0^{2\pi} g_k(\theta)\, d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{g_k(\theta)}{e^{i\theta} - \alpha_{kj}}\, d\theta = 0, \quad j = 1, \cdots, N_k,$$

$$k = 1, 2, \cdots. \tag{25}$$

Введем теперь интегралы типа Коши-Лебега

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_k(\theta)\, d\theta}{e^{i\theta} - z}, \qquad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)\, d\theta}{e^{i\theta} - z}. \tag{26}$$

Условия (25) обращения в нуль функционалов на функциях системы (23) означают наличие нулей в соответствующих точках у интегралов типа Коши. Будем в дальнейшем использовать для определяемых интегралами типа Коши (26) аналитических внутри и вне $|z| = 1$ функций дополнительные индексы $+$ и $-$. Тогда из (25) имеем:

$$\Phi_k^+(\alpha_{kj}^+) = 0, \quad \Phi_k^-(\alpha_{kj}^-) = 0, \quad j = 1, \cdots, N_k, \ k = 1, 2, \cdots. \tag{27}$$

Нормы $\{\|y_{k_l}\|\}$ слабо сходящейся последовательности $\{y_{k_l}(x)\}$ линейных функционалов равномерно ограничены. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} |g_{k_l}(\theta)|^q\, d\theta \leqslant C, \qquad l = 1, 2, \cdots. \tag{28}$$

Применим теперь к последовательности $\{e^{-i\theta} g_{k_l}(\theta)\}$ теорему Рисса, утверждающую, что если функция $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta} \in L^p$, $p > 1$, то ряд

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ является рядом Фурье функции $f^+ \in L^p$ и $\|f^+\|_p \leqslant K_p \|f\|_p$, где K_p—постоянная, зависящая только от p, но не зависящая от f (см., напр., [2], стр. 125). Опираясь на (28), получаем тогда, что $\{\Phi^+_{k_l}(z)\}$ и $\{\Phi^-_{k_l}(z)\}$ являются последовательностями функций, аналитических, соответственно, в $|z|<1$ и $|z|>1$ с равномерно ограниченными H_q нормами:

$$\|\Phi^+_{k_l}(e^{i\theta})\|_q \leqslant C_1, \qquad \|\Phi^-_{k_l}(e^{i\theta})\|_q \leqslant C_2 \tag{29}$$

$$(l = 1, 2, \cdots).$$

Подобные оценки имеют место и для аналитических функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, соответствующих предельному функционалу. Из слабой сходимости последовательности $\{y_{k_l}(x)\}$ к $y(x)$ следует равномерная сходимость внутри $|z|<1$ последовательности $\{\Phi^+_{k_l}(z)\}$ к $\Phi^+(z)$ и равномерзая сходимость внутри $|z|>1$ последовательности $\{\Phi^-_{k_l}(z)\}$ к $\Phi^-(z)$. Используя хорошо известное свойство интеграла типа Коши-Лебега

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}[e^{-i\theta}g(\theta)]}{e^{i\theta}-z}\,d\theta = \begin{cases} \Phi^+(z), & |z|<1, \\ \Phi^-(z), & |z|>1, \end{cases}$$

получаем, что

$$e^{-i\theta}g(\theta) = \Phi^+(e^{i\theta}) - \Phi^-(e^{i\theta}) \text{ почти всюду на } |z|=1.$$

Теперь интересующее нас значение функционала $y(F)$ можно выразить следующим образом:

$$y(F) = \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,g(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}F(e^{i\theta})\,\Phi^+(e^{i\theta})\,d\theta - \int_0^{2\pi} e^{i\theta}F(e^{i\theta})\,\Phi^-(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{30}$$

Мы докажем, что каждый из интегралов в правой части (30) обращается в нуль, что, в силу леммы, достаточно для завершения доказательства теоремы. Вначале рассмотрим $\int_0^{2\pi} e^{i\theta}F(e^{i\theta})\,\Phi^-(e^{i\theta})\,d\theta$. Нам понадобится дополнительная информация о свойствах $F(e^{i\theta})\,\Phi^+(e^{i\theta})$. Ранее уже отмечалось, что $\Phi^+(e^{i\theta})$ является угловыми граничными значениями функции $\Phi^+(z) \in H_q$. В дополнение к этому установим возможность представления функции $\Phi^+(z)$ в виде

$$\Phi^+(z) = b^+(z)\,\varphi^+(z), \quad |b^+(z)| \leqslant 1 \text{ при } |z|<1,\ \varphi^+(z) \in H_q. \tag{31}$$

Здесь $b^+(z) = \lim\limits_{k_m\to\infty} b^+_{k_m}(z)$ — предельная функция какой-либо равномерно сходящейся подпоследовательности, выбранной из $\{b^+_{k_l}(z)\}$. Для этого воспользуемся следующим представлением функций $\Phi^+_{k_l}(z)$, входящих, как уже отмечалось, в класс H_q.

$$\Phi^+_{k_l}(z) = b^+_{k_l}(z)\varphi^+_{k_l}(z), \quad |b^+_{k_l}(z)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad |z| < 1, \quad \|\varphi^+_{k_l}\|_{H_q} \leqslant C_1. \tag{32}$$

В этом представлении $b^+_{k_l}(z)$—произведения Бляшке с нулями в точках $\{z^+_{k_l j}\}$, являющимися, в силу (27), нулями функций $\Phi^+_{k_l}(z)$. Из равномерной ограниченности норм в пространстве H_q функций $\{\Phi^+_{k_l}(z)\}$ (см. (29)) и свойств произведений Бляшке иметь почти всюду на $|z|=1$ модуль граничных значений равный единице: $|b^+_{k_l}(e^{i\theta})| = 1$ следует принадлежность функций $\{\varphi^+_{k_l}(z)\}$ классу H_q и отмеченная в (32) равномерная оценка для норм в H_q этих функций. Перейдем теперь к рассмотрению подпоследовательности $\{\Phi^+_{k_m}(z)\}$, для которой равномерно бы сходились внутри $|z| < 1$ последовательности $\{b^+_{k_m}(z)\}$ и $\{\varphi^+_{k_m}(z)\}$, образованные, соответственно, из первых и вторых множителей в представлении (32). Обозначим:

$$b^+(z) = \lim b^+_{k_m}(z), \quad \varphi^+(z) = \lim \varphi^+_{k_m}(z). \tag{33}$$

Переходя к пределу при $k_m \to \infty$ при фиксированном $|z| = r < 1$, получаем, опираясь на (32), равенство (31). В самом деле, по хорошо известному свойству функций класса H_q имеем:

$$\|\varphi^+_{k_m}(re^{i\theta})\|_q \leqslant \|\varphi^+_{k_m}(e^{i\theta})\|_q \leqslant C_1, \quad 0 < r < 1.$$

Откуда, устремляя $k_m \to \infty$, имеем:

$$\|\varphi^+(re^{i\theta})\|_q \leqslant C_1, \quad 0 < r < 1.$$

что и доказывает включение $\varphi^+(z) \in H_q$. Теперь мы можем установить обращение в нуль первого интеграла в правой части (30). Чтобы убедиться в отмеченном свойстве, представим, опираясь на (31), стоящую под первым интегралом функцию следующим образом:

$$F(e^{i\theta})\,\Phi^+(e^{i\theta}) = [F(e^{i\theta})\,B^+(e^{i\theta})]\,\varphi^+(e^{i\theta})\left[\frac{b^+(e^{i\theta})}{B^+(e^{i\theta})}\right]. \tag{34}$$

Равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F(e^{i\theta})\,\Phi^+(e^{i\theta})\,d\theta = 0$$

будет немедленным следствием совпадения функции $F(e^{i\theta})\,\Phi^+(e^{i\theta})$ с угловыми граничными значениями функции класса H_1.

По условию теоремы, первый из множителей в правой части (34) $F(e^{i\theta})B^{+}(e^{i\theta})$ является граничными значениями функции класса H_p. Функция $\dfrac{b^{+}(e^{i\theta})}{B^{+}(e^{i\theta})}$ является угловыми граничными значениями функции $\dfrac{b^{+}(z)}{B^{+}(z)}$, которая аналитична и ограничена в $|z|<1$. Наконец, $\varphi^{+}(e^{i\theta})$— угловые граничные значения функции $\varphi^{+}(z)\in H_q$ (см. (31)). Учитывая, что произведение двух аналитических функций $f(z)\in H_p$ и $\varphi(z)\in H_q$ в случае, когда $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ принадлежит классу H_1, а умножение на ограниченную аналитическую функцию не выводит из этого класса, заключаем о совпадении почти всюду на $|z|=1$ функции (34) с угловыми граничными значениями аналитической в $|z|<1$ функции класса H_1. Теперь достаточно воспользоваться хорошо известным свойством класса H_1:

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta=0,\quad n=1,\,2,\cdots,\quad f\in H_1.$$

Применяя этот факт при $n=1$ к функции $F(e^{i\theta})\Phi^{+}(e^{i\theta})\in H_1$, получаем:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F(e^{i\theta})\,\Phi^{+}(e^{i\theta})\,d\theta=0. \tag{35}$$

Равенство нулю второго интеграла в правой части (30) проверяется аналогично. Но в этом случае, кроме доказательства совпадения функции $F(e^{i\theta})\Phi^{-}(e^{i\theta})$ с угловыми граничными значениями аналитической в $|z|>1$ функции класса H_1, мы должны еще убедиться, что рассматриваемая функция имеет в $z=\infty$ нуль по крайней мере второго порядка. Если это будет показано, то, используя выражения коэффициента при $\dfrac{1}{z}$ в разложении функции $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,\frac{F(e^{i\theta})\Phi^{-}(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\,d\theta$ по отрицательным степеням z, будем иметь:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F(e^{i\theta})\,\Phi^{-}(e^{i\theta})\,d\theta=0. \tag{36}$$

Существование в $z=\infty$ нуля по крайней мере второго порядка у рассматриваемой функции вытекает из наличия в $z=\infty$ нуля по крайней мере второго порядка у функции $\varphi^{-}(z)$ и аналогичного (34) представления $F(e^{i\theta})\Phi^{-}(e^{i\theta})$ в виде произведения

$$F(e^{i\theta})\,\Phi^{-}(e^{i\theta})=[F(e^{i\theta})\,B^{-}(e^{i\theta})]\cdot\left[\frac{b^{-}(e^{i\theta})}{B^{-}(e^{i\theta})}\right]\varphi^{-}(e^{i\theta}). \tag{37}$$

В соответствии с представлением (37) мы заключаем, что $F(e^{i\theta})\,\Phi^-(e^{i\theta})$ можно рассматривать как граничные значения произведения трех аналитических в $|z|>1$ функций: $F^-(z)\,B^-(z)$ (аналитична по условию), $\dfrac{b^-(z)}{B^-(z)}$ (аналитична согласно определению $B^-(z)$) и $\varphi^-(z)$ (аналитична в силу тех же соображений, что и для $\varphi^+(z)$).

Теперь достаточно проверить, что один из множителей, а именно: $\varphi^-(z)$, имеет в бесконечности нуль по крайней мере второго порядка. Вначале установим подобный факт для функций $\Phi^-_{k_l}(z)$. Функции

$$\Phi^-_{k_l}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{g_{k_l}(\theta)\,d\theta}{e^{i\theta}-z},\qquad |z|>1,$$

обращающиеся при $z=\infty$ в нуль, имеют в разложении по отрицательным степеням z при $\dfrac{1}{z}$ коэффициенты, равные $-\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g_{k_l}(\theta)\,d\theta=0$, в силу условий (25).

Существование нуля по крайней мере второго порядка в $z=\infty$ у функций $\Phi^-_{k_l}(z)$ дает возможность установить аналогичное свойство для функций $\varphi^-_{k_l}(z)$. В самом деле, $\Phi^-_{k_l}(z)=b^-_{k_l}(z)\,\varphi^-_{k_l}(z)$, причем по определению $b^-_{k_l}(z)$—произведение Бляшке с нулями в точках $\{\alpha^-_{k_l j}\}$. В случае, когда среди чисел $\{\alpha^-_{k_l j}\}$ в k_l-ой строке нет равных ∞, наше утверждение очевидно. Пусть теперь в k_l-ой строке было m чисел, равных ∞. Тогда, используя обращение в нуль функционалов $y_{k_l}(x)$ на соответствующих элементах $z,\cdots,z^m$

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{i\theta}g_{k_l}(\theta)\,d\theta=0,\cdots,\int\limits_0^{2\pi}e^{im\theta}g_{k_l}(\theta)\,d\theta=0,$$

заключаем о существовании в $z=\infty$ у функции $\Phi^-_{k_l}(z)$ нуля по крайней мере $m+2$ порядка. Но $b^-_{k_l}(z)$ будет иметь в $z=\infty$ нуль m-го порядка. Далее, можно воспользоваться тем, что $\varphi^-_{k_l}(z)=\dfrac{\Phi^-_{k_l}(z)}{b^-_{k_l}(z)}$, чтобы установить наличие в $z=\infty$ нуля по крайней мере второго порядка у функций $\varphi^-_{k_l}(z)$. Из предельного равенства $\varphi^-(z)=\lim\varphi^-_{k_l}(z)$ вытекает аналогичное свойство функции $\varphi^-(z)$, достаточное для заключения об обращении в нуль интеграла (36). Тем самым установлено, в силу (35) и (30), равенство $y(F)=0$ и завершено доказательство теоремы.

Примененный при доказательстве теоремы метод позволяет установить необходимые условия для функций, допускающих приближение рациональными дробями в более общих пространствах, чем рассматривавшиеся в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть для функции $F(e^{i\theta})$ найдется последовательность рациональных дробей $\{R_k(z)\}$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})|^p\,d\sigma(\theta)=0, \tag{38}$$

где $\sigma(\theta)$ — неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция с

$$\int_0^{2\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty, \tag{39}$$

$p\geqslant 1$, а полюса $\{R_k(z)\}$, расположенные внутри $|z|<1$, принадлежат таблице $\{\alpha_{kj}^{+}\}$ чисел с условием

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_j(1-|\alpha_{kj}^{+}|)<\infty. \tag{40}$$

Тогда функция $F(e^{i\theta})$ совпадает с угловыми граничными значениями мероморфной в $|z|<1$ функции $F^{+}(z)$ с ограниченной характеристикой и такой, что произведение

$$F^{+}(z)\,B^{+}(z)\,\Omega^{+}(z)\in H_p,\qquad |z|<1.$$

Здесь $B^{+}(z)$ — функция, определявшаяся при формулировке теоремы 1 (см. (9)); *$\Omega^{+}(z)$ — аналитическая в $|z|<1$ функция, заданная формулой*

$$\Omega(z)=\exp\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta. \tag{41}$$

(Из определения следует, что $\Omega^{+}(z)$ также $\in H_p$.)

Доказательство. Из (38), учитывая, что $|\Omega^{+}(e^{i\theta})|=\sqrt[p]{\sigma'(\theta)}$ имеем:

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})|^p\,\sigma'(\theta)\,d\theta=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})\,\Omega^{+}(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})\,\Omega^{+}(e^{i\theta})|^p\,d\theta.$$

Далее, слово в слово повторяем доказательство необходимости в теореме 1, взяв в качестве последовательности линейных многообразий —

линейные многообразия, натягиваемые на $\left\{\Omega^+(e^{i\theta}), \dfrac{\Omega^+(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\alpha_{kj}}\right\}, j=1,\cdots$ $\cdots, N_k$. Нетрудно убедиться, что та же самая последовательность функционалов $\{y_k^+(x)\}$ удовлетворяет всем условиям леммы. В результате применения леммы к функции $F(e^{i\theta})\Omega^+(e^{i\theta})$ мы покажем, что произведение $F(e^{i\theta})\Omega^+(e^{i\theta})B^+(e^{i\theta})$ является граничным значением функции класса H_p.

Замечание. Утверждаемый теоремой 2 факт был доказан нами не только при $p \geqslant 1$, но и при всех $p>0$ (см. [6]). В этом случае мы не можем уже воспользоваться леммой, так как пространства L^p_σ, $0<p<1$, уже не являются банаховыми. Метод, позволяющий обосновать справедливость теоремы при любом $p>0$, основан на использовании наших результатов о сходимости последовательностей мероморфных функций.

Соответствующие результаты были установлены нами в связи с получением необходимых и достаточных условий для функций $F(e^{i\theta})$, допускающих аппроксимацию в пространствах L^p_σ, $p>0$, в случае, когда таблица $\{\alpha_{kj}\}$, задающая расположение полюсов, удовлетворяет условию (4).

Из теоремы 2 немедленно выводится следствие, распространяющее обоснованные теоремой 1, необходимые условия для функций $F(e^{i\theta})$, допускающих аппроксимации в L^p, $p>1$, рациональными дробями с полюсами, удовлетворяющими условию (5), на приближение в более общих метриках L^p_σ, в которых для $\sigma(\theta)$ выполняется (39).

Теорема 3. *Пусть для* $\sigma(\theta)$ *найдется последовательность рациональных дробей* $\{R_k(z)\}$, *удовлетворяющая* (38), *где для* $\sigma(\theta)$ *выполняется* (39). *Если при этом таблица* $\{\alpha_{kj}\}$, *задающая расположение полюсов аппроксимирующих дробей, такова, что*

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_j(1-|\alpha_{kj}^+|)<\infty,\quad \varliminf_{k\to\infty}\sum_j\left(1-\frac{1}{|\alpha_{kj}^-|}\right)<\infty,$$

то $F(e^{i\theta})$ является одновременно угловыми граничными значениями функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$, мероморфных и имеющих ограниченные характеристики, соответственно, в областях $|z|<1$ и $|z|>1$, и таких, что произведения

$$F^+(z)\,\Omega^+(z)\,B^+(z)\in H_p \quad \text{в} \quad |z|<1,$$

$$F^-(z)\,\Omega^-(z)\,B^-(z)\in H_p \quad \text{в} \quad |z|>1.$$

Здесь $B^+(z)$ и $B^-(z)$—те же самые, что и в теореме 1, а $\Omega^+(z)$ и $\Omega^-(z)$—аналитические, соответственно, в $|z|<1$ и $|z|>1$ функции, определенные формулой (41).

Пока остается открытым вопрос об исчерпывающей характеристике тех, рассматриваемых в теореме 3 пространств, в которых соответствующие условия будут также и достаточными. Последнее сделано в теореме 1 при весьма сильных дополнительных ограничениях: $p>1$, $d\sigma(\theta)\equiv d\theta$.

Московский геологоразведочный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило 18. I. 1966

Գ. Ց. ՏՈՒՄԱՐԿԻՆ

ՖԻՔՍՎԱԾ ԲԵՎԵՌՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ ՄՈՏԱՐԿՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $|z|=1$ *շրջանագծի վրա տրված* $F(z)$ *ֆունկցիաների մոտարկման պրոբլեմը* $\{R_k(z)\}$ *ռացիոնալ ֆունկցիաներով, որոնց բևեռները կարող են գտնվել միայն տված* $\{\alpha_{kj}\}$ $k=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots)$ *աղյուսակի կետերում։ Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ* $\{\alpha_{kj}\}$ *կետերը բավարարում են* $\underline{\lim}_{k\to\infty}\sum_j(1-|\alpha^+_{kj}|)<\infty$; $\underline{\lim}_{k\to\infty}\sum_j\left(1-\frac{1}{|\alpha^-_{kj}|}\right)<\infty$ *պայմաններին, որտեղ* α^+_{kj}*-ները այն* α_{kj} *կետերն են, որոնց համար* $|\alpha_{kj}|<1$, *իսկ* α^-_{kj}*-ների համար՝* $|\alpha^-_{kj}|>1$։

1 թեորեմում տրվում են $|z|=1$ *շրջանագծի վրա* $L_p\,(p>1)$ *մետրիկայում ֆունկցիայի ռացիոնալ ֆունկցիաներով մոտարկման անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։ 2 և 3 թեորեմներում մոտարկման անհրաժեշտ պայմանները տարածվում են ավելի ընդհանուր՝* L^p_σ *տարածությունների վրա այն ենթադրությամբ, որ* $\sigma(\theta)$ *ֆունկցիան բավարարում է* $\int_0^{2\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty$ *պայմանին։*

G. C. TUMARKIN

THE DESCRIPTION OF THE CLASS OF FUNCTIONS WHICH CAN BE APPROXIMATED BY RATIONAL FUNCTIONS WITH PREASSIGNED POLES

S u m m a r y

We study the problem of approximating the functions $F(z)$ on $|z|=1$ by rational functions $\{R_k(z)\}$, whose poles may lie only at preassigned points $\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kj},\cdots$ $(k=1,2,\cdots)$. In this paper we consider the case when the points $\{\alpha_{kj}\}$ satisfy the conditions

$\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{(j)}(1-|\alpha_{kj}^{+}|)<\infty$, $\varliminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{(j)}\left(1-\frac{1}{|\alpha_{kj}^{-}|}\right)<\infty$ where we mark α_{kj} by α_{kj}^{+} when $|\alpha_{kj}|<1$ and by α_{kj}^{-} when $|\alpha_{kj}|>1$.

In theorem I we give necessary and sufficient conditions so that the function $F(z)$ might be approximated on $|z|=1$ in the sense of L^p, $p>1$, by rational functions with poles at $\{\alpha_{kj}\}$. In theorems 2 and 3 we extend the necessary conditions to approximation in the sense of L^p_σ under the condition that $\int\limits_0^{2\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, Москва, Изд. Наука, 1965.
2. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, Москва, Изд. ин. лит., 1963.
3. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, Москва, Гостехиздат, 1951.
4. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, Москва, Гостехиздат, 1951.
5. *Г. Ц. Тумаркин.* Приближение функций рациональными дробями с заранее заданными полюсами, ДАН СССР, 98, № 6, 1954, 909—912.
6. *Г. Ц. Тумаркин.* Граничные свойства последовательностей аналитических функций, Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Ленинград, 1961.
7. *Г. Ц. Тумаркин.* Последовательности произведений Бляшке, ДАН СССР, 129, № 1, 1959, 40—43.
8. *Г. Ц. Тумаркин.* Сходящиеся последовательности произведений Бляшке, Сибирский математический журнал, 5, № 1, 1964, 201—233.
9. *Г. Ц. Тумаркин.* Условия существования аналитической мажоранты семейства аналитических функций, Известия АН АрмССР, XVII, № 6, 1964, 3—25.
10. *Дж. Л. Уолш.* Интерполяция рациональными функциями в комплексной области, Москва, Изд. ин. лит., 1961.