Р. Л. ШАХБАГЯН

ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ С НЕОДНОРОДНЫМИ СИМВОЛАМИ

В настоящей заметке изучается некоторый класс уравнений в свертках, зависящих от точки x , а именно: уравнения вида

$$Ku \equiv \int_{R_n^+} K(x, x-y) u(y) dy = f(x), \quad (1)$$

где ядро $K(x, z)$, вообще говоря, — обобщенная функция z , преобразование Фурье которой по z : $\tilde{K}(x, \xi) = F_z K(x, z)$ является неоднородной функцией, а R_n^+ — подпространство $x_n > 0$ n -мерного евклидова пространства R_n .

Функцию $\tilde{K}(x, \xi)$ будем называть символом оператора K . При некоторых условиях, налагаемых на ядра $K(x, z)$, устанавливается *нетеровость* соответствующих операторов в определенных функциональных пространствах. Исследуется также вопрос о гладкости операторов свертки.

Постановка краевых задач для уравнений вида (1) существенно зависит от некоторого числа γ , возникающего при факторизации символа $\tilde{K}$.

Теория общих краевых задач для уравнений в свертках вида (1) в ограниченной области G с однородными символами, удовлетворяющими условию эллиптичности: $\tilde{K}(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $x \in G$, широко развита в работах М. И. Вишика и Г. И. Эскина [1]—[3].

При доказательстве теорем о нормальной разрешимости мы воспользовались методикой, выработанной С. Агмоном, А. Дуглисом и Л. Ниренбергом [4], М. И. Вишиком и Г. И. Эскивом [1], М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком [5].

Введем и вкратце опишем ряд функциональных пространств, в которых будут вестись наши рассуждения. Для произвольных вещественных s и r через $H_{s,r} = H_{s,r}(R_n)$ обозначим пространство функций $f(x)$ (обобщенных при s или r отрицательных) таких, что

$$\| \| f \| \|_{s,r}^2 = \int_{R_n} (1 + |\xi'|^2)^s (1 + |\xi_n|^2)^r | \tilde{f}(\xi', \xi_n) |^2 d\xi' d\xi_n < +\infty, \quad (2)$$

где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\tilde{f}(\xi) = F f(x)$ — преобразование Фурье функции

$f(x)$. Через $\tilde{H}_{s,r}$ будем обозначать образ Фурье пространства $H_{s,r}$. Норма в пространстве $\tilde{H}_{s,r}$ также задается формулой (2).

Обозначим через $R_n^+(R_n^-)$ полупространство $x_n > 0$ ($x_n < 0$) евклидова пространства R_n . $\tilde{H}_{s,r}^+ = \tilde{H}_{s,r}^+(R_n^+)$, по определению, есть подпространство пространства $\tilde{H}_{s,r}$, состоящее из функций, носитель которых сосредоточен в $\bar{R}_n^+$. Пространство $\tilde{H}_{s,r}^-$ определяется аналогично. Образ Фурье пространства $\tilde{H}_{s,r}^-$ обозначим через $\tilde{H}_{s,r}^+$, $\tilde{H}_{s,r}^+$ состоит из функций $\tilde{f}_+(\xi', \xi_n)$, аналитически продолжающихся в полуплоскость $\tau = \text{Im } \xi_n > 0$.

Через $H_{s,r}(R_n^+)$ обозначим пространство функций, заданных в R_n^+ , являющихся сужениями на R_n^+ функций из $H_{s,r}(R_n)$.

Для произвольных вещественных s и r через $\mathcal{W}_{s,r} = \mathcal{W}_{s,r}(R_n^+)$ обозначим пространство Соболева-Слободецкого функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{s,r}^2 = \int_{R_n} [(1 + |\xi'|^2)^s + (1 + |\xi_n|^2)^r] |\tilde{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi' d\xi_n < +\infty.$$

Пространства $\tilde{\mathcal{W}}_{s,r}^+$, $\tilde{\mathcal{W}}_{s,r}^-$, $\mathcal{W}_{s,r}(R_n^+)$ вводятся аналогично введенным выше пространствам $\tilde{H}_{s,r}^+$, $\tilde{H}_{s,r}^-$, $H_{s,r}(R_n^+)$. Норма в пространстве $\mathcal{W}_{s,r}(R_n^+)$ вводится по формуле

$$\|f\|_{s,r}^+ = \inf \|lf\|_{s,r}, \quad (3)$$

где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $lf(x) \in \mathcal{W}_{s,r}(R_n)$ функции $f(x)$. В пространстве $\mathcal{W}_{s,r}(R_n^+)$ введем норму, эквивалентную норме (3), по формуле (ср. [6])

$$\|f\|_{s,r}^+ = \|\Pi^+ [(1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} + (\xi_n - i)^r] \tilde{lf}(\xi)\|_0, \quad (4)$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в $H_0(R_n)$, а $\Pi^+ \tilde{\varphi}(\xi', \xi_n) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i0 - \eta_n} d\eta_n =$

$$= iV \cdot p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n} d\eta_n + \tilde{\pi}\tilde{\varphi}(\xi', \xi_n) \text{ для любой функции } \tilde{\varphi}(\xi) \in \tilde{H}_0(R_n).$$

Пространство $\mathcal{W}_{s,r}^+$ определяется следующим образом: продолжим $f(x) \in \mathcal{W}_{s,r}(R_n^+)$ нулем для $x \in R_n^-$ и обозначим это продолжение через $f_+(x)$. Пространство таких функций $f_+(x)$ обозначим через $\mathcal{W}_{s,r}^+$.

$\widetilde{W}_{s,r}^+$ — образ Фурье пространства $W_{s,r}^+$. Норма в пространстве $W_{s,r}^+$ задается формулой (4).

В полупространстве R_n^+ рассмотрим уравнение вида

$$u(x) - \int_{R_n^+} K_0(x-y) u(y) dy = f(x), \quad x_n > 0. \quad (5)$$

Пусть функция $\widetilde{K}_0(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\widetilde{K}_0(\xi', \xi_n)$ — положительно-однородная функция от ξ' нулевого порядка: $\widetilde{K}_0(t\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) \quad (t > 0)$;

б) $K_0(x', x_n) = F^{-1} \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) \in L_1(R_1)$ при всех $x' \neq 0$, откуда следует, что $\lim_{\xi_n \rightarrow \pm\infty} \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) = 0$ для $\xi \in \widetilde{R}_n$, $\xi' \neq 0$;

в) $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = 1 - \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) \neq 0$ для всех $\xi \in \widetilde{R}_n$, $\xi' \neq 0$;

г) функция $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)$ бесконечно дифференцируема по ξ' при $\xi' \neq 0$.

Класс функций $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)$, удовлетворяющих условиям а)–г), обозначим через O_n .

Теорема 1. Пусть $\widetilde{K}_1(\xi) \in O_n$, тогда $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)$ допускает единственную, однородную по ξ' нулевого порядка, факторизацию по ξ_n ($n > 1$), то есть представление вида:

$$\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_+^+(\xi', \xi_n) \widetilde{K}_-^-(\xi', \xi_n), \quad (6)$$

где

$$\widetilde{K}_+^+(\xi', \xi_n) = (\xi_n + i)^{\nu} \widetilde{K}_+(\xi', \xi_n), \quad \widetilde{K}_-^-(\xi', \xi_n) = \frac{\widetilde{K}_-(\xi', \xi_n)}{(\xi_n - i)^{\nu}},$$

$$\lim_{\xi_n \rightarrow \pm\infty} \widetilde{K}_{\pm}^{\pm}(\xi', \xi_n) = 1,$$

$\widetilde{K}_+^+$ ($\widetilde{K}_-^-$) аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im } \xi_n > 0$ ($\text{Im } \xi_n < 0$) и отлична там от нуля.

Доказательство. Пусть

$$\text{ind}_{\xi_n} \widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) \right]_{\xi_n = -\infty}^{\xi_n = +\infty} = \nu \quad (7)$$

(ν — целое). Тогда, как легко видеть, приращение аргумента функции

$$K_2(\xi', \xi_n) = \frac{(\xi_n - i)^{\nu} \widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)}{(\xi_n + i)^{\nu}}$$

равно нулю. Можно показать, воспользовавшись формулами скачка ин-

теграла типа Коши, что функция $\ln \bar{K}_2(\xi', \xi_n)$ представима в виде:

$$\ln \bar{K}_2(\xi', \xi_n) = \bar{K}_+(\xi', \xi_n) - \bar{K}_-(\xi', \xi_n), \quad (8)$$

где функция $\bar{K}_+(\xi', \xi_n)$ ($\bar{K}_-(\xi', \xi_n)$) аналитически продолжима в полуплоскость $\text{Im } \xi_n > 0$ ($\text{Im } \xi_n < 0$). Из представления (8) вытекает, что функцию $\bar{K}_1(\xi', \xi_n)$ можно записать в виде:

$$\bar{K}_1(\xi', \xi_n) = (\xi_n + i)^{\nu} e^{\bar{K}_+(\xi', \xi_n)} (\xi_n - i)^{-\nu} e^{-\bar{K}_-(\xi', \xi_n)} = \bar{K}_+(\xi) \bar{K}_-(\xi),$$

причем функции $\bar{K}_+(\xi)$ и $\bar{K}_-(\xi)$ обладают требуемыми свойствами. Легко проверить, что факторизация (6) единственна. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\bar{K}_1(\xi) \in O_0$, тогда при любой правой части $f(x) \in H_{s, \nu}(R_n^+)$ (s —любое) уравнение (5) имеет единственное решение $u_+(x) \in H_{s, \nu}^+$, задаваемое формулой

$$u_+(x) = F^{-1} \left(\frac{1}{\bar{K}_+(\xi', \xi_n)} \prod^+ \frac{\bar{l}f(\xi', \xi_n)}{\bar{K}_-(\xi', \xi_n)} \right), \quad (9)$$

где $lf \in H_{s, \nu}(R_n)$ —любое продолжение функции $f(x)$ на R_n .

Доказательство. Уравнение (5) можно записать в следующем виде

$$P^+(K_1(x) * u_+(x)) = f(x), \quad x \in R_n^+, \quad (10)$$

где P^+ —оператор сужения на R_n^+ . Обозначим продолжение $f(x)$ на все R_n через $lf \in H_{s, \nu}(R_n)$. Существование такого продолжения следует из определения пространства $H_{s, \nu}(R_n^+)$. Тогда уравнение (10) можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$K_1(x) * u_+(x) = lf(x) + u_-(x), \quad (11)$$

где $u_-(x) \in H_{s, \nu}^-$, —произвольная функция. Образ Фурье уравнения (11) имеет вид:

$$\bar{K}_1(\xi) \bar{u}_+(\xi) = \bar{l}f(\xi) + \bar{u}_-(\xi). \quad (12)$$

Так как $\bar{K}_1(\xi', \xi_n) \in O_0$, то ее можно представить в виде

$$\bar{K}_1(\xi', \xi_n) = \bar{K}_+(\xi', \xi_n) \bar{K}_-(\xi', \xi_n). \quad (13)$$

Пользуясь (13), из (12) получим

$$\bar{K}_+(\xi', \xi_n) \bar{u}_+(\xi', \xi_n) = \frac{\bar{l}f(\xi', \xi_n)}{\bar{K}_-(\xi', \xi_n)} + \frac{\bar{u}_-(\xi', \xi_n)}{\bar{K}_-(\xi', \xi_n)}. \quad (14)$$

При почти всех $\xi' \frac{\bar{f}(\xi', \xi_n)}{\bar{K}_-, (\xi', \xi_n)} \in H_0(R_1)$ по ξ_n . Из (14) имеем

$$\bar{K}_+ (\xi) \bar{u}_+ (\xi) - \prod^+ \frac{\bar{f}(\xi)}{\bar{K}_-, (\xi)} = \prod^- \frac{\bar{f}(\xi)}{\bar{K}_-, (\xi)} + \frac{\bar{u}_- (\xi)}{\bar{K}_-, (\xi)} = P(\xi', \xi_n). \quad (15)$$

Поскольку левая часть соотношения (15) как функция вещественного ξ_n принадлежит пространству $H_0(R_1)$, пользуясь теоремой Лиувилля, получаем, что для почти всех ξ' $P(\xi', \xi_n) = 0$. Таким образом, для ре-

шения $\bar{u}_+ (\xi) \in \bar{H}_{s,r}^+$, получаем формулу

$$\bar{u}_+ (\xi) = \frac{1}{\bar{K}_+ (\xi', \xi_n)} \prod^+ \frac{\bar{f}(\xi', \xi_n)}{\bar{K}_-, (\xi', \xi_n)}.$$

Очевидно это решение единственно в пространстве $\bar{H}_{s,r}^+$. Теорема доказана.

Определение 1. Оператор $\bar{K} \in O_0$ назовем гладким в R_n^+ , если для любых $s, r \geq 0$ $P^+ K u_+ \in W_{s,r}(R_n^+)$, коль скоро $u_+ \in W_{s,r}^+$ (P^+ — оператор сужения функций, заданных в R_n , на R_n^+).

Определение 2. Мы скажем, что функция $\bar{K}_- (\xi', \xi_n)$ принадлежит классу O_α^- , если она однородна по ξ' степени нуль, по ξ_n имеет степенной рост порядка α и допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\text{Im } \xi_n < 0$ при всех ξ' .

Сформулируем условие, обеспечивающее гладкость оператора K .

Функция $\bar{K}(\xi', \xi_n) \in O_0$, по определению, удовлетворяет условию А), если при любом вещественном r имеет место разложение

$$(\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) = \bar{K}_- (\xi', \xi_n) + R_{0,-1}(\xi', \xi_n),$$

где $\bar{K}_- (\xi) \in O_r^-$, а для $R_{0,-1}(\xi', \xi_n)$ справедлива оценка:

$$|R_{0,-1}(\xi', \xi_n)| \leq \frac{C}{|\xi_n| + 1}.$$

Класс функций $\bar{K}(\xi) \in O_0$, удовлетворяющих условию А), обозначим A_0 .

Теорема 3 (теорема гладкости). Пусть $\bar{K}(\xi) \in A_0$. Тогда при любых $s, r \geq 0$ справедлива оценка:

$$\|K * u_+\|_{s,r}^+ = \|\bar{K} \bar{u}_+\|_{s,r}^+ \leq C \|u_+\|_{s,r}^+,$$

где $u_+(x)$ — любая функция, принадлежащая пространству $W_{s,r}^+$, а C — постоянная, не зависящая от $u_+(x)$.

Доказательство. Пусть $lu(x)$ — некоторое продолжение функции $u(x)$ на все пространство R_n , принадлежащее $W_{s,r}(R_n)$, причем $\|lu\|_{s,r} \leq C \|u_+\|_{s,r}^+$, где C — постоянная, не зависящая от u_+ . Функцию $lu(x)$ представим в виде:

$$lu(x) = u_+(x) + u_-(x), \quad \text{где } u_-(x) \in W_{s,r}^-.$$

Поскольку $\bar{K}(\xi', \xi_n) \in A_0$, ее можно представить в следующем виде:

$$(\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) = \bar{K}_-(\xi', \xi_n) + R_{0,-1}(\xi', \xi_n), \quad (16)$$

где $\bar{K}_-(\xi', \xi_n) \in O_r^-$, а $|R_{0,-1}(\xi', \xi_n)| \leq \frac{C}{|\xi_n| + 1}$. Оценим Ku_+ следующим образом:

$$\begin{aligned} \|Ku_+\|_{s,r}^+ &\leq \|\Pi^+ (1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 + \\ &+ \|\Pi^+ (\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 = I + II. \end{aligned}$$

Поскольку $\bar{K} \in O_0$ и $r \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} I &= \|\Pi^+ (1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 \leq \\ &\leq M \|\Pi^+ (1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} \bar{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 = M \|u_+\|_{s,0}^+ \leq M \|u_+\|_{s,r}^+. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим теперь II .

$$\begin{aligned} II &= \|\Pi^+ (\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 \leq \|\Pi^+ (\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) lu(\xi', \xi_n)\|_0 + \\ &+ \|\Pi^+ (\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 = II_1 + II_2. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} II_1 &= \|\Pi^+ (\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{lu}(\xi', \xi_n)\|_0 \leq \\ &\leq \|(\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{lu}(\xi', \xi_n)\|_0 \leq C \|lu\|_{s,r} \leq C_1 \|u_+\|_{s,r}^+. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценим II_2 , воспользовавшись разложением (16).

$$\begin{aligned} II_2 &= \|\Pi^+ (\xi_n - i)^r \bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 \leq \\ &\leq \|\Pi^+ \bar{K}_-(\xi', \xi_n) \bar{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 + \|\Pi^+ R_{0,-1}(\xi', \xi_n) \bar{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 \leq \\ &\leq \|R_{0,-1}(\xi', \xi_n) \bar{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0. \end{aligned} \quad (20)$$

При выводе неравенства (20) мы воспользовались тем, что

$$\Pi^+ \bar{K}_- (\xi', \xi_n) \bar{u}_- (\xi', \xi_n) = 0.$$

Далее, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{u}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{u}_+(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n + \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{u}_-(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n, \quad (21)$$

то, интегрируя (21) по ξ' , получим

$$\|\bar{u}(\xi', \xi_n)\|_0^2 = \|\bar{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0^2 + \|\bar{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0^2. \quad (22)$$

Таким образом, из (20) и (22), учитывая что $s, r \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} \|H_2\| &= \|\Pi^+ (\xi_n - i)^r \bar{K}_- (\xi', \xi_n) \bar{u}_- (\xi', \xi_n)\|_0 \leq C \|\bar{u}\|_0 \leq \\ &\leq C \|\bar{u}\|_{s,r} \leq C_1 \|u_+\|_{s,r}^+. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (17), (18), (19) и (23) вытекает, что

$$\|\bar{K}(\xi', \xi_n) \bar{u}_+(\xi', \xi_n)\|_{s,r}^+ \leq C_2 \|u_+\|_{s,r}^+,$$

где C_2 — постоянная, не зависящая от u_+ . Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению операторов с переменными символами.

Пусть функция $\bar{K}(x, \xi)$ бесконечно дифференцируема по x при $\xi' \neq 0$ и принадлежит классу O_0 по ξ при всех $x \in R_n$. Предположим, далее, что $\bar{K}(x, \xi) = \bar{K}_0(\xi)$ при $|x| \geq l$, где $0 < l < +\infty$ — произвольное фиксированное число. Класс таких функций $\bar{K}(x, \xi)$ обозначим $O_0^{(1)}$.

Определение 3. Мы скажем, что функция $\bar{K}(x, \xi)$ принадлежит классу $A_0^{(1)}$, если при всех $x \in R_n$ $\bar{K}(x, \xi) \in A_0$, то есть для любого вещественного r

$$(\xi_n - i)^r \bar{K}(x, \xi) = \bar{K}_-(x, \xi) + R_{0,-1}(x, \xi),$$

где $\bar{K}_-(x, \xi) \in O_r^-$, $|R_{0,-1}(x, \xi)| \leq \frac{C}{|\xi_n| + 1}$ при всех $x \in R_n$. Рассмотрим оператор $\theta^+ K u$, где $\theta^+ f(x) = \begin{cases} f(x), & x_n > 0 \\ 0, & x_n \leq 0 \end{cases}$. Представим его в следующем виде:

$$\theta^+ K u = \theta^+ K_0 u + \psi_0(x) \theta^+ (K - K_0) u, \quad (24)$$

где $\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq l - \varepsilon \\ 0 & \text{при } |x| \geq l \end{cases}$, $\psi_0(x) \in C^\infty$.

Теорема 4. Пусть $\bar{K}(x, \xi) \in A_0^{(1)}$, а $\bar{K}_0(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда соответствующий оператор $\theta^+ K u$, где

Φ^+K_u определяется формулой (24), является Φ -оператором в пространстве $W_{s,\nu}^+$.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору М. И. Вишику за постановку задачи и полезные обсуждения.

Московский энергетический институт

Поступило 6. I. 1966

Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ

ՓԱԹԵԹԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ՈՉ-ՀԱՄԱՍԵՆՈՒ ՍԻՄՎՈՒՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսին հոգիածում դիտարկվում է փաթեթի տիպի օպերատորների մի նոր դաս: Ապացուցվում է, որ այդ օպերատորները հանդիսանում են Φ -օպերատորներ որոշակի ֆունկցիոնալ տարածություններում: Դիտարկվում է նաև այդ օպերատորների ողորկութիան հարցը: Տրվում են պլամաններ, որոնք ապահովում են դիտարկվող օպերատորների ողորկությունը $H_{s,\nu}^+$ տարածությունում:

R. L. SHAKHBAGYAN

CONVOLUTION OPERATORS WITH NON-HOMOGENEOUS SYMBOLS

S u m m a r y

A certain class of convolution operators are considered in the paper which are proved to be Φ -operators in certain functional spaces.

Smoothness of these operators and conditions guaranteeing it in a space $H_{s,\nu}^+$ are also dealt with.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. И. Вишик и Г. И. Эскин. Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, 3 (1965), 99—161.
2. М. И. Вишик и Г. И. Эскин. Краевые задачи для общих сингулярных уравнений в ограниченной области, ДАН 155, № 1 (1964), 24—27.
3. М. И. Вишик и Г. И. Эскин. Сингулярные эллиптические уравнения и системы переменного порядка, ДАН 156, № 2 (1964), 224—226.
4. С. Агмон, А. Дулис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
5. М. С. Агранович и М. И. Вишик. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 19, вып. 3 (1964), 53—161.
6. J. Peetre. Another approach to elliptic boundary problems, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 711—731.