ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

Ф. Г. АРУТЮНЯН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ БЕЗУСЛОВНЫЙ БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(0, 1)$

1. Пусть $\{f_n(x)\}$—базис пространства $L_p(0, 1)$, $p \geqslant 1$. Обозначим

$$f_n^-(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{если} \quad f_n(x) < 0, \\ 0, & \text{если} \quad f_n(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_n^+(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{если} \quad f_n(x) > 0, \\ 0, & \text{если} \quad f_n(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

В. Я. Козловым [1] (см. также [2], стр. 341—347) была доказана следующая

Теорема. Если $\{f_n(x)\}$—ортонормированный базис пространства $L_2(0, 1)$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^2$ расходятся почти всюду на [0,1].

В настоящей работе доказываются аналогичные теоремы для безусловных базисов пространства $L_p(0, 1)$. Метод доказательства этих теорем существенно отличается от метода доказательства Козлова, который в рассматриваемом случае не применим. Кроме того, в случае $p = 2$, наш метод позволит весьма просто доказать сформулированную выше теорему Козлова.

Напомним определение безусловного базиса пространства $L_p(0, 1)$.

Система функций $\{f_n(x)\}$ называется безусловным базисом пространства $L_p(0, 1)$, если она остается базисом в $L_p(0, 1)$ при любом изменении порядка ее элементов.

Безусловный базис называется нормированным, если

$$\|f_n(x)\|_{L_p} = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $p \geqslant 2$, тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^q$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, расходятся почти всюду на [0, 1].

Теорема 2. Если $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $1<p<2$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ расходятся почти всюду на $[0, 1]$.

Для доказательства этих теорем достаточно установить следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\{f_n(x)\}$—нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $p\geqslant 1$, тогда существует функция $f(x)$ из $L_p(0, 1)$, разложение которой $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ по системе $\{f_n(x)\}$ абсолютно расходится почти всюду на $[0, 1]$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n f_n(x)|=+\infty$ почти всюду на $[0, 1]$.

Лемма 2. Если $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $p\geqslant 2$, и если один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|^q$ или $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ сходится на множестве E положительной меры, то разложение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ любой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E, то есть $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n f_n(x)|<+\infty$ почти всюду на E.

Лемма 3. Пусть $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $1<p<2$, и пусть один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ или $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ сходится на множестве E положительной меры, тогда разложение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ любой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E, то есть $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n f_n(x)|<+\infty$ почти всюду на E.

Очевидно, теорема 1 вытекает из лемм 1 и 2, а теорема 2—из лемм 1 и 3.

II. Доказательство леммы 1.

Пусть $\{r_n(x)\}$—система функций Радемахера, $\{\psi_n(x)\}$—сопряженная к базису $\{f_n(x)\}$ система в $L_q(0, 1)$.

Обозначим через $\{a_i^{(m)}\}$ $(i=1, 2, \cdots)$ коэффициенты разложения функции $r_m(x)$ по базису $\{f_i(x)\}$. В силу определения системы $\{\psi_n(x)\}$ имеем

$$a_i^{(m)}=\int_0^1 \psi_i(x)\, r_m(x)\, dx, \quad i=1, 2,\cdots; \quad m=1, 2,\cdots. \tag{1.1}$$

Возьмем натуральное число n_1 настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\| \sum_{l=n_0+1}^{n_1} a_l^{(p_1)} f_l(x) - r_{p_1}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2}, \tag{1.2}$$

где $n_0=0$, $p_1=1$.

Пусть уже определены натуральные числа $n_1, n_2,\cdots, n_k$; $p_1, p_2,\cdots \cdots, p_k$, где

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k \quad \text{и} \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_k. \tag{1.3}$$

Возьмем $p_{k+1} > p_k$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| \sum_{l=n_0+1}^{n_k} \frac{1}{k+1} a_l^{(p_{k+1})} f_l(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^{k+2}}. \tag{1.4}$$

Такое число p_{k+1} существует в силу того, что $a_l^{(m)} \to 0$ при $m \to +\infty$ $(i=1, 2,\cdots)$.

После этого выберем $n_{k+1} > n_k$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{l=n_0+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{k+1} a_l^{(p_{k+1})} f_l(x) - \frac{1}{k+1} r_{p_{k+1}}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^{k+2}}. \tag{1.5}$$

Таким образом, определяются две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{p_k\}$ и $\{n_k\}$, которые удовлетворяют условиям (1.4) и (1.5) для любого $k=2, 3,\cdots$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x). \tag{1.6}$$

Докажем, что он удовлетворяет условию леммы. Очевидно, лемма будет доказана, если мы установим, что частные суммы

$$S_{n_j}=\sum_{k=1}^{j} \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x), \qquad j=1, 2,\cdots, \tag{1.7}$$

ряда (1.6) сходятся в метрике $L_p(0, 1)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x) \right| = +\infty \tag{1.8}$$

почти всюду на $[0, 1]$.

В силу (1.2), (1.4) и (1.5) будем иметь

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^k} \tag{1.9}$$

для всех $(k = 1, 2, \cdots)$.

В силу (1.9), применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right| - \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^k}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right| - \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\| dx < +\infty. \tag{1.11}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right| - \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\| < +\infty \tag{1.12}$$

почти всюду на [0,1].

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right| = +\infty$ почти всюду на [0,1], то, в силу (1.12), равенство (1.8) имеет место почти всюду на [0,1].

Теперь докажем, что последовательность (1.7) сходится в метрике $L_p(0, 1)$. Для этого достаточно доказать, что

$$\| S_{n_m} - S_{n_j} \|_{L_p} \to 0 \quad \text{при } m, j \to +\infty. \tag{1.13}$$

При $m > j$ имеем:

$$\| S_{n_m} - S_{n_j} \|_{L_p} = \left\| \sum_{k=j+1}^{m} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right\|_{L_p} =$$

$$= \left\| \sum_{k=j+1}^{m} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) + \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} \leqslant$$

$$< \sum_{k=j+1}^{m} \left\| \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} + \left\| \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p}. \tag{1.14}$$

Правая часть неравенства (1.14) стремится к нулю при $m, j \to +\infty$. Действительно, в силу (1.9),

$$\sum_{k=j+1}^{m} \left\| \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} < \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{2^k} \to 0 \tag{1.15}$$

при $m, j \to +\infty$.

С другой стороны, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r_{p_k}(x)$ сходится в метрике $L_p(0,1)$ (см. [2], стр. 153—154), то

$$\left\| \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} \to 0 \quad \text{при} \quad m, j \to +\infty. \tag{1.16}$$

Из (1.14), (1.15) и (1.16) следует (1.13). Лемма 1 доказана*.

Доказательство леммы 2.

Пусть на множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$ имеет место

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^q < +\infty, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 2. \tag{2.1}$$

Докажем, что тогда разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ любой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| < +\infty \quad \text{почти всюду на } E. \tag{2.2}$$

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n^+(x) + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |f_n^-(x)| \tag{2.3}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| f_n^+(x) + |a_n| f_n^-(x)). \tag{2.4}$$

Из определения безусловного базиса следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ без-

* В частном случае, когда $p = 2$, лемма 1 непосредственно вытекает из теоремы Ульянова (см. [3], стр. 112, теорема 6.1).

условно сходится в метрике $L_p(0, 1)$. Следовательно, по лемме Орлича [4] при $p > 2$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |a_n f_n(x)|^p dx < +\infty. \tag{2.5}$$

Но так как $\{f_n(x)\}$—нормированный базис, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty. \tag{2.6}$$

В силу неравенства Гельдера из (2.1) и (2.6) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |f_n^-(x)| < +\infty \quad \text{для любого } x \in E. \tag{2.7}$$

Теперь докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n^+(x) < +\infty \quad \text{почти всюду на } E. \tag{2.8}$$

Пусть это не так, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n^+(x) = +\infty \tag{2.9}$$

на некотором множестве $G \subset E$, $\operatorname{mes} G > 0$.

Тогда из (2.4), (2.7) и (2.9) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(x) = +\infty \quad \text{всюду на } G, \ \operatorname{mes} G > 0. \tag{2.10}$$

Но так как $\{f_n(x)\}$—безусловный базис в $L_p(0, 1)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ есть разложение некоторой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(x)$ тоже является разложением в $L_p(0, 1)$ и сходится в его метрике. Это противоречит равенству (2.10). Следовательно, справедливо (2.8).

Из (2.3), (2.7) и (2.8) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)|$ сходится почти всюду на E.

Точно так же можно рассуждать при предположении, что $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^q < +\infty$ на некотором множестве E положительной меры. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|$ сходится на некотором множестве E, $\text{mes}\, E > 0$ и пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ есть разложение некоторой функции $f(x) \in L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$. Из того, что $\{f_n(x)\}$—нормированный базис, будем иметь $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n^-(x)| < +\infty \text{ всюду на } E. \tag{3.1}$$

Так как $\{f_n(x)\}$—безусловный базис, то, учитывая (3.1), точно так же, как выше, доказывается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| < +\infty \text{ почти всюду на } E. \tag{3.2}$$

То есть любое разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E. Тем самым лемма 3 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 4. I. 1966

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

L_p ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԲԱԶԻՍԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴՐԱԿԱՆ ԵՎ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Վ. Յա. Կոզլովի կողմից ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը՝ Եթե $\{f_n(x)\}$*-ը լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է* $L_2[0, 1]$*-ում, ապա* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^2$ *և* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^2$ *շարքերը համարյա ամենուրեք տարամիտում են* $[0, 1]$*-ում, որտեղ*

$$f_n^-(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{եթե } f_n(x) < 0, \\ 0, & \text{եթե } f_n(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_n^+(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{եթե } f_n(x) > 0, \\ 0, & \text{եթե } f_n(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե $\{f_n(x)\}$*-ը ոչ պայմանական բազիս է* $L_p[0, 1]$*-ում,* $p \geqslant 2$*, ապա* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^q$ *և* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^q$ *շար-*

քերը համարյա ամենուրեք տարամիտում են [0, 1]-ում, որտեղ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$։ Բացի այդ, $1<p<2$ դեպքում ապացուցվում է, որ [0, 1]-ում համարյա ամենուրեք կտարամիտեն $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ շարքերը։

Այս թեորեմների ապացույցի եղանակը էապես տարբերվում է Կոզլովի ապացույցի եղանակից, որը դիտարկված դեպքում կիրառելի չէ։ Մասնավորապես, $p=2$ դեպքում ստացվում է Կոզլովի վերը բերված թեորեմի պարզ ապացույց։

F. G. HARUTYUNIAN

ON THE DISTRIBUTION OF POSITIVE AND NEGATIVE VALUES OF FUNCTIONS OF ABSOLUTE BASES IN L_p SPACE

Summary

V. J. Kozlov has proved the following theorem: If $\{f_n(x)\}$ is a complete orthonormal system in $L_2[0, 1]$ then the two series

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|^2 \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|^2,$$

where

$$f_n^-(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{if } f_n(x)<0, \\ 0, & \text{if } f_n(x)\geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_n^+(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{if } f_n(x)>0, \\ 0, & \text{if } f_n(x)\leqslant 0, \end{cases}$$

diverge almost everywhere on [0, 1].

In the present paper we prove that if $\{f_n(x)\}$ is an absolute basis in $L_p[0, 1]$, where $p\geqslant 2$, then the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|^q$ and $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|^q$ diverge almost everywhere on [0, 1], where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. We also prove that if $1<p<2$, then $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ and $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ diverge almost everywhere on [0, 1].

It should be noted that the method in use essentially from that of Kozlov's which is inapplicable in this case.

Besides, when $p=2$, our method enables us to give a simple proof of Kozlov's theorem quoted above.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Я. Козлов.* О распределении положительных и отрицательных значений ортогональных и нормированных функций, образующих полную систему, Мат. сб., 23 (1948), 475—480.
2. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз (1958).
3. *П. Л. Ульянов.* Расходящиеся ряды Фурье, У. М. Н., 16 вып. 3 (99), 1961, 61—142.
4. *W. Orlicz.* Über unbedingte Konvergenz in funtionen Räumen, II studia Math. 4 (1933), 41—47.