ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ СПЕКТР САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА В АБСТРАКТНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. В работах [1], [2] указана процедура, позволяющая строить полную систему собственных функционалов самосопряженных операторов при любом характере их спектров, не прибегая к предварительному построению соответствующего спектрального семейства проекционных операторов.

Проведенные в этих работах построения позволили также сделать некоторые заключения о характере спектра этих операторов в терминах асимптотического поведения резольвенты при приближении к точкам вещественной оси.

Настоящая работа посвящена получению некоторых новых результатов в этом направлении.

Попутно доказывается утверждение, представляющее собой развитие известной леммы Привалова о скачках интегралов типа Коши.

2. Пусть A— самосопряженный оператор с областью определения D_A, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а E_λ—соответствующее этому оператору спектральное семейство.

Для упрощения изложения предположим, что спектр оператора A простой.

Образуем выражение

$$I_\tau(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\left(\left(R_{\lambda+i\tau}-R_{\lambda-i\tau}\right)g,\,g\right)=\frac{\tau}{\pi}\left\|R_{\lambda+i\tau}\,g\right\|^2, \qquad (1)$$

где R_z—резольвента, g—порождающий элемент, тогда, очевидно,

$$I_\tau(\lambda)=\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}, \qquad (1^*)$$

где, как обычно, введено обозначение $\rho(t)=\|E_t g\|^2$, и всюду в дальнейшем $\rho(t)$ предполагается непрерывной слева.

Асимптотическое поведение $I_\tau(\lambda)$ при $\tau\to+0$, очевидно, зависит от локальной структуры функции $\rho(t)$, и в работе [2] упомянуты некоторые случаи, когда это поведение, в свою очередь, характеризует локальную структуру $\rho(t)$.

Наша ближайшая цель заключается в том, чтобы подробнее изучить зависимость локальной структуры функции $\rho(t)$ в окрестности точки $t=\lambda$ от асимптотического поведения функции $I_\tau(\lambda)$ при $\tau\to+0$.

Лемма 1. *Пусть в точке λ существуют односторонние (необязательно конечные) производные неубывающей функции $\rho(t)$, тогда*

$$\lim_{\tau\to+0} I_\tau(\lambda)=\frac{\rho'(\lambda-0)+\rho'(\lambda+0)}{2}.$$

Доказательство. Допустим сначала, что $0<\rho'(\lambda-0)<+\infty$. Пусть $y=y_\varepsilon(t)$—уравнение прямой, где $y_\varepsilon(t)=\rho(\lambda)+\left[\rho'(\lambda-0)-\right.$ $\left.-\frac{\varepsilon}{2}\right](t-\lambda)$, тогда, очевидно, существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что в интервале $[\lambda-\delta,\lambda)$ имеет место неравенство $y_{2\varepsilon}(t)>y_\varepsilon(t)>\rho(t)$. Построим последовательность точек с помощью рекуррентных соотношений

$$\rho(t_{k+1})\leqslant y_\varepsilon(t_k)\leqslant\rho(t_{k+1}+0), \tag{2}$$

где положено $t_0=\lambda-\delta$. Легко видеть, что неравенство (2) однозначно определяет t_{k+1} при заданном t_k, если только $y_\varepsilon(t_k)$ не равно значению функции $\rho(t)$ в некотором интервале (в последнем случае в качестве t_{k+1} возьмем, например, левый конец этого интервала). Очевидно, что при всех $k=0, 1, 2,\cdots$ имеем $t_k<t_{k+1}$. Легко доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\lambda$. В самом деле, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} t_{k_n}=t^*<\lambda$, тогда, поскольку $\rho(t^*+0)<y_\varepsilon(t^*)$, то в силу непрерывности $y_\varepsilon(t)$ будем иметь $y_\varepsilon(t)>$ $>\rho(t^*+0)$ для всех $t\in[t_{k_{n_0}}, t^*]$, поэтому $t_{k_{n_0}+p}>t^*$ для всех $p>1$, что противоречит $\lim\limits_{n\to\infty} t_{k_n}=t^*$. Построим вспомогательную, кусочно постоянную функцию $\tilde\rho(t)$, полагая $\tilde\rho(t)=y_\varepsilon(t_k)$ при $t_k\leqslant t<t_{k+1}$ $(k=$ $=0, 1, 2,\cdots)$, а $\tilde\rho(\lambda)=\rho(\lambda-0)$.

Докажем, что для всех $\tau>0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\tilde\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{3}$$

В самом деле, путем представления этих интегралов в виде счетного числа интегралов по частичным промежуткам $[t_k, t_{k+1})$, придадим неравенству (3) следующий вид:

$$\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_\varepsilon(t_{k+1})-y_\varepsilon(t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}.$$

Последнее неравенство очевидно, поскольку

$$\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{s}{2}\right]\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<$$

$$<\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{s}{2}\right]\frac{(t_{k+1}-t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}=\frac{\tau}{\pi}\frac{y_s(t_{k+1})-y_s(t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}.$$

Теперь докажем, что для всех $\tau>0$ справедливо неравенство

$$\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\tilde{\rho}(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{4}$$

Обозначим точки разрыва функции $\rho(t)$ в промежутке $[\lambda-\delta,\lambda)$ через η_k и представим интеграл в правой части (4) в виде суммы интегралов по частичным промежуткам $[t_n, t_{n+1})$, тогда будем иметь

$$\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\sum_{n=0}^{\infty}I_n, \tag{4.1}$$

где

$$I_n=\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\sum_{\eta_k\in[t_n,\,t_{n+1})}\frac{\tau}{\pi}\frac{\rho(\eta_k+0)-\rho(\eta_k)}{(\eta_k-\lambda)^2+\tau^2}+$$

$$+\sum_{\Delta_l\subset[t_n,\,t_{n+1})}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{4.2}$$

В последней сумме через Δ_l обозначены счетное число взаимно неперекрывающихся открытых интервалов, на которые разбивается промежуток $[\lambda-\delta,\lambda]$ точками разрыва $\{\eta_k\}$ и построенными выше точками $\{t_k\}$. Легко видеть, что при всех $\tau>0$ справедливо неравенство

$$I_n+\frac{\tau}{\pi}\frac{y_s(t_n)-\rho(t_{n+1})}{(t_{n+1}-\lambda)^2+\tau^2}\geqslant\frac{\tau}{\pi}\frac{\underset{t_n<t<t_{n+1}}{\mathrm{Var}}\ \rho(t)+y_s(t_n)-\rho(t_{n+1})}{(t_n-\lambda)^2}=$$

$$=\frac{\tau}{\pi}\frac{y_s(t_n)-\rho(t_n)}{(t_n-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{4.3}$$

Теперь мы можем переписать неравенство (4) в виде

$$\frac{\tau}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_s(t_{k+1})-y_s(t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}<\sum_{n=0}^{\infty}I_n \tag{4*}$$

и, добавляя к обеим частям один и тот же сходящийся ряд, получим

$$\frac{\tau}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_{\varepsilon}(t_{k+1})-\rho(t_{k+1})}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}<\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\tau}{\pi}\frac{y_{\varepsilon}(t_k)-\rho(t_{k+1})}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}+I_k\right\}. \qquad (4.4)$$

Тогда, сравнивая в неравенстве (4.4) каждый член ряда слева со следующим членом ряда справа и пользуясь (4.3), легко убеждаемся в справедливости (4*) для всех $\tau>0$.

Таким образом, сопоставляя неравенства (3) и (4), мы получаем, что для всех $\tau>0$ имеет место неравенство

$$\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\int_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \qquad (5)$$

С другой стороны, можно указать такое $\tau_0(\varepsilon)$, что для всех $\tau<\tau_0$ имеет место неравенство $\frac{1}{\pi}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}>\frac{1}{3}$, поэтому из (5) получаем

$$\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\varepsilon\right]\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} \qquad (6)$$

для всех $\tau\leqslant\min\{\tau_0(\varepsilon),\ \tau_1(\varepsilon)\}$, где $\tau_1(\varepsilon)$ выбрано так,чтобы

$$\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda-\delta}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\varepsilon}{6\rho'(\lambda-0)}.$$

Проводя через точку $(\lambda, \rho(\lambda-0))$ две прямые с угловыми коэффициентами, равными, соответственно, $\rho'(\lambda-0)+\varepsilon$ и $\rho'(\lambda-0)+\frac{\varepsilon}{2}$, путем совершенно аналогичных построений можно установить неравенство

$$\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)+\varepsilon\right]\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2} \qquad (6^*)$$

для всех $\tau\leqslant\min\{\tau_0'(\varepsilon),\ \tau_1'(\varepsilon)\}$. Сопоставляя неравенства (6) и (6*), легко заключить, что для всех достаточно малых $\tau>0$ имеют место двусторонние оценки

$$\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}\left[\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-1\right]-\frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<$$

$$<\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}<$$

$$< \frac{\rho'(\lambda-0)}{2}\left[\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-1\right]+\frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\right|. \qquad (7)$$

Принимая во внимание, что $\lim\limits_{\tau\to+0}\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=1$, из неравенства (7) заключаем, что

$$-\varepsilon<\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}<+\varepsilon, \qquad (7^*)$$

если только τ достаточно мало. Таким образом, в силу произвольности ε,

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}.$$

Совершенно так же, предполагая, что $0<\rho'(\lambda+0)<+\infty$, можно доказать, что

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\frac{\rho'(\lambda+0)}{2}.$$

Теперь предположим, что $\rho'(\lambda-0)=0$. В этом случае, поскольку $\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}$ неотрицательно, то достаточно получить оценку этого интеграла только сверху, что может быть сделано аналогично предыдущему случаю.

Предположим, наконец, что $\rho'(\lambda-0)=+\infty$. Будем исходить из очевидного неравенства

$$\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\geqslant\frac{\tau}{\pi}\int_{\lambda-\tau}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\geqslant\frac{1}{2\pi}\frac{\rho(\lambda)-\rho(\lambda-\tau)}{\tau}, \qquad (8)$$

откуда непосредственно заключаем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=+\infty.$$

Таким образом, лемма 1 доказана полностью.

Замечание 1. Представляя любую функцию ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих, из доказанной леммы 1 непосредственно заключаем, что скачок $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+0}[\Phi(z)-\Phi(\bar{z})]$ интеграла типа Коши-Стильтьеса

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho(t)}{t-z}$$

существует почти всюду по мере Лебега, какова бы ни была функция ограниченной вариации $\rho(t)$, и равен производной $\rho'(\lambda)$, безотносительно к тому, суммируема ли эта производная или нет. Более того, из этой леммы следует, что этот скачок существует во всех тех точках, где каждая из неубывающих компонент функции $\rho(t)$ обладает производной, хотя бы одна из которых конечна. В том частном случае, когда $\rho(t)$ абсолютно непрерывна по Лебегу, $\Phi(z)$ превращается в интеграл типа Коши, поэтому существование скачка почти всюду по мере Лебега следует из известной леммы Привалова [3]. Таким образом, лемму 1 можно рассматривать, как развитие упомянутой леммы Привалова, в случае, когда кривая L есть отрезок прямой.

Лемма 2. *Функция $I_\tau(\lambda)$ стремится к нулю при $\tau\to+0$ тогда и только тогда, когда $\rho'(\lambda)$ существует и равна нулю.*

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из леммы 1, а необходимость из нижеследующего неравенства

$$I_\tau(\lambda)>\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\tau}^{\lambda+\tau}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}>\frac{1}{2\pi}\,\frac{\rho(\lambda+\tau)-\rho(\lambda-\tau)}{2\tau}.$$

Лемма 3. *Для того, чтобы функция $I_\tau(\lambda)=O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ при фиксированном λ и $\tau\to+0$, необходимо и достаточно, чтобы точка $t=\lambda$ была точкой разрыва функции $\rho(t)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda-0)>0$, тогда из нижеприведенного соотношения

$$I_\tau(\lambda)=\frac{\tau}{\pi}\,\frac{\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda)}{\tau^2}+\frac{\tau}{\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\lambda-0}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}+\int\limits_{\lambda+0}^{+\infty}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\right]$$

следует, что $I_\tau(\lambda)\to+\infty$ не медленнее, чем $\frac{1}{\tau}$, а, с другой стороны, очевидно, что $I_\tau(\lambda)\leqslant\frac{\mathrm{Var}\,\rho(t)}{\pi\tau}$, поэтому достаточность установлена. Теперь предположим, что точка $t=\lambda$ является точкой непрерывности $\rho(t)$, и докажем, что $\lim\limits_{\tau\to+0}\tau\cdot I_\tau(\lambda)=0$. Предположим противное, тогда существует последовательность $\tau_n\to+0$ такая, что $\tau_n\cdot I_{\tau_n}(\lambda)>c>0$.

Из непрерывности $\rho(t)$ в точке λ следует, что $\rho(\lambda+\delta)-\rho(\lambda-\delta)<\frac{c}{3}$ при достаточно малом $\delta>0$. Представим $I_\tau(\lambda)$ в виде

$$I_\tau(\lambda) = \frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda-\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} + \frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} +$$

$$+\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda+\delta}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}, \tag{9}$$

тогда при достаточно малом τ первый и третий интегралы вместе не будут превосходить $\frac{c}{3}$ и для таких τ будем иметь неравенство

$$I_\tau(\lambda) \leqslant \frac{c}{3} + \frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} \leqslant \frac{c}{3\tau} + \frac{\rho(\lambda+\delta)-\rho(\lambda-\delta)}{\pi\tau} \leqslant \frac{2c}{3\tau},$$

что противоречит неравенству $I_{\tau_n}(\lambda) \geqslant \frac{c}{\tau_n}$ для достаточно больших n.

Лемма доказана.

Пусть неубывающая функция $\rho(t)$ представлена в виде

$$\rho(t) = \rho_0(t) + \rho_1(t) + \rho_2(t), \tag{10}$$

где $\rho_0(t)$—функция скачков, $\rho_1(t)$—абсолютно непрерывна по Лебегу, а $\rho_2(t)$—чисто сингулярна, т. е. $\rho_2'(t) = 0$ почти всюду по мере Лебега.

Лемма 4. *Пусть* $\rho(t)$ *чисто сингулярна в промежутке* $(-\infty, +\infty)$ *и пусть* M_∞*—совокупность таких точек, в которых производная* $\rho'(t)$ *существует и равна* $+\infty$, *тогда* ρ*-мера множества* CM_0 *равна нулю.*

Доказательство. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением конечного интервала $(-R, +R)$. Пусть M_0—совокупность точек, где $\rho'(t) = 0$, тогда по определению чисто сингулярной функции имеем, что $\operatorname{mes} CM_0 = 0$. Пусть M_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$—совокупность таких точек из CM_0, в которых все производные числа $D\rho(t) \leqslant n$, а N_n—множество таких точек из CM_0, в которых производные числа $D\rho(t)$ неограничены, но одно из них не превосходит n. Тогда легко убедиться, что

$$CM_0 = MUNUM_\infty, \tag{11}$$

где $M = \underset{n}{U} M_n$, $N = \underset{n}{U} N_n$. Составим функцию $\sigma(t) = \rho(t) + t$, которая уже строго возрастающая, поэтому, в силу известной леммы [4], следовательно, в силу непрерывности $\rho(t)$, заключаем, что σ-мера множества M_n равна нулю. Легко убедиться, далее, что ρ-мера множества M_n также равна нулю.

Аналогично убеждаемся, что ρ-мера множества N_n равна нулю при всех n, поэтому объединение всех этих множеств, т. е. MUN, также имеет ρ-меру, равную нулю. Поскольку в представлении (11) множества M, N, M_∞ без общих точек, то $\rho(CM_0) = \rho(M_\infty)$ и так как $\rho(M_0) = 0$, то лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Какова бы ни была неубывающая в промежутке* $[-\infty, +\infty]$ *функция* $\rho(t)$, *интеграл* $I_\tau(\lambda)$ *стремится к конечному (положительному) или бесконечному пределу на множестве точек, которое обладает полной* ρ-*мерой.*

Доказательство. Пусть E_0—точки разрыва функции $\rho(t)$, E_1-множество тех точек, в которых производная $\rho_1'(t)$ положительна и меньше бесконечности. Легко видеть, что

$$\rho_1([-\infty, +\infty]) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1'(t)\,dt =$$

$$= \int_{E_1} \rho_1'(t)\,dt = \rho_1(E_1), \quad \rho_0([-\infty, +\infty]) = \rho_0(E_0),$$

а, в силу леммы 4, $\rho_2([-\infty, \infty]) = \rho_2(M_\infty)$, поэтому получим

$$\rho([-\infty, +\infty]) = \rho_0(E_0) + \rho_1(E_1) + \rho_2(M_\infty),$$

откуда легко заключить, что

$$\rho([-\infty, +\infty]) = \rho(E_0 U E_1 U M_\infty). \tag{12}$$

Теперь уже, принимая во внимание лемму 1, из соотношения (12) убеждаемся в справедливости леммы 5.

3. В работе [2] было введено понятие ядра спектра или, так называемого, существенного спектра самосопряженного оператора A следующим образом.

Определение 1. Точка λ_0 принадлежит существенному спектру $S_l(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента $g \in H$

$$\liminf_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda_0 + i\tau} g \|^2 > 0.$$

Другими словами, в существенный спектр входят лишь те точки λ_0, в которых для некоторого g $\| R_{\lambda_0 + i\tau} g \| \to +\infty$ не медленнее $\dfrac{c}{\sqrt{\tau}}$, тогда как в точках спектра в смысле классической теории этому выражению позволяется стремиться к бесконечности как угодно медленно. Установленная выше лемма 5 позволяет усовершенствовать определение существенного спектра.

Определение 1*. Точка λ_0 принадлежит существенному спектру $S_l^*(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $g \in H$ существует и больше нуля $\lim\limits_{\tau \to +0} \dfrac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda_0 + i\tau} g \|^2$.

Очевидно, $S_l^*(A)$ является частью $S_l(A)$, тем не менее из леммы 5 следует, что $S_l^*(A)$ также обладает полной спектральной мерой.

4. В этом пункте мы сформулируем несколько теорем, которые позволяют судить о характере спектра, т. е. о свойствах спектральной

меры в терминах асимптотического поведения выражения $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2$ при $\tau\to+0$.

Теорема 1. *Для чистой точечности спектра самосопряженного оператора A с простым спектром достаточно, чтобы для каждого $\lambda\in S_l^*(A)$ (за исключением, быть может, счетного числа) существовал такой элемент $g_\lambda\in H$, что $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g_\lambda\|^2=O\left(\frac{1}{\tau}\right)$.*

В самом деле, если в некоторой точке λ_0 выражение

$$\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda_0+i\tau}g\|^2=o\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

для всех $g\in H$, то точка λ_0 должна быть точкой непрерывности $\rho(t)$, ибо в противном случае, в силу леммы 3, это выражение было бы $O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ для некоторого g.

Таким образом, в указанных в теореме 1 счетном числе исключительных точках сосредоточена нулевая спектральная мера.

Из доказательства той же леммы 3 легко заключить *, что все точки λ, в которых это выражение есть $O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ для некоторого $g_\lambda\in H$, являются точками разрыва.

Таким образом, доказательство закончено, поскольку вся спектральная мера оказывается сосредоточенной в точках разрыва $\rho(t)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы спектр оператора A был чисто сингулярным, необходимо и достаточно, чтобы лебеговская мера $S_l^*(A)$ была равна нулю, и ни при одном $\lambda\in S_l^*(A)$, и ни при каком $g\in H$ выражение $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2\neq O\left(\frac{1}{\tau}\right)$.*

Пусть спектр—чисто сингулярный, тогда, по определению, нет точек разрыва, а по лемме 3 выражение $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2\neq O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ ни при одном $g\in H$. С другой стороны, по лемме 5 вся спектральная мера сосредоточена в $S_l^*(A)$, а, по определению чистой сингулярности, лебеговская мера множества $S_l^*(A)$ должна равняться нулю.

Доказательство достаточности также просто, поскольку из леммы 3 следует, что точек разрыва нет, а из леммы 5 следует, что вся спектральная мера сосредоточена на множестве $S_l^*(A)$, которое по условию имеет лебеговскую меру нуль. Теорема доказана.

---

* Для этого достаточно выбрать $\delta>0$ так, чтобы

$$\rho(\lambda+\delta)-\rho(\lambda-\delta)<\frac{c}{3\|g_\lambda\|^2}.$$

Пусть g— так называемый порождающий элемент, тогда, в силу леммы 1, для почти всех λ по мере Лебега существует предел

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2=\Phi(\lambda),$$

поэтому, в силу той же леммы 1, очевидна следующая

Теорема 3. *Для того, чтобы спектр оператора A был лебеговским в интервале (α, β), необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(\lambda)$ была суммируема по Лебегу в этом интервале.*

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 5. I. 1966.

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԱԲՍՏՐԱԿՏ ՀԻԼԲԵՐՏՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԸ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՂ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ կատարելագործվում է ինքնահամալուծ օպերատորի սպեկտրի կորիզի սահմանումը և գտնված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, օպերատորի ռեզոլվենտի ասիմպտոտիկ վարքի տերմիններով, որպեսզի օպերատորի սպեկտրը լինի կետային, սինգուլյար և լեբեգյան։ Միաժամանակ ստացված է Կոշու տիպի ինտեգրալների թռիչքի վերաբերյալ Պրիվալովի հայտնի լեմմայի, որոշ իմաստով, ընդհանրացումը։

R. A. ALEXANDRIAN, R. J. MEKRCHIAN

SOME TESTS CHARACTERIZING THE SPECTRUM OF A SELF-ADJOINT OPERATOR IN ABSTRACT HILBERT SPACES

Summary

In this paper we improve the definition of the kernel of the spectrum of a self-adjoint operator and give necessary and sufficient conditions (in terms of „asymptotic behaviour of the resolvent of the operator“) for the spectrum of an operator to be point, singular or Lebesgue.

In some sense we also generalize of Privalov's well known lemma concerning the limiting values of Cauchy type integrals.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян*, ДАН АрмССР, 11, № 5, 1965.
2. *Р. А. Александрян*, ДАН СССР, 162, № 1, 1965.
3. *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950, 190.
4. *И. П. Натансон*, Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957, 226.