ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

В настоящей статье* устанавливаются алгебраические свойства систем рациональных функций, всевозможные полюсы которых лежат на заданной последовательности точек вне единичного круга, и ортонормальных на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$. В предельном случае, когда все полюсы системы отождествляются с бесконечно удаленной точкой, установленные здесь теоремы сводятся к соответствующим хорошо известным утверждениям теории ортогональных с весом на единичной окружности полиномов, развитой в работах Г. Сеге [2]—[3].

§ 1. Построение ортогональной системы. Функциональные свойства ядер распределения $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$

1.1. Пусть $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут появляться и числа конечной или даже бесконечной кратности (причем не обязательно подряд).

С последовательностью $\{\alpha_k\}_0^\infty$ ассоциируем две последовательности целых положительных чисел $\{\nu_k\}_0^\infty$ и $\{p_k\}_0^\infty$, где при данном $k\geqslant 0$ ν_k означает кратность появления числа α_k в группе чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$, а p_k определяется из условий

$$p_k=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha_k\neq 0\\ \nu_k, & \text{если } \alpha_k=0\end{cases}\quad (k=0,\,1,\,2,\cdots). \tag{1.1}$$

Наконец, последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ ставим в соответствие последовательность рациональных функций

$$\left\{\frac{z^{p_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{\nu_k}}\right\}_0^\infty. \tag{1.2}$$

Отметим, что при данном $k\geqslant 0$ функция $z^{p_k-1}(1-\bar{\alpha}_k z)^{-\nu_k}$ имеет только один полюс порядка ν_k в точке $z=\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\left(\left|\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right|>1\right)$, если

---

* Содержащиеся здесь результаты без доказательств были анонсированы в заметке [1].

$\alpha_k \neq 0$; если же $\alpha_k = 0$, то полюс этот лежит в точке $z = \infty$ и имеет порядок $p_k - 1$.

Заметим также, что в крайнем случае, когда $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, очевидно, $\nu_k = p_k = k + 1$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, ввиду чего у нас нулевой последовательности $\{0\}_0^\infty$ будет ставиться в соответствие последовательность степеней $\{z^k\}_0^\infty$.

Назовем системой Мальмквиста, ассоциированной с последовательностью чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$, систему рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, где

$$\varphi_0(z) = \frac{(1 - |\alpha_0|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z) = \frac{(1 - |\alpha_n|^2)^{1/2}}{(1 - \bar{\alpha}_n z)} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1.3}$$

полагая при этом, что при $\alpha_k = 0$ $\dfrac{|\alpha_k|}{\alpha_k} = \dfrac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} = -1$.

Известно, что эта система ортонормальна на единичной окружности в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)}\, dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots;\ z = e^{ix}). \tag{1.4}$$

Элементарными рассуждениями легко убедиться в том, что система функций $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ представляет собой результат ортогонализации упорядоченной последовательности рациональных функций (1.2) на единичной окружности $z = e^{ix}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ при наличии веса $\dfrac{1}{2\pi} dx$. Отсюда легко следует, что при любом $n \geqslant 0$ справедливы представления вида

$$\frac{z^{p_k - 1}}{(1 - \bar{\alpha}_n z)^{\nu_k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \varphi_k(z), \quad a_n^{(n)} \neq 0,$$

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} \frac{z^{p_k - 1}}{(1 - \bar{\alpha}_k z)^{\nu_k}}, \quad b_n^{(n)} \neq 0. \tag{1.5}$$

1.2. Пусть $\alpha(x)$—произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ с бесконечным множеством точек роста.

Мы будем ортогонализировать упорядоченную последовательность рациональных функций (1.2) на окружности $z = e^{ix}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ при наличии веса $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$.

Но из формул (1.5), очевидно, следует, что применение процесса ортогонализации с весом $(2\pi)^{-1}\, d\alpha(x)$ на единичной окружности соответственно к упорядоченным последовательностям функций

$$\left\{\frac{z^{p_k-1}}{(1-\bar{a}_k z)^{\nu_k}}\right\}_0^\infty \quad \text{и} \quad \{\varphi_k(z)\}_0^\infty,$$

приведет нас к одной и той же ортонормальной системе.

Таким образом, мы получим последовательность рациональных функций $\{\Phi(z)\}_0^\infty$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции нашей системы единственным образом:

а) $\Phi_n(z)$ есть „полином порядка n" от первых $n+1$ функций Мальмквиста

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n}\varphi_k(z), \quad c_{1,n}>0, \tag{1.6}$$

б)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}\,d\alpha(x) = \delta_{n,m}, \quad z=e^{ix} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.7}$$

Обозначим

$$(\varphi_p, \varphi_q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_p(z)\overline{\varphi_q(z)}\,d\alpha(x), \quad z=e^{ix} \quad (p, q = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.8}$$

и введем в рассмотрение определители Грамма

$$D_0 = (\varphi_0, \varphi_0), \quad D_n = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)\cdots(\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0)\cdots(\varphi_1, \varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi_n, \varphi_0)\cdots(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{1.9}$$

Ввиду того, что каждая конечная часть $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ счетной системы функций $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ линейно-независима, можно утверждать, что все определители D_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ положительны.

Следовательно, пользуясь формулами ортогонализации Э. Шмидта, искомые функции системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ можно представить в виде:

$$\Phi_0(z) = \frac{\varphi_0(z)}{\sqrt{D_0}},$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)\cdots & (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0)\cdots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_0)\cdots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) & (\varphi_{n-1}, \varphi_n) \\ \varphi_0(z)\ \cdots & \varphi_{n-1}(z) & \varphi_n(z) \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

Для дальнейших наших целей мы введем специальные обозначения для крайних коэффициентов функции $\Phi_n(z)$ в ее разложении (1.6) по функциям Мальмквиста. А именно: положим

$$k_n = c_{n,n} \quad \text{и} \quad l_n = c_{0,n}. \tag{1.11}$$

Из формул (1.10), очевидно, имеем

$$k_n = (D_{n-1}/D_n)^{1/2} \tag{1.12}$$

$$l_n = (-1)^n (D_{n-1} D_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_1) \cdots (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_1) \cdots (\varphi_1, \varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_1) \cdots (\varphi_{n-1}, \varphi_n) \end{vmatrix}, \tag{1.13}$$

где следует положить $D_{-1} = 1$.

В заключение отметим, что так как в частном случае, когда $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, система Мальмквиста переходит в систему степеней $\{z^k\}_0^\infty$, то при этом ортогональная с весом $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$ система рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ переходит в систему полиномов Г. Сеге — $\{P_k(z)\}$, ортогональных с тем же весом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(z) \overline{P_m(z)}\, d\alpha(x) = \delta_{n,m}, \quad z = e^{ix} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.14}$$

1.3. Приведем теперь несколько лемм об экстремальных свойствах ортогональной системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ и ассоциированных с нею так называемых *ядер распределения* $(2\pi)^{-1}\, d\alpha(x)$:

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\zeta)}\, \Phi_k(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Отметим, что эти свойства представляют собой аналоги соответствующих хорошо известных экстремальных свойств полиномов Г. Сеге.

Предварительно условимся обозначать через $M\{\alpha_k\}_0^n$ всевозможные линейные комбинации от системы функций Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, где $n \geqslant 0$ фиксировано, т. е. множество рациональных функций вида

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(z), \tag{1.16}$$

где $\{c_k\}_0^n$ — произвольные комплексные числа, называя также эти функции *обобщенными полиномами Мальмквиста порядка n*.

Заметим, далее, что из общих положений теории ортогональных систем вытекает, что не только при любом $n \geqslant 0$

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} \varphi_k(z), \qquad c_{n,n} > 0, \tag{1.17'}$$

но и обратно:

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_{k,n}\Phi_k(z), \qquad d_{n,n} \neq 0. \tag{1.17''}$$

Поэтому любая функция $R_n(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$ представима также в виде

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k\Phi_k(z). \tag{1.18}$$

Лемма 1. *В классе функций $M\{\alpha_k\}_0^n$ вида*

$$Q_n(z) = \varphi_n(z) + a_1\varphi_{n-1}(z) + \cdots + a_n\varphi_0(z) \tag{1.19}$$

минимум функционала

$$\mu(Q_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(z)|^2 d\alpha(x), \qquad z = e^{ix}, \tag{1.20}$$

реализует функция

$$Q_n^{(0)}(z) = k_n^{-1}\Phi_n(z), \tag{1.21}$$

причем

$$\min\mu(Q_n) = \mu(Q_n^{(0)}) = \mu_n = k_n^{-2} = \frac{D_n}{D_{n-1}}. \tag{1.22}$$

В самом деле, пользуясь формулами (1.17''), заключаем, что функция $Q_n(z)$ представима также в виде

$$Q_n(z) = \sum_{p=0}^{n} v_p\Phi_p(z), \tag{1.19'}$$

где коэффициенты $\{v_p\}_0^{n-1}$ произвольны, а $v_n = k_n^{-1}$.

Ввиду ортонормальности системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ в смысле (1.7) из представления (1.19') следует:

$$\mu(Q_n) = \sum_{k=0}^{n-1} |v_p|^2 + k_n^{-2} > k_n^{-2},$$

причем неравенство переходит в равенство лишь при условии $v_0 = v_1 = \cdots = v_{n-1} = 0$. Этим, очевидно, и завершается доказательство.

Лемма 2. *Пусть $\zeta \neq 1/\bar{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$—произвольное фиксированное число.*

В семействе функций $\{P(z)\} \in M\{\alpha_k\}_0^n$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(z)|^2 d\alpha(x) = 1, \qquad z = e^{ix}, \tag{1.23}$$

максимум функционала

$$L(P_n) = |P_n(\varsigma)|^2 \tag{1.24}$$

реализует функция

$$P_n^{(0)}(z) = \varepsilon \frac{S_n(\varsigma; z)}{\sqrt{S_n(\varsigma; \varsigma)}} \quad (|\varepsilon| = 1), \tag{1.25}$$

где, согласно (1.15),

$$S_n(\varsigma; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\, \Phi_k(z),$$

причем

$$L(P_n^{(0)}) = \max L(P_n) = S_n(\varsigma; \varsigma). \tag{1.26}$$

Действительно, представляя функцию $P_n(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$ в виде

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k \Phi_k(z),$$

в силу условия (1.23), получим

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k|^2 = 1.$$

Но тогда по неравенству Коши

$$|P_n(\varsigma)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |p_k|^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\varsigma)|^2 = S_n(\varsigma; \varsigma),$$

причем здесь знак равенства возможен лишь в том случае, когда

$$p_k = c\, \overline{\Phi_k(\varsigma)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

т. е. при

$$P_n(z) = P_n^{(0)}(z) = c \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\, \Phi_k(z) = c\, S_n(\varsigma; z),$$

где c—постоянная.

Значение этой постоянной определяется из условия (1.23)

$$\mu(P_n^{(0)}) = |c|^2 \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\varsigma)|^2 = 1,$$

откуда следует, что

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{S_n(\varsigma; \varsigma)}} \quad (|\varepsilon| = 1).$$

Этим и завершается доказательство леммы.

Лемма 3. *Пусть* $\varsigma \neq 1/\overline{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ *и* A_0*—произвольные, но фиксированные постоянные.*

В семействе функций $R(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$, *удовлетворяющих дополнительному условию*

$$R_n(\varsigma) = A_0, \tag{1.26'}$$

минимум функционала

$$\mu(R_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |R_n(z)|^2 d\alpha(x), \qquad z = e^{ix}, \tag{1.27}$$

реализует функция

$$R_n^{(0)}(z) = A_0 \frac{S_n(\varsigma; z)}{S_n(\varsigma; \varsigma)}, \tag{1.28}$$

причем

$$\mu(R_n^{(0)}) = \min_{\{R_n\}} \mu(R_n) = \frac{|A_0|^2}{S_n(\varsigma; \varsigma)}. \tag{1.29}$$

Представляя функцию $R_n(z) \in M\{a_k\}_0^n$ в виде (1.19′), имеем

$$\mu(R_n) = \sum_{k=0}^{n} |v_k|^2,$$

причем условие (1.26) означает, что

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \Phi_k(\varsigma) = A_0.$$

Отсюда по неравенству Коши получим

$$|A_0|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |v_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\varsigma)|^2 = \mu(R_n) S_n(\varsigma; \varsigma),$$

т. е.

$$\mu(R_n) \geqslant \frac{|A_0|^2}{S_n(\varsigma; \varsigma)},$$

причем здесь знак равенства возможен лишь при

$$v_k = c\,\overline{\Phi_k(\varsigma)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Следовательно, экстремальная функция имеет вид

$$R_n(z) = R_n^{(0)}(z) = c \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\, \Phi_k(z) = c\, S_n(\varsigma; z).$$

Значение постоянной c определяется из условия (1.26′):

$$R_n^{(0)}(\varsigma) = c\, S_n(\varsigma; \varsigma) = A_0,$$

т. е.

$$c = \frac{A_0}{S_n(\varsigma; \varsigma)},$$

и лемма доказана.

Ядра $S_n(\varsigma; z)$ распределения $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$, участвующие в решении двух последних экстремальных задач, могут быть охарактеризованы следующим их важным свойством.

Лемма 4. *Пусть для любого значения параметра*

$$\varsigma \neq \frac{1}{\bar{a}_k} \quad (k=0, 1, \cdots, n), \qquad \rho(\varsigma; z) \in M\{\alpha_k\}_0^n.$$

Для того, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varsigma; z)\overline{g(z)}\,d\alpha(x) = \overline{g(\varsigma)}, \quad z = e^{ix}, \tag{1.30}$$

для любой функции $g(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\rho(\varsigma; z) \equiv S_n(\varsigma; z). \tag{1.31}$$

Заметив, что любая функция $g(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$ представима также в виде

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z),$$

при условии (1.31) мы приходим к тождеству (1.30), так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varsigma; z)\overline{g(z)}\,d\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi_k(\varsigma)}\,\Phi_k(z)\right\}\overline{\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\Phi_k(z)\right\}}\,d\alpha(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\overline{\Phi_k(\varsigma)} = \overline{g(\varsigma)}.$$

Итак, для выполнения тождества (1.30) условие (1.31) достаточно.

Заметим теперь, что функция $\rho(\varsigma; z)$, очевидно, представима в виде

$$\rho(\varsigma; z) = \sum_{k=0}^{n} C_k(\varsigma)\,\Phi_k(z).$$

Далее, если условие (1.30) выполнено, то в частности оно справедливо и для функций

$$g(z) = \Phi_p(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n \qquad (p=0, 1, \cdots, n).$$

Поэтому из (1.30) следуют формулы:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varsigma; z)\overline{\Phi_p(z)}\,d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k(\varsigma)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_k(z)\overline{\Phi_p(z)}\,d\alpha(x) =$$

$$= C_p(\varsigma) \equiv \overline{\Phi_p(\varsigma)} \quad (p = 0, 1, \cdots, n),$$

то есть

$$\rho(\varsigma; z) \equiv \sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi_k(\varsigma)}\,\Phi_k(z) = S_n(\varsigma; z).$$

§ 2. Функциональное уравнение для ядер распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$

2.1. Докажем сначала одно важное тождество*, имеющее место для системы Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированной с данной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$.

Обозначая всюду в дальнейшем

$$B_{n+1}(z)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k-z}{1-\overline{\alpha}_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\ {}^{**}, \tag{2.1}$$

установим лемму.

Лемма 5. *Для произвольных значений переменных z и ζ справедливы тождества*

$$\frac{1}{1-\overline{\zeta}z}=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z)+\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\,B_{n+1}(z)}{1-\overline{\zeta}z}\qquad(n=0,\,1,\,2,\cdots). \tag{2.2}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно установить справедливость тождества (2.2) в случае, когда $|z|<1$ и $|\zeta|<1$.

Заметим, что при $|\zeta|<1$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{\varphi_\nu(t)}}{1-\overline{\zeta}t}|dt|=\overline{\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\varphi_\nu(t)}{t-\zeta}dt\right\}}=\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\qquad(\nu=0,\,1,\cdots,\,n),$$

откуда, обозначая

$$\Phi_n(\zeta;z)=\frac{1}{1-\overline{\zeta}z}-\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z), \tag{2.3}$$

получим равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\Phi_n(t;\zeta)\,\overline{\varphi_\nu(t)}\,|dt|=0\qquad(\nu=0,\,1,\cdots,\,n). \tag{2.4}$$

Но в силу (1.3), при $|t|=1$ имеем

$$\frac{\overline{\varphi_\nu(t)}}{t}=\frac{(1-|\alpha_\nu|^2)^{1/2}}{t-\alpha_\nu}\prod_{k=0}^{\nu-1}\frac{1-\overline{\alpha}_k t}{\alpha_k-t}\,\frac{|\alpha_k|}{\overline{\alpha}_k}\qquad(\nu=0,\,1,\cdots), \tag{2.5}$$

---

* Такими и аналогичными тождествами более общей природы обычно пользуются в интерполяционных задачах теории функций (см., напр., Дж. Уолш [5], Р. Лагранж [6], Э. Ломмель [7]).

Приводимое нами тождество послужило основой в нашем исследовании, посвященном сходимости рядов типа Фурье по системам Мальмквиста [8].

** Как и в формулах (1.3), при $\alpha_k=0$ здесь следует положить

$$\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}=\frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|}=-1.$$

причем для значения $\nu=0$ символ произведения $\prod\limits_{k=0}^{\nu-1}$ следует заменить единицей.

Так как при $|t|=1$ $|dt|=\frac{dt}{it}$, то, ввиду (2.5), условия (2.4) запишутся в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\Phi_n(t;\varsigma)\frac{\prod\limits_{k=0}^{\nu-1}(1-\bar{\alpha}_k t)}{\prod\limits_{k=0}^{\nu}(\alpha_k-t)}dt=0 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n). \qquad (2.4')$$

Отметив, далее, что при любом $\nu\geqslant 0$ рациональная дробь, стоящая под интегралом в (2.4')—правильная, легко заключаем, что условия (2.4) эквивалентны следующим:

$$\Phi_n^{(r)}(\alpha_\nu;\varsigma)=\frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\varsigma)}{(t-\alpha_\nu)^{1+r}}dt=0 \qquad \left(\begin{matrix} r=0,1,\cdots,p_\nu-1\\ \nu=0,1,\cdots,n\end{matrix}\right), \qquad (2.6)$$

где $p_\nu\geqslant 1$, как уже было выше условлено, означает кратность появления числа α_ν в группе чисел $\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu\}$.

Однако из равенств (2.6), если принять во внимание определение (2.1) функции $B_{n+1}(z)$, заключаем, что отношение

$$\Phi_n(z;\varsigma)/B_{n+1}(z)$$

голоморфно в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Поэтому справедлива интегральная формула

$$\Phi_n(z;\varsigma)=\frac{B_{n+1}(z)}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\varsigma)B_{n+1}^{-1}(t)}{1-z\bar{t}}|dt| \qquad (|z|<1). \qquad (2.7)$$

Заметив, что при $|t|=1$

$$B_{n+1}^{-1}(t)=\overline{B_{n+1}(t)},$$

в силу (2.3) имеем далее

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\varsigma)B_{n+1}^{-1}(t)}{1-z\bar{t}}|dt|=\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)}{(1-\bar{z}t)(t-\varsigma)}dt\right\}}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(\varsigma)\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)\overline{\varphi_k(t)}}{t(1-\bar{z}t)}dt\right\}}. \qquad (2.8)$$

Так как функция

$$\frac{B_{n+1}(t)}{1-\bar{z}t} \qquad (|z|<1)$$

голоморфна в замкнутом круге $|t|\leqslant 1$, то

$$\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)}{(1-\bar{z}t)(t-\zeta)}dt\right\}}=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{2.9}$$

С другой стороны, в силу формул (2.1) и (2.5) при $|t|=1$

$$B_{n+1}(t)\frac{\overline{\varphi_\nu(t)}}{t}=-\left\{(1-|\alpha_\nu|^2)^{1/2}\prod_{k=\nu}^{n}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}\frac{\prod\limits_{k=\nu+1}^{n}(\alpha_k-t)}{\prod\limits_{k=\nu}^{n}(1-\bar{\alpha}_k t)}\quad(\nu=0,1,\cdots n),$$

причем правая часть голоморфна в замкнутом круге $|t|\leqslant 1$.

Отсюда следует, что при $|z|<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)\overline{\varphi_k(t)}}{t(1-\bar{z}t)}dt=0\qquad(k=0,1,\cdots,n). \tag{2.10}$$

Наконец, из (2.8), (2.9) и (2.10) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\zeta)B_{n+1}^{-1}(t)}{1-\bar{z}t}|dt|=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{2.11}$$

Из (2.7) и (2.11) имеем

$$\Phi_n(z;\zeta)=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}B_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}.$$

Отсюда и из формулы (2.3) следует тождество (2.2). Лемма доказана.

Обозначим теперь через

$$S_n(\zeta;z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\varphi_k(z) \tag{2.12}$$

ядро распределения $(2\pi)^{-1}dx$.

Из леммы 5, в частности, вытекает

Следствие. *Для произвольных значений переменных z и ζ ядро $S_n(\zeta;z)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$S_n(\zeta;z)=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}B_{n+1}(z)}{\bar{\zeta}z}S_n\left(\frac{1}{\bar{z}},\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{2.13}$$

2.2. Докажем теперь, что функциональное уравнение (2.13) остается в силе также для ядер произвольного распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Теорема 1. *При любом $n\geqslant 0$, z и ζ ядро $S_n(\zeta;z)$ распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$S_n(\zeta;z)=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}B_{n+1}(z)}{\bar{\zeta}z}S_n\left(\frac{1}{\bar{z}};\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{2.14}$$

Доказательство. Согласно лемме 4, в частности, справедливы тождества:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(\zeta; z)\,\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\alpha(x) = \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n) \tag{2.15}$$

при любом $\zeta \neq 1/\overline{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$.

Заметим теперь, что при любом $\zeta \neq 1/\overline{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ имеем $S_n(\zeta; z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$ и, следовательно, имеет место представление

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,\varphi_k(z). \tag{2.16}$$

Отсюда и из формул (2.15) следует, что коэффициенты $\{A_k(\zeta)\}_0^n$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,\varphi_k(z)\right\}\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\alpha(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,(\varphi_k, \varphi_\nu) = \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n). \tag{2.17}$$

Записывая теперь формулы (2.16) и (2.17) в виде

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,(\varphi_k, \varphi_\nu) - \overline{\varphi_\nu(\zeta)} = 0,\\ &\sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,\varphi_k(z) - S_n(\zeta; z) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n), \tag{2.18}$$

мы, таким образом, можем утверждать, что система линейных однородных уравнений (2.18) имеет нетривиальное решение

$$\{A_0, A_1, \cdots, A_n, -1\}.$$

Следовательно, определитель этой системы должен быть тождественно равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) \cdots (\varphi_n, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\zeta)} \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) \cdots (\varphi_n, \varphi_1) & \overline{\varphi_1(\zeta)} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) \cdots (\varphi_n, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\zeta)} \\ \varphi_0(z) & \varphi_1(z) \cdots \varphi_n(z) & S_n(\zeta; z) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Далее, имея в виду определение (1.9) определителя D_n, отсюда получим следующее представление для функции $S_n(\zeta; z)$:

$$S_n(\varsigma; z) = -\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\varsigma)} \\ (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) & \overline{\varphi_1(\varsigma)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\varsigma)} \\ \varphi_0(z) & \cdots & \varphi_n(z) & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.19}$$

Теперь для фиксированного значения $n \geqslant 0$ введем в рассмотрение следующую систему рациональных функций:

$$\varphi_k^{(n)}(z) = -\frac{B_{n+1}(z)}{z}\,\overline{\varphi}_{n-k}\left(\frac{1}{z}\right) \quad (k=0, 1, \cdots, n), \tag{2.20}$$

заметив, что тогда будём иметь

$$\varphi_0^{(n)}(z) = \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\,\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_n z},$$

$$\varphi_k^{(n)}(z) = \prod_{p=n-k}^{n}\left\{\frac{|\alpha_p|}{\alpha_p}\right\}\frac{(1-|\alpha_{n-k}|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_{n-k}z}\sum_{p=n-k+1}^{n}\frac{\alpha_p - z}{1-\overline{\alpha}_p z}\,\frac{|\alpha_p|}{\alpha_p}$$

$$(k=1, 2, \cdots, n). \tag{2.21}$$

Из определения (2.20) следует:

$$(\varphi_p^{(n)}, \varphi_q^{(n)}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_p^{(n)}(z)\,\overline{\varphi_q^{(n)}(z)}\,d\alpha(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{n-q}(z)\,\overline{\varphi_{n-p}(z)}\,d\alpha(x) = (\varphi_{n-q}, \varphi_{n-p}) \qquad (p, q=0, 1, \cdots, n), \tag{2.22}$$

так как $|B_{n+1}(z)| = 1$ при $|z| = 1$.

Из формул (2.22), в частности, при $\alpha(x) \equiv x$ следует, что система рациональных функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ ортонормальна на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}dx$ и поэтому представляет собой конечную систему Мальмквиста, ассоциированную с последовательностью чисел $\{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0\}$.

Ортогонализируем теперь эту новую конечную систему функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$. Тогда получим конечную систему рациональных функций $\{\Phi_k^{(n)}(z)\}_0^n$, удовлетворяющую условиям:

а) $\Phi_k^{(n)}(z)$ есть „полином порядка k“ от первых $k+1$ функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$, т. е.

$$\Phi_k^{(n)}(z)=\sum_{p=0}^{k} c_p^{(n)}\varphi_p^{(n)}(z),\qquad c_k^{(n)}>0;$$

б)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_p(z)\overline{\Phi_q^{(n)}(z)}\,d\alpha(x)=\delta_{p,q},\quad z=e^{ix}\quad (p, q=0, 1, 2,\cdots, n).$$

Обозначив, далее,

$$S_n^{(n)}(\zeta; z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi_k^{(n)}(\zeta)}\,\Phi_k^{(n)}(z), \tag{2.23}$$

по аналогии с формулой (2.19) будем иметь

$$S_n^{(n)}(\zeta; z)=-\frac{1}{D_n^{(n)}}\begin{vmatrix}(\varphi_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) & \cdots & (\varphi_n^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) & \overline{\varphi_0^{(n)}(\zeta)}\\ (\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}) & \cdots & (\varphi_n^{(n)}, \varphi_1^{(n)}) & \overline{\varphi_1^{(n)}(\zeta)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varphi_0^{(n)}, \varphi_n^{(n)}) & \cdots & (\varphi_n^{(n)}, \varphi_n^{(n)}) & \overline{\varphi_n^{(n)}(\zeta)}\\ \varphi_0^{(n)}(z) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(z) & 0\end{vmatrix}, \tag{2.19'}$$

где

$$D_n^{(n)}=\begin{vmatrix}(\varphi_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) & \cdots & (\varphi_0^{(n)}, \varphi_n^{(n)})\\ (\varphi_1^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) & \cdots & (\varphi_1^{(n)}, \varphi_n^{(n)})\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (\varphi_n^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) & \cdots & (\varphi_n^{(n)}, \varphi_n^{(n)})\end{vmatrix} \tag{1.9}$$

есть определитель Грамма для совокупности функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$.

Докажем, что справедливо тождество

$$S_n^{(n)}(\zeta; z)\equiv S_n(\zeta; z). \tag{2.24}$$

С этой целью, ради упрощения дальнейших рассуждений, положим пока, что группа чисел $\{\alpha_0,\cdots,\alpha_n\}$ удовлетворяет условию

$$\alpha_i\neq 0,\quad \alpha_i\neq\alpha_j\quad (i\neq j;\quad i, j=0, 1,\cdots, n), \tag{2.25}$$

т. е., что все эти числа отличны друг от друга и от нуля.

Тогда соответствующая конечная система Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^n$ представляет собой результат ортогонализации системы рациональных функций

$$\left\{\frac{1}{1-\alpha_k z}\right\}_0^n$$

на окружности $z=e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}dx$.

Это значит, что в рассматриваемом случае множество $M\{\alpha_k\}_0^n$ совпадает с множеством линейных комбинаций—„полиномов порядка n“ вида

$$R_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-\bar{\alpha}_k z}. \tag{2.26}$$

Очевидно, далее, что построенная выше конечная система Мальмквиста $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$, ортогональная на окружности $z=e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}dx$, есть результат ортогонализации упорядоченной системы рациональных функций

$$\left\{\frac{1}{1-\bar{\alpha}_{n-k}z}\right\}_0^n.$$

Следовательно, множество $M\{\alpha_{n-k}\}_0^n$ всех обобщенных „полиномов порядка n“ вида

$$\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k^{(n)}(z)$$

также совпадает с множеством рациональных функций (2.26), т. е. $M\{\alpha_{n-k}\}_0^n\equiv M\{\alpha_k\}_0^n$.

Обратимся теперь к экстремальной задаче, решение которой было приведено в лемме 3, полагая, что параметр $A_0=1$.

Так как $M\{\alpha_k\}_0^n\equiv M\{\alpha_{n-k}\}_0^n$, то экстремальные функции и соответствующие минимумы для обоих семейств функций должны быть одинаковыми.

Это значит, что

$$R_n^{(0)}(z)=\frac{S_n(\varsigma;z)}{S_n(\varsigma;\varsigma)}\equiv\frac{S_n^{(n)}(\varsigma;z)}{S_n^{(n)}(\varsigma;\varsigma)},$$

а также

$$\mu(R_n^{(0)})=\frac{1}{S_n(\varsigma;\varsigma)}\equiv\frac{1}{S_n^{(n)}(\varsigma;\varsigma)}$$

для всех z и $\varsigma\neq 1/\bar{\alpha}_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$.

Отсюда и следует требуемое тождество (2.24), но пока лишь при ограничении (2.25) на совокупность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^n$.

Чтобы освободиться от этого ограничения, имея совокупность чисел $\{\alpha_k\}_0^n$, рассмотрим другую совокупность $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^n$ $(0<|\tilde{\alpha}_k|<1)$, подчиненную уже условиям (2.25).

Пусть $\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\varphi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ суть системы Мальмквиста, ассоциированные, соответственно, с упорядоченными группами чисел $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^n$ и $\{\tilde{\alpha}_{n-k}\}_0^n$.

Пусть, далее, $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\Phi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ суть, соответственно, системы функций, которые получаются в результате ортогонализации систем

$\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\varphi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ на единичной окружности $z=e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Наконец, пусть

$$\tilde{S}_n(\varsigma; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\tilde{\Phi}_k(\varsigma)}\, \tilde{\Phi}_k(z) \quad \text{и} \quad \tilde{S}_n^{(k)}(\varsigma; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\tilde{\Phi}_k^{(n)}(\varsigma)}\, \tilde{\Phi}_k^{(n)}(z)$$

есть ядра систем $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\Phi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ соответственно. Тогда, ввиду того, что для группы чисел $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^n$ условие (2.25) предполагалось выполненным, согласно предыдущему, тождество

$$\tilde{S}_n^{(n)}(\varsigma; z) \equiv \tilde{S}_n(\varsigma; z) \tag{2.24'}$$

справедливо, если ς и $z \neq 1/\bar{\tilde{\alpha}}_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$.

Но очевидно, что при

$$\lim \tilde{\alpha}_k = \alpha_k \qquad (k=0, 1, \cdots, n) \tag{2.27}$$

справедливы предельные соотношения

$$\lim \tilde{\varphi}_k(z) = \varphi_k(z), \quad \lim \tilde{\varphi}_k^{(n)}(z) = \varphi_k^{(n)}(z) \qquad (k=0, 1, \cdots, n),$$

притом равномерно относительно всех z, лежащих вне достаточно малых окрестностей отличных друг от друга точек $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^n$ плоскости z, т. е. в частности и на окружности $z=e^{ix}$.

Следовательно, будем иметь также

$$\lim(\tilde{\varphi}_p, \tilde{\varphi}_q) = (\varphi_p, \varphi_q)$$

и $\qquad\qquad\qquad\qquad (p, q = 0, 1, \cdots, n).$

$$\lim(\tilde{\varphi}_p^{(n)}, \tilde{\varphi}_q^{(n)}) = (\varphi_p^{(n)}, \varphi_q^{(n)})$$

Поэтому для соответствующих ортогональных с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ систем и ядер при условии (2.27) справедливы предельные соотношения

$$\lim \tilde{\Phi}_k(z) = \Phi_k(z) \qquad (k=0, 1, \cdots, n),$$

а также

$$\lim \tilde{\Phi}_k^{(n)}(z) = \Phi_k^{(n)}(z),$$

$$\lim \tilde{S}_n(\varsigma; z) = S_n(\varsigma; z), \tag{2.28}$$

$$\lim \tilde{S}_n^{(n)}(\varsigma; z) = S_n^{(n)}(\varsigma; z).$$

Достаточно перейти теперь к пределу в тождестве (2.24′) при условии (2.27), чтобы в силу формул (2.28) убедиться в справедливости тождества (2.24) уже без каких-либо дополнительных ограничений на совокупность чисел $\{\alpha_k\}_0^n$.

Заметим теперь, что определитель Грамма $D_n^{(n)}$ для системы функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ также положителен, и поэтому, пользуясь формулами (2.22)

$$(\varphi_p^{(n)}, \varphi_q^{(n)}) = (\varphi_{n-q}, \varphi_{n-p}) = \overline{(\varphi_{n-p}, \varphi_{n-q})} \quad (p, q = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

из (1.9') получим

$$D_n^{(n)} = \overline{D}_n^{(n)} = \begin{vmatrix} \overline{(\varphi_n, \varphi_n)} & \cdots & \overline{(\varphi_n, \varphi_0)} \\ \overline{(\varphi_{n-1}, \varphi_n)} & \cdots & \overline{(\varphi_{n-1}, \varphi_0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{(\varphi_0, \varphi_n)} & \cdots & \overline{(\varphi_0, \varphi_0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_0) \end{vmatrix}.$$

Повернув последний определитель вокруг его побочной диагонали, что, очевидно, не изменит его значения, в силу (1.9) получим равенство

$$D_n^{(n)} = D_n. \tag{2.29}$$

Наконец, из (2.19'), (2.24) и (2.29), воспользовавшись формулами (2.22), приходим к следующему представлению для ядра

$$S_n(\zeta; z) = -\frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) & \overline{\varphi_0^{(n)}(\zeta)} \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & \overline{\varphi_1^{(n)}(\zeta)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_0) & \overline{\varphi_n^{(n)}(\zeta)} \\ \varphi_0^{(n)}(z) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(z) & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.30}$$

Но согласно определению (2.21) системы функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$,

$$\varphi_k^{(n)}(z) = -\frac{B_{n+1}(z)}{z} \overline{\varphi}_{n-k}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n).$$

$$\overline{\varphi_k^{(n)}(\zeta)} = -\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}}{\overline{\zeta}} \varphi_{n-k}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right).$$

Отсюда и из (2.30) следует:

$$S_n(\zeta; z) = -\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\, B_{n+1}(z)}{\overline{\zeta}\, z\, D_n} \begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) & \varphi_n\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_0) & \varphi_0\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \\ \overline{\varphi}_n\left(\frac{1}{z}\right) & \cdots & \overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{z}\right) & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.30'}$$

Заметив теперь, что при любом z справедливо тождество

$$B_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\overline{B_{n+1}(z)} \equiv 1,$$

из (2.30′) получим, далее,

$$\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\,B_{n+1}(z)}{\bar{\zeta} z}\, S_n\left(\frac{1}{\bar{z}};\ \frac{1}{\zeta}\right) =$$

$$= -\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots (\varphi_n, \varphi_0) & \varphi_n(z) \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_n) & \cdots (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & \varphi_{n-1}(z) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots (\varphi_0, \varphi_0) & \varphi_0(z) \\ \overline{\varphi_n(\zeta)} & \cdots \overline{\varphi_0(\zeta)} & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

С другой стороны, из (2.19) имеем

$$S_n(\zeta; z) = -\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots (\varphi_0, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\zeta)} \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots (\varphi_0, \varphi_1) & \overline{\varphi_1(\zeta)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots (\varphi_0, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\zeta)} \\ \varphi_n(z) & \cdots \varphi_0(z) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots (\varphi_0, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\zeta)} \\ (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \cdots (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & \overline{\varphi_{n-1}(\zeta)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots (\varphi_0, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\zeta)} \\ \varphi_n(z) & \cdots \varphi_0(z) & 0 \end{vmatrix}.$$

Наконец, повернув последний определитель вокруг его главной диагонали и имея в виду формулу (2.31), получим тождество (2.14). Итак, теорема полностью доказана.

Заметим теперь, что в частном случае, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = = \cdots = 0$, система функций (1.2) либо система соответствующих функций Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ сводится к системе степеней $\{z^k\}_0^\infty$.

Поэтому очевидно, что в случае

$$\alpha_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ переходит в систему полиномов Г. Сеге— $\{P_k(z)\}_0^\infty$, ортогональных на окружности $z = e^{ix}$ с тем же весом $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$.

Наконец, так как при $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

$$B_{n+1}(z) = z^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

то из теоремы 1, в частности, вытекает хорошо известная формула Г. Сеге, доказательство которой весьма просто.

Следствие. *Для системы полиномов* $\{P_k(z)\}_0^\infty$, *ортогональной на единичной окружности с весом* $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$, *соответствующее ядро*

$$\sigma_n(\zeta; z) = (\bar{\zeta} z)^n S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \tag{2.32}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sigma_n(\zeta; z) = (\bar{\zeta} z)^n S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{2.33}$$

2.3. В дополнение к основному тождеству (2.14) в данном пункте приведем несколько важных для дальнейшего формул для ядра $S_n(\zeta; z)$ произвольного распределения $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$.

Лемма 6. *При любом* $n \geqslant 0$ *справедливы формулы:*

1°. $$S_n(\alpha_n; z) = -\frac{|\alpha_n|}{\bar{\alpha}_n}\,\frac{k_n}{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}\,\frac{B_{n+1}(z)}{z}\,\overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2.34}$$

$$S_n(\alpha_n; \alpha_n) = \frac{k_n^2}{1-|\alpha_n|^2}, \tag{2.34'}$$

где $k_n > 0$ — *коэффициент при* $\varphi_n(z)$ *в представлении*

$$\Phi_n(z) = k_n\,\varphi_n(z); \tag{2.35}$$

2°. $$S_n(\alpha_0; z) = \frac{|\alpha_0|}{\bar{\alpha}_0}\,\frac{k_n^{(n)}}{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}\,\frac{B_{n+1}(z)}{z}\,\overline{\Phi}_n^{(n)}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2.36}$$

$$S_n(\alpha_0; \alpha_0) = \frac{(k_n^{(n)})^2}{1-|\alpha_0|^2}, \tag{2.36'}$$

где $k_p^{(n)}$ — *коэффициент при* $\varphi_p^{(n)}(z)$ *в представлении*

$$\Phi_p^{(n)}(z) = k_p^{(n)}\,\varphi_p^{(n)}(z) + \cdots + l_p^{(n)}\,\varphi_0^{(n)}(z) \qquad (p = 0, 1, \cdots, n); \tag{2.37}$$

3°. *Между коэффициентами* $\{l_p^{(n)}\}_0^n$ *и* k_n, *а также между* $\{l_p\}_0^n$ *и* $k_n^{(n)}$ *имеют место соотношения*

$$\sum_{p=0}^{n} |l_k^{(n)}|^2 = k_n^2, \tag{2.38}$$

$$\sum_{p=0}^{n} |l_k|^2 = (k_n^{(n)})^2. \tag{2.39}$$

Доказательство. 1°. Из формулы (2.20) следует, что при любом $p \geqslant 0$

$$\overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{z}{B_{p+1}(z)}\varphi_{p-k}^{(p)}(z) \qquad (k=0,\ 1,\cdots,p),$$

где

$$B_{p+1}(z)=\prod_{k=0}^{p}\frac{\alpha_k-z}{1-\overline{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}.$$

Следовательно, из (2.35) следует также представление

$$\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=k_p\overline{\varphi}_p\left(\frac{1}{\varsigma}\right)+\cdots+\overline{l}_p\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=$$

$$=-\frac{\varsigma}{B_{p+1}(\varsigma)}\{k_p\varphi_0^{(p)}(\varsigma)+\cdots+\overline{l}_p\varphi_p^{(p)}(\varsigma)\},$$

откуда получим при $0\leqslant p\leqslant n$

$$\frac{B_{n+1}(\varsigma)}{\varsigma}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=-\prod_{k=p+1}^{n}\frac{\alpha_k-\varsigma}{1-\overline{\alpha}_k\varsigma}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\{k_p\varphi_0^{(p)}(\varsigma)+\cdots+\overline{l}_p\varphi_p^{(p)}(\varsigma)\}, \tag{2.40}$$

где символ $\prod\limits_{k=p+1}^{n}$ при $p=n$ следует заменить единицей.

Из формул (2.40), очевидно, имеем

$$\lim_{\varsigma\to\alpha_n}\frac{B_{n+1}(\varsigma)}{\varsigma}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=0 \qquad (p=0,\ 1,\cdots,n-1). \tag{2.41}$$

Далее, так как из явных выражений (2.21) системы $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ следует, что

$$\varphi_0^{(n)}(\alpha_n)=\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{1}{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}, \qquad \varphi_k^{(n)}(\alpha_n)=0 \qquad (k=1,\ 2,\cdots n), \tag{2.42}$$

то из (2.40) при $p=n$ получим

$$\lim_{\varsigma\to\alpha_n}\frac{B_{n+1}(\varsigma)}{\varsigma}\overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=-\frac{|\alpha_n|k_n}{\alpha_n(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}. \tag{2.43}$$

Наконец, согласно тождеству (2.14) теоремы 1,

$$S_n(\varsigma;z)=\frac{\overline{B_{n+1}(\varsigma)}B_{n+1}(z)}{\overline{\varsigma}z}\sum_{p=0}^{n}\overline{\Phi_p\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\Phi_p\left(\frac{1}{\overline{\varsigma}}\right)=$$

$$=\frac{B_{n+1}(z)}{z}\sum_{p=0}^{n}\overline{\left\{\frac{B_{n+1}(\varsigma)}{\varsigma}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\varsigma}\right)\right\}}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{z}\right),$$

откуда, пользуясь соотношениями (2.41) и (2.43), предельным переходом при $\varsigma\to\alpha_n$ получим формулу (2.34) леммы. Далее, из (2.34), в силу соотношения (2.43), предельным переходом при $z\to\alpha_n$ получим (2.34′).

2°. Отметим, что система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^n$ была ассоциирована с упорядоченной группой чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, в то время как система $\{\Phi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ была ассоциирована с упорядоченной группой $\{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0\}$.

Поэтому очевидно, что соответствующей заменой параметров, входящих в формулы (2.34) и (2.34′), для ядра $S_n^{(n)}(\zeta; z)$ системы $\{\Phi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ получим формулы

$$S_n^{(n)}(\alpha_0; z) = -\frac{|\alpha_0|}{\alpha_0}\frac{k_n^{(n)}}{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}\frac{B_{n+1}(z)}{z}\overline{\Phi}_n^{(n)}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$S_n^{(n)}(\alpha_0; \alpha_0) = \frac{(k_n^{(n)})^2}{1-|\alpha_0|^2}.$$

Следовательно, достаточно воспользоваться тождеством (2.24), чтобы получить формулы (2.36) и (2.36′) леммы и, наконец, формулу (2.52).

3°. Из (2.37), пользуясь формулами (2.42), мы получим

$$\Phi_p^{(n)}(\alpha_n) = l_p^{(n)}\varphi_0^{(n)}(\alpha_n) = \frac{l_p^{(n)}|\alpha_n|}{\alpha_n(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}.$$

Поэтому и ввиду тождества (2.24), установленного в ходе доказательства теоремы 1, мы будем иметь

$$S_n(\alpha_n; \alpha_n) = S_n^{(n)}(\alpha_n; \alpha_n) = \sum_{p=0}^{n}|\Phi_p^{(n)}(\alpha_n)|^2 = \frac{1}{1-|\alpha_n|^2}\sum_{p=0}^{n}|l_p^{(n)}|^2.$$

Отсюда и из (2.34) следует формула (2.38).

Итак, лемма полностью доказана.

Из этой леммы в частном случае, когда $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, вытекает

Следствие. *Для системы полиномов Г. Сеге $\{P_k(z)\}_0^\infty$, ортогональной на окружности $z = e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$, ядро $\sigma_n(\zeta; z)$ удовлетворяет условиям*

$$\sigma_n(0; z) = \sum_{k=0}^{n}\overline{P_k(0)}P_k(z) = \sum_{k=0}^{n} l_k P_k(z) = k_n z^n \overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\sigma_n(0; 0) = \sum_{k=0}^{n}|P_k(0)|^2 = \sum_{k=0}^{n}|l_k|^2 = k_n^2 = \frac{D_{n-1}}{D_n}. \qquad (2.44)$$

В самом деле, в рассматриваемом случае

$$\varphi_k(z) = z^k, \qquad B_{n+1}(z) = z^{n+1}, \qquad P_k(0) = l_k.$$

Поэтому из формул (2.34) и (2.34′) следуют, в частности, утверждения (2.44).

(*Продолжение статьи—в следующем номере*)

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30. XII. 1965

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Ներկա հոդվածում ստացված են այն ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմների հանրահաշվական հատկությունները, որոնց բոլոր հնարավոր բևեռները գտնվում են միավոր շրջանից դուրս տված հաջորդականության կետերում և օրթոնորմալ են միավոր շրջանագծի վրա $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ կշռով։

Սահմանային դեպքում, երբ դիտարկվող սիստեմի բոլոր բևեռները համընկնում են անվերջ հեռու կետի հետ, այստեղ ստացված թեորեմները համապատասխանաբար համընկնում են միավոր շրջանագծի վրա կշռով օրթոգոնալ բազմանդամների տեսության լավ հայտնի պնդումներին, որոնք ժամանակին զարգացվել էին Սեգյոի [2], [3] աշխատանքներում։

M. M. DŽRBAŠIAN

ORTHONORMAL SETS OF RATIONAL FUNCTIONS ON THE UNIT CIRCLE

Summary

This paper deals with the algebraic properties of sets of rational functions which are orthonormal on the unit circle with respect to the weight $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$, and their poles lie on a given sequence of points situated outside the unit circle.

In case when all the poles of the set under consideration coincide with the point at infinity, the theorems proved here concur with the well known assertions of the theory of orthogonal (with respect to the weight function) polynomials developed by Szegö [2], [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности с заданным множеством полюсов. ДАН СССР, т. 147, № 6 (1962).
2. *Г. Сеге.* Ортогональные многочлены. Гл. X и XI, М. (1962).
3. *У. Гренандер, Г. Сеге.* Теплицевы формы и их приложение. Гл. 2 и 3, М. (1961).
4. *F. Malmquist.* Sur la dètermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dansun ensemble donnè de points. C. R. du VI Congrès (1925) des Mathèmaticiens Scandinaves. Kopenhagen (1926).
5. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация.... М., § 10.7 (1961).
6. *R. Lagrange, Mèmoire sur les sèries d'interpolation. Acta Mathematica, V. 64 (1935).*
7. *E. Lammel.* Approximation regulärer Funktionen eines komplexen Argumentes durch rationale Funktionen. Math. Zeitschr., Bd. 46 (1940).
8. *М. М. Джрбашян.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Изв. АН АрмССР, физ.-мат. сер., т. 9, № 7 (1956).