ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

С. А. АКОПЯН

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В работах М. М. Джрбашяна [1]—[3] установлен ряд результатов о параметрическом представлении некоторых общих классов целых функций произвольного конечного порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и нормального типа, интегрируемых с квадратом модуля вдоль специальных систем лучей.

Эти результаты представляли дальнейшее широкое обобщение классической теоремы Винера-Пэли о представлении целых функций экспоненциального типа, интегрируемых в квадрате модуля на всей вещественной оси. Приведем одну из типичных теорем такого рода [2].

Класс $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ целых функций порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho} < |\varphi| < \pi} \left\{ \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < \infty \quad (-1 < \omega < 1), \tag{1}$$

совпадает с совокупностью функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} E_\rho(zt; \mu)\, \varphi(t)\, t^{\mu\rho-1} dt, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}, \tag{2}$$

где

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \tag{3}$$

—целая функция типа Миттаг-Леффлера, $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ и $\varphi(t)$—произвольная функция из класса

$$\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |\varphi(t)|^2 t^{\rho-1} dt < +\infty. \tag{4}$$

С другой стороны, в работах [4]—[6], в частности, было установлено, что при построении теории интегральных преобразований в комплексной области наряду с функцией типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu)$ можно, например, использовать также обобщенную гипергеометрическую функцию вида

$$ {}_pF_q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}z^k \tag{5}$$

при определенных ограничениях, налагаемых на параметры.

В связи с этим естественно возникает также вопрос: возможно ли в представлении (2) класса $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ функцию типа Миттаг-Леффлера заменить другой родственной целой функцией, например функцией ${}_pF_q(z)$? В настоящей статье, существенно опираясь на вышеприведенную теорему М. М. Джрбашяна, мы увидим, что поставленная задача имеет положительное решение.

Заметим, что функция ${}_pF_q(z)$—целая, если $\rho_1^{-1}+\cdots+\rho_{q+1}^{-1}-\delta_1^{-1}-\cdots-\delta_p^{-1}>0$, причем порядка

$$\rho=\left(\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_{q+1}}-\frac{1}{\delta_1}-\cdots-\frac{1}{\delta_p}\right)^{-1} \tag{6}$$

и типа

$$\sigma_F=\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1}}\cdots\left(\frac{\rho_{q+1}}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_{q+1}}}\left(\frac{\delta_1}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_1}}\cdots\left(\frac{\delta_p}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_p}}. \tag{7}$$

Обозначим

$$\mu=\mu_1+\cdots+\mu_{q+1}-\nu_1-\cdots-\nu_p+\frac{p-q}{2} \tag{8}$$

и впредь будем предполагать, что все параметры, входящие в определение (5) функции ${}_pF_q(z)$, положительны, причем

$$\nu_j\delta_j\geqslant 1\qquad (j=1,2,\cdots,p), \tag{9}$$

$$\rho\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho} \tag{10}$$

$\left(\text{при } \rho_j=\infty \text{ или } \delta_j=\infty \text{ полагается } \mu_j=\frac{1}{2} \text{ или } \nu_j=\frac{1}{2}\right)$. Доказывается следующая

Теорема 1. *Класс $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ совпадает с совокупностью функций $f(z)$, допускающих представление вида*

$$f(z)=\int\limits_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}}{}_pF_q(zt)\,t^{\mu\rho-1}\psi(t)\,dt, \tag{11}$$

где $\mu=\dfrac{1+\omega+\rho}{2\rho}$, а $\psi(t)$—произвольная функция из класса

$$\int\limits_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} |\psi(t)|^2 t^{\rho-1}\,dt < \infty. \tag{12}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем ряд вспомогательных предложений.

1°. Пусть $f(z) \in B_{\rho,\sigma}(\omega)$, тогда из (2) имеем

$$f(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} E_\rho(rte^{i\varphi};\mu)\,\varphi(t)\,t^{\mu\rho-1}\,dt,$$

что равносильно равенству

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1} = \frac{1}{\rho}\,r^{\mu-1}\int\limits_0^\sigma E_\rho(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi};\mu)\,\varphi(\tau^{1/\rho})\tau^{\mu-1}\,d\tau, \tag{13}$$

где

$$\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho},\quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho},\quad \varphi(\tau^{1/\rho}) \in L_2(0,\sigma).$$

Условие (1) в свою очередь означает, что

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1} \in L_2(0,\infty) \tag{14}$$

для всех φ из отрезка $\left[\frac{\pi}{2\rho},\ 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right]$.

Обозначим

$$\varphi_1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\varphi(\tau^{1/\rho}) & \text{при} \quad 0 < \tau < \sigma, \\ 0 & \text{при} \quad \tau > \sigma, \end{cases} \tag{15}$$

тогда, принимая во внимание равенство

$$\frac{d}{dr}\{r^\mu E_\rho(\lambda r^{1/\rho};\mu+1)\} = r^{\mu-1}E_\rho(\lambda r^{1/\rho};\mu),$$

запишем (13) в виде

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1} = \frac{d}{dr}\left\{r^\mu\int\limits_0^\infty E_\rho(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi};\mu+1)\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\}. \tag{13'}$$

Пусть $F_\rho(s;\varphi)$—преобразование Меллина функции $f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1}$ в смысле

$$F_\rho(s;\varphi) = \underset{a\to+\infty}{\text{l. i. m.}}\int\limits_{1/a}^{a} f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1}r^{s-1}\,dr,\qquad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{16}$$

а $\Phi_1(s)$ есть преобразование Меллина функции $\varphi_1(\tau) \in L_2(0,\infty)$, т. е.

$$\Phi_1(s) = \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int\limits_{1/a}^{a} \varphi_1(\tau)\, \tau^{-s-1}\, d\tau, \quad \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}\cdot \tag{17}$$

Известно [2], что преобразование Меллина функции

$$E_\rho(x^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) x^{\mu-1} \in L_2(0, \infty) \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho},\ \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

представляется в виде

$$\frac{\widetilde{E}_\rho(s; \varphi)}{1-s}, \text{ где } \widetilde{E}_\rho(s; \varphi) = \frac{\pi\rho e^{i(\pi-\varphi)(s+\mu-1)}}{\Gamma(1-s)\sin\pi\rho(s+\mu-1)}. \tag{18}$$

В силу равенства Парсеваля, из (13′) получим:

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^r f(t^{1/\rho} e^{i\varphi})\, t^{\mu-1}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\widetilde{E}_\rho(s; \varphi)}{1-s}\Phi_1(1-s)\, r^{-s} ds. \tag{19}$$

Преобразование Меллина левой части (19) равняется $\dfrac{F_\rho(s; \varphi)}{1-s}$, следовательно, из (19) имеем, что почти всюду на прямой $\mathrm{Re}\, s = \dfrac{1}{2}$ справедливо равенство

$$F_\rho(s; \varphi) = \widetilde{E}_\rho(s; \varphi)\, \Phi_1(1-s) \quad \left(\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right). \tag{20}$$

Обратно, имея равенство (20), легко получить представление (2). Таким образом, в терминах преобразований Меллина равенство (2) равносильно равенству (20), где $\widetilde{E}_\rho(s; \varphi)$ определяется формулой (18), а $\Phi_1(s)$, как легко усмотреть, можно записать в виде

$$\Phi_1(s) = \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon^\rho}} \varphi(t)\, t^{s\rho-1}\, dt, \quad \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}, \tag{21}$$

с $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию (4).

2°. В работе [4] было доказано, что при вышепринятых условиях справедливо равенство

$$k_\rho(x; \varphi) = \int\limits_0^x {}_pF_q(t^{1/\rho} e^{i\varphi})\, t^{\mu-1}\, dt =$$

$$= x\, \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{K_\rho(s; \varphi)}{1-s} x^{-s} ds \quad \left(x > 0,\ \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right), \tag{22}$$

где

$$K_\rho(s;\varphi)=\frac{\pi\rho e^{i\rho(\pi-\varphi)(s+\mu-1)}\,\Psi(s)}{\sin\pi\rho\,(s+\mu-1)},\tag{23}$$

а

$$\Psi(s)=\frac{\Gamma\left(\nu_1-\frac{\rho}{\delta_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p-\frac{\rho}{\delta_p}(s+\mu-1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1-\frac{\rho}{\rho_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1}-\frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s+\mu-1)\right)}.\tag{24}$$

Заметим теперь, что из (20) и (23) следует равенство

$$F_\rho(s;\varphi)=K_\rho(s;\varphi)\frac{\Phi_1(1-s)}{\Gamma(1-s)\,\Psi(s)},\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho},$$

откуда, обозначая $\chi(s)=\dfrac{\Phi_1(s)}{\Gamma(s)\,\Psi(1-s)}$, имеем

$$F_\rho(s;\varphi)=K_\rho(s;\varphi)\,\chi(1-s),\qquad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}.\tag{25}$$

Из (9) и из формулы Стирлинга

$$|\Gamma(r+it)|=O\left(|t|^{r-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right),\qquad |t|\to\infty,$$

имеем

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\Psi\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^{-1}=O(1).$$

Следовательно, $\chi\left(\frac{1}{2}+it\right)\in L_2(-\infty,\infty)$, так как

$$\Phi_1(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right).$$

Обозначим

$$\varkappa(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\,\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\chi(s)\,\tau^{-s}ds=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\chi(s)}{1-s}\tau^{1-s}ds\tag{26}$$

и докажем лемму.

Лемма. *Почти всюду в промежутке* $\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_F},\infty\right)$

$$\varkappa(\tau)=0.$$

Доказательство. Заметим сначала, что функция $\Phi_1(s)$ аналитически продолжается на полуплоскость $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$ формулой

$$\Phi_1(s) = \int_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} \varphi(t)\, t^{s\rho-1}\, dt.$$

Отсюда, полагая $s = Re^{i\varphi}$, в силу неравенства Шварца-Буняковского получим

$$|\Phi_1(Re^{i\varphi})| \leqslant \int_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} |\varphi(t)|\, t^{\rho R\cos\varphi-1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} |\varphi(t)|^2\, t^{\rho-1}\, dt\right\}^{1/2} \left\{\int_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} t^{2\rho R\cos\varphi-\rho-1}\, dt\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\sigma^{R\cos\varphi-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2R\cos\varphi-1}} \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \delta,\ \sin\delta = \frac{1}{2R}\right), \tag{27}$$

где C не зависит от R и φ.

Далее, функция

$$\frac{\Phi_1(s)\,\tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)} \quad (\tau > 0) \tag{28}$$

аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом $-\frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)}$. Нули функции $\Psi(1-s)$ находятся левее прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ в силу условия (9). Пусть D_R есть область, являющаяся пересечением полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ с кругом $|s| = R > 2$, а C_R—дуга $|\arg s| < \frac{\pi}{2} - \delta$ $\left(\sin\delta = \frac{1}{2R}\right)$ окружности $|s| = R$.

Интегрируя функцию (28) по контуру области D_R, получим

$$-\int_{\frac{1}{2}-iR_1}^{\frac{1}{2}+iR_1} \frac{\Phi_1(s)\,\tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)}\,ds + \int_{C_R} \frac{\Phi_1(s)\,\tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)}\,ds =$$

$$= -2\pi i\frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)} \quad \left(R_1 = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}\right), \tag{29}$$

т. е.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}-iR_1}^{\frac{1}{2}+iR} \frac{\chi(s)\,\tau^{1-s}}{1-s}\,ds = \int\limits_{C_R} \frac{\Phi_1(s)\,\tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)}\,ds +$$

$$+ 2\pi i\,\frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)} = I_R(\tau) + 2\pi i\,\frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)}. \tag{29'}$$

Оценим интеграл $I_R(\tau)$ при $R\to\infty$. Имеем

$$|I_R(\tau)| \leqslant R\tau \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{|\Phi_1(Re^{i\varphi})|\,\tau^{-R\cos\varphi}}{|1-Re^{i\varphi}|\,|\Gamma(Re^{i\varphi})\,\Psi(1-Re^{i\varphi})|}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\tau \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{|\Phi_1(Re^{i\varphi})|\,\tau^{-R\cos\varphi}}{|\Gamma(Re^{i\varphi})\,\Psi(1-Re^{i\varphi})|}\,d\varphi. \tag{30}$$

Пользуясь асимптотическим поведением гамма-функции

$$|\Gamma(a+Re^{i\varphi})| = O\left(R^{R\cos\varphi+a-\frac{1}{2}}\,e^{-R(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)}\right),\quad \begin{array}{l}|\varphi|\leqslant\pi-\delta\ (\delta>0),\\ a\in(-\infty,+\infty),\end{array}$$

а также обозначениями (6), (7), (8), получаем

$$|\Gamma(Re^{i\varphi})\,\Psi(1-Re^{i\varphi})|^{-1} = O\left(\sigma_F^{-R\cos\varphi}\right), \tag{31}$$

причем порядок правой части равномерен относительно $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Из (30), в силу (27) и (31), имеем

$$|I_R(\tau)| \leqslant c_1\tau \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{\sigma^{R\cos\varphi}\,\sigma_F^{-R\cos\varphi}}{\sqrt{2R\cos\varphi-1}}\,\tau^{-R\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2c_1\tau \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-R\cos\varphi}}{\sqrt{2R\cos\varphi-1}} = 2c_1\tau \int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-R\sin\varphi}}{\sqrt{2R\sin\varphi-1}}\,d\varphi. \tag{32}$$

(Через c_i $(i=1,2,\cdots)$ обозначим постоянные, не зависящие от R и φ).

Так как $\sin\delta = \frac{1}{2R}$, то из (32) имеем

$$|I_R(\tau)| \leqslant \frac{2c_1\tau}{\sqrt{2R}} \int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-R\sin\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi-\sin\delta}}\,d\varphi \leqslant \frac{c_2\tau}{\sqrt{R}} \int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-\frac{2}{\pi}R\varphi}}{\sqrt{\varphi-\delta}}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_3\tau}{\sqrt{R}}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-\frac{2}{\pi}Rt}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{c_3\tau}{R}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-\frac{2}{\pi}v}}{\sqrt{v}}\,dv. \tag{33}$$

Из (33) при $\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau > 1$

$$|I_R(\tau)| \leqslant \frac{c_1\tau}{R} \quad (\tau > 0). \tag{33'}$$

Переходя к пределу в тождестве (29′) при $R \to \infty$, в силу (33′), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{R_1\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-iR_1}^{\frac{1}{2}+iR_1} \frac{\chi(s)}{1-s}\tau^{1-s}ds = \frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)} \quad \text{при} \quad \tau > \frac{\sigma}{\sigma_F}. \tag{34}$$

Из определения (26) и из (34) следует утверждение леммы. Из доказанной леммы вытекает, что в равенстве (25) $\chi(s)$ есть преобразование Меллина некоторой функции $\varkappa(\tau)$, равной нулю почти всюду вне промежутка $\left(0, \frac{\sigma}{\sigma_F}\right)$.

3°. *Доказательство теоремы.* а) Функция $f(z)$, определенная формулой (11), принадлежит классу $B_{\rho,\sigma}(\omega)$. Действительно, по неравенству Шварца-Буняковского из (11) имеем

$$|f(z)| \leqslant \left\{\int_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} |\psi(t)|^2 t^{\rho-1}dt\right\}^{1/2}\left\{\int_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} |{}_pF_q(zt)|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1}\,dt\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\left|{}_pF_q\left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_F}\right)^{1/\rho}|z|\right]\right|, \tag{35}$$

где C—постоянная. Из (35) видно, что $f(z)$—целая функция порядка ρ и типа $\leqslant\sigma$.

Из (11) имеем также

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi}) = \int_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} {}_pF_q(r^{1/\rho}e^{i\varphi}t)\, t^{\mu\rho-1}\psi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_0^{\sigma/\sigma_F} {}_pF_q(t^{1/\rho}r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,\psi(t^{1/\rho})\,t^{\mu-1}\,dt,$$

где

$$\psi(t^{1/\rho}) \in L_2\left(0, \frac{\sigma}{\sigma_F}\right).$$

Обозначим

$$\varkappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\psi(t^{1/\rho}), & 0 < t < \frac{\sigma}{\sigma_F}, \\ 0, & t > \frac{\sigma}{\sigma_F}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varkappa(t) \in L_2(0, \infty)$.

Пусть $\chi(s)$ есть преобразование Меллина функции $\varkappa(t)$

$$\chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \in L_2(-\infty, \infty).$$

В силу леммы 1 работы [5] имеем

$$\sup_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} |K_\rho(s; \varphi)| < \infty \quad \left(\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Так что

$$K_\rho(s; \varphi)\chi(1-s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right).$$

Обозначим далее через $g(r, \varphi) \in L_2(0, \infty)$ $\left(\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ преобразование Меллина функции $K_\rho(s; \varphi)\chi(1-s)$. Тогда

$$\int_0^r g(t, \varphi)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{K_\rho(s; \varphi)}{1-s}\chi(1-s)\, r^{1-s}\, ds$$

и, в силу равенства Парсеваля,

$$\int_0^r g(t, \varphi)\, dt = \int_0^\infty \frac{k_\rho(xr; \varphi)}{x}\varkappa(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_0^{\sigma/\sigma_F} \frac{k_\rho(xr; \varphi)}{x}\psi(x^{1/\rho})\, dx. \tag{36}$$

Дифференцируя (36) по r и учитывая, что согласно (22)

$$\frac{d}{dr}k_\rho(r; \varphi) = {}_pF_q(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\, r^{\mu-1},$$

получим

$$g(r, \varphi) = \frac{1}{\rho}\int_0^{\sigma/\sigma_F} {}_pF_q(r^{1/\rho}x^{1/\rho}e^{i\varphi})\, x^{\mu-1}\psi(x^{1/\rho})\, dx,$$

т. е.

$$g(r, \varphi) = f(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{\mu-1},$$

так что $f(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$, т. е. $f(z) \in B_{\rho, \sigma}(\omega)$.

б) Пусть $f(z) \in B_{\rho, \sigma}(\omega)$. Тогда, как уже мы видели, справедливо равенство

$$F_\rho(s; \varphi) = K_\rho(s; \varphi) \chi(1-s), \quad \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}, \tag{37}$$

где $\chi(s)$ есть преобразование Меллина функции $\varkappa(\tau)$, равной нулю почти всюду в промежутке $\left(\frac{\sigma}{\sigma_F}, \infty\right)$. Разделим равенство (37) на $2\pi i(1-s) r^{s-1}$ $(r > 0)$ и проинтегрируем по линии $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$. Тогда, в силу равенства Парсеваля, получим

$$\int_0^r f(t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt = \int_0^\infty \frac{k_\rho(r\tau; \mu)}{\tau} \varkappa(\tau) d\tau = \int_0^{\sigma/\sigma_F} \frac{k_\rho(r\tau; \mu)}{\tau} \varkappa(\tau) d\tau$$

или, дифференцируя по r, будем иметь

$$f(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) = \int_0^{\sigma/\sigma_F} {}_pF_q(r^{1/\rho} \tau^{1/\rho} e^{i\varphi}) \tau^{\mu-1} \varkappa(\tau) d\tau,$$

т. е.

$$f(z) = \int_0^{\sigma/\sigma_F} {}_pF_q(z\tau^{1/\rho}) \tau^{\mu-1} \varkappa(\tau) d\tau, \tag{38}$$

где $\varkappa(\tau) \in L_2\left(0, \frac{\sigma}{\sigma_F}\right)$.

Равенство (38) в свою очередь равносильно равенству (11) теоремы. Теорема доказана.

4°. Выделим один частный случай этой теоремы. Пусть $p = 0$, $q = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \nu + 1$, $\rho_1 = \rho_2 = 1$, тогда $\rho = \frac{1}{2}$, $\mu = \nu + \frac{3}{2}$ и, так как $\frac{1}{2} < \mu < \frac{5}{2}$, то имеем $-1 < \nu < 1$; кроме того, $\sigma_F = 2$, $\omega = \nu$. Класс $B_{\frac{1}{2}, \sigma}(\nu)$ представляет совокупность целых функций порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |f(-t)|^2 t^\nu dt < \infty \qquad (-1 < \nu < 1).$$

Следствие. Класс $B_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$f(z)=z^{-\frac{\nu}{2}}\int_0^{\frac{\sigma^2}{4}} I_\nu(2\sqrt{zt})\,\varphi(t)\,dt,$$

где $I_\nu(z)$ — видоизмененная функция Бесселя

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \quad \text{и} \quad \varphi(t)\in L_2\left(0,\ \frac{\sigma^2}{4}\right).$$

Эквивалентная формулировка этого результата следующая: пусть $\widetilde{B}_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ — класс целых функций порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^\nu dx<\infty \qquad (-1<\nu<1).$$

Класс $\widetilde{B}_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z)=z^{-\frac{\nu}{2}}\int_0^{\frac{\sigma^2}{4}} J_\nu(2\sqrt{zt})\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$\varphi(t)\in L_2\left(0,\ \frac{\sigma^2}{4}\right) \quad \text{и} \quad J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

— функция Бесселя.

При преобразовании $z=w^2$ $\widetilde{B}_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ переходит в класс четных целых функций $F(w)$ порядка 1 и типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |F(u)|^2 u^{2\nu+1}\,du<\infty \qquad (-1<\nu<1).$$

Обозначим этот класс через $B_\sigma(\nu)$.

Тогда получим, что $B_\sigma(\nu)$ *совпадает с множеством функций* $F(w)$, *допускающих представление вида*

$$F(w)=w^{-\nu}\int_0^\sigma J_\nu(w\tau)\sqrt{\tau}\,\varkappa(\tau)\,d\tau, \tag{39}$$

где $\varkappa(\tau)\in L_2(0,\sigma)$.

В работе [7] установлено, что утверждение, заключающееся в том, что любая функция из класса $B_\sigma(\nu)$ допускает представление (39) при некотором $\nu = \lambda + \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$, есть следствие его справедливости при одном лишь значении $\lambda \left(> -\frac{1}{2}\right)$. Тем самым в этой работе установлена справедливость представления (39) при любом ν из промежутка $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Таким образом, если *класс* $B_\sigma(\nu)$ *рассматривается для любого* $-1 < \nu < \infty$, *то для него также справедливо параметрическое представление (39).*

Отметим также, что параметрическое представление класса $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ можно осуществлять и при помощи ядра

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\vartheta)^{k/\rho_1+\mu_1}\left[\Gamma\left(k\rho_2^{-1}+\mu_2\right)\right]^{1/\rho_3}},$$

преобразование Меллина лучевых значений которого дано в работе [6]. А именно: справедлива

Теорема 2. *Класс* $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ *совпадает с совокупностью функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z) = \int_0^{(\sigma/\tilde{\sigma})^{1/\rho}} F(zt)\, t^{\mu\rho-1}\, \psi(t)\, dt,$$

где

$$\rho = (\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}\rho_3^{-1})^{-1} \geqslant \frac{1}{2}; \quad \mu = \mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_3}\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho};$$

$\vartheta \geqslant 1;$ $\tilde{\sigma} = \frac{1}{\rho e}(\rho_2 e)^{\frac{\rho}{\rho_2\rho_3}}$ *и* $\psi(t)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^{(\sigma/\tilde{\sigma})^{1/\rho}} |\psi(t)|^2\, t^{\rho-1}\, dt < \infty.$$

И, наконец, отметим, что в представлении М. М. Джрбашяна [3] класса $W_\sigma^{(\rho)}\{\omega, \{\vartheta_k\}, \{\sigma_k\}\}$ вместо фигурирующей там целой функции типа Миттаг-Леффлера можно взять функции, рассмотренные нами выше, так как каждое слагаемое в представлении класса $W_\sigma^{(\rho)}\{\omega, \{\vartheta_k\}, \{\sigma_k\}\}$ допускает также представление с ядрами указанных видов.

В заключение выражаю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 3. I. 1966

Ս. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Մ. Մ. Ջրբաշյանը [1], [2] *դիտարկել է*

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr\right\}<\infty \qquad (-1<\omega<1)$$

պայմանին բավարարող, $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ կարգի և σ-ից ոչ բարձր տիպի ամբողջ ֆունկցիաների $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ դասը և տվել է այդ դասի պարամետրական ներկայացումը։ Այդ ներկայացման մեջ որպես կորիզ հանդես է եկել Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիան։ Ներկա աշխատանքում մենք ցույց ենք տվել, որ $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ դասի պարամետրական ներկայացման մեջ, որպես կորիզ կարելի է օգտագործել նաև ընդհանրացրած հիպերերկրաչափական ֆունկցիաները։

S. A. HAKOPIAN

ON PARAMETRIC REPRESENTATION OF A CLASS OF ENTIRE FUNCTIONS

S u m m a r y

M. M. Džrbašian [1]—[2] has considered the class $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ of entire functions of finite order $\rho > \frac{1}{2}$ and of type $\leqslant \sigma$ for which

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr\right\}<\infty \qquad (-1<\omega<1)$$

giving at the same time the parametric representation of the class.

In that representation the entire function of Mittag-Lefler type serves as a Kernel function.

In the present paper we have shown that the hypergeometric function could serve the purpose equally well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сборник, 33 (75): 3 (1953), 485—530.

2. *М. М. Джрбашян.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, Изв. АН СССР, сер. матем, 19 (1955), 133—190.
3. *М. М. Джрбашян.* О представлении некоторых классов целых и квазицелых функций, ДАН СССР, 159, № 1, 9—12.
4. *М. М. Джрбашян.* Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Леффлера, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 13, № 3 (1960), 21—63.
5. *С. А. Акопян.* Интегральные преобразования с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями и обобщенными функциями типа Вольтерра, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 15, № 1 (1962), 13—36.
6. *С. А. Акопян.* Об одном интегральном преобразовании, ДАН АрмССР, 34, № 1 (1962), 3—12.
7. *Н. И. Ахиезер.* К теории спаренных интегральных уравнений, Записки мат. отделения физ.-мат. факультета ХГУ и Харьковского мат. общества, 25, 1957, 5—31.