

Р. Б. МАРТИРОСЯН

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ К МЕХАНИКЕ СТРУЖКООБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим плоскую задачу течения, идеально-пластического материала при резании резцом с шероховатой передней гранью. При развитых пластических деформациях, имеющих место при резании, допустимо считать, что касательное напряжение (удельная сила трения) на шероховатой контактной поверхности достигает предельного значения, равного пределу текучести деформируемого материала на сдвиг K .

Решение при предельном значении удельной силы трения на передней грани $|\tau_{xy}| = k \gamma \geq 0$ приведено на рис. 1. За линией AC стружка свободна от напряжений. Поэтому в области ABC имеет место равномерное напряженное состояние. Здесь линии скольжения прямые, наклоненные под углом $\frac{\pi}{4}$ к AC . Линии семейства α нормальны к передней грани (ось x), а семейства β — параллельны ей. Так как на AC силы отсутствуют, то гидростатическое давление σ всюду в этой области равно $-k$.

Если предположить, что стружкообразование происходит в результате деформации простого сдвига, происходящей в единственной плоскости, то тогда граница BC равномерного напряжения поля ABC проходила бы через вершину резца O , а угол сдвига β равнялся бы переднему углу γ . Нетрудно выяснить, что в этих условиях с уменьшением угла γ сила резания стремилась бы к бесконечности. Поэтому естественно предположить существование некоторого поля напряжений и пластических деформаций $BCFO$ ниже области ABC .

К области равномерного напряженного состояния ABC может примыкать поле простого напряженного состояния BFC , которое в общем случае должно состоять из прямых линий скольжения семейства α , касающихся эволюты EC и криволинейных линий скольжения, являющихся эвольвентами этой эволюты. Вдоль линий скольжения семейства α напряжения и скорости постоянны. Значения последних определяются граничными условиями на BF — граница неоднородного напряженного состояния BFO .

Определим напряжения и линии скольжения в поле BFO .

Будем считать, что напряжение σ_y зависит только от x , причем эта зависимость линейная, то есть примем:

$$\sigma_y = -k - k \frac{l_1 - x}{R}. \quad (1)$$

С другой стороны, напряжения связаны с углом θ (угол между касательной к линиям скольжения семейства τ и осью x) следующими соотношениями [1]:

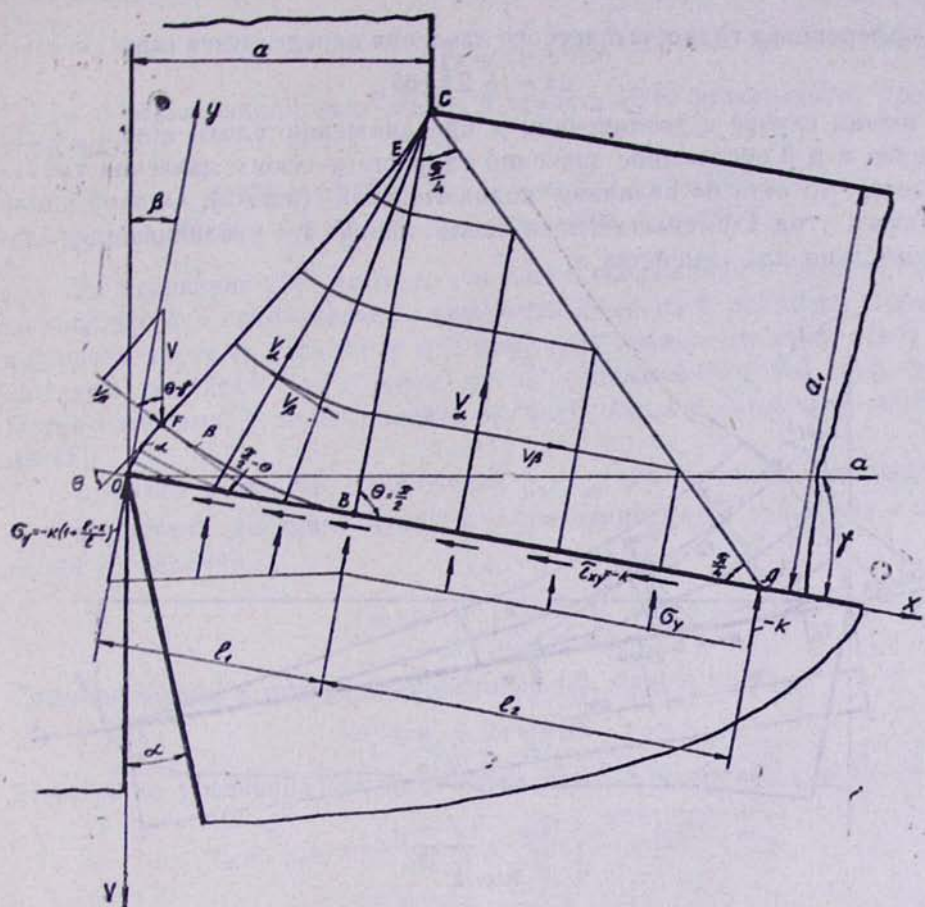


Рис. 1.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Угол поворота осей x и y относительно главных напряжений на передней грани отрицательный [2]. Учитывая это уравнения (2) для рассматриваемого случая, перепишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + k \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma - k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Напишем второе из уравнений (3) в дифференциальной форме

$$d\sigma_y = d\sigma - 2k \cos 2\theta d\theta$$

и подставим значение $d\sigma_y$ из уравнения (1)

$$k \frac{dx}{R} = d\sigma - 2k \cos 2\theta d\theta.$$

Дифференциал гидростатического давления определяется зависимостью

$$d\sigma = \pm 2k |d\theta|.$$

В нашем случае с увеличением x при движении вдоль линий скольжения α и β абсолютное значение гидростатического давления уменьшается, то есть $d\sigma$ величина положительная (рис. 2). Однако вдоль линии α угол θ уменьшается, а вдоль линии β — увеличивается, следовательно для семейства α

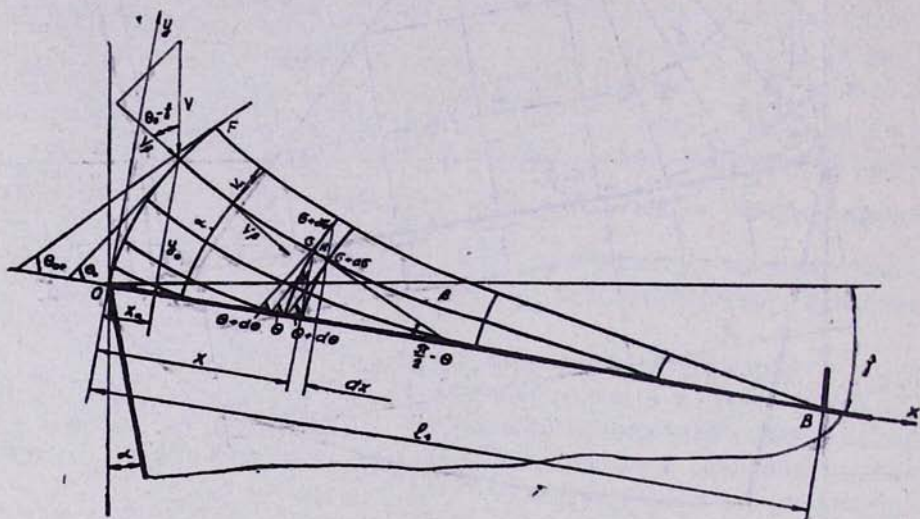


Рис. 2.

$d\sigma = -2k d\theta$, $dx = -2R(1 + \cos 2\theta) d\theta$, $x = -R(2\theta + \sin 2\theta) + c$,
а для семейства β

$$d\sigma = 2k d\theta, \quad dx = 2R(1 - \cos 2\theta) d\theta, \quad x = R(2\theta - \sin 2\theta) + c,$$

Так как касательные к линиям скольжения семейства α наклонены к оси x под углом θ , а семейства β — под углом $\frac{\pi}{2} - \theta$,
то

$$(\alpha) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \operatorname{tg} \theta \frac{dx}{d\theta}, \quad dy = 2R \sin 2\theta d\theta$$

$$(\beta) \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\operatorname{ctg} \theta \frac{dx}{d\theta}, \quad dy = -2R \sin 2\theta d\theta.$$

После интегрирования для обоих семейств получим

$$y = R \cos 2\theta + c.$$

На передней грани $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$

Следовательно, $c = 1$.

Поэтому

$$y = R(1 + \cos 2\theta).$$

Таким образом, линии скольжения в области BFO определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha) \quad x &= -R(2\theta + \sin 2\theta) + c & y &= R(1 + \cos 2\theta) \\ (\beta) \quad x &= R(2\theta - \sin 2\theta) + c & y &= R(1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что линии скольжения в области BFO составляют два ортогональных семейства циклоид с радиусом производящего круга R . Прямая $y = 0$ (передняя грань) является огибающей этих семейств. Такое поле линий скольжений было получено Прандтлем при решении задачи—осадки полосы плоскими плитами [1].

Выразим остальные напряжения σ_x , τ_{xy} как функции координат.

Подставив значения $\cos 2\theta$ из уравнений (4) в третье из уравнений (3), получим

$$\tau_{xy} = -k \left(1 - \frac{y}{R} \right).$$

Сравнив первое и второе из уравнений (3), будем иметь

$$\sigma_x = \sigma_y + 2k \sin 2\theta.$$

Выразив из уравнений (4) $\sin 2\theta$ через $\cos 2\theta$ и подставив (1), получим:

$$\sigma_x = -k - \frac{l_1 - x}{R} + \frac{2k}{R} \sqrt{y(2R - y)}.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -k \left[1 + \frac{l_1 - x - 2\sqrt{y(2R - y)}}{R} \right] \\ \sigma_y &= -k \left(1 + \frac{l_1 - x}{R} \right) \\ \tau_{xy} &= -k \left(1 - \frac{y}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из хода вывода уравнений (5) очевидно, что они удовлетворяют условию пластичности, дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям.

Привяжем уравнения линий скольжения семейства β с началом координат.

Обозначив параметр θ и координаты для граничной линии OF с индексом 0 и учитывая, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, подставив $x = 0$ в первое из уравнений (4), найдем $s = R\pi$. Следовательно, линия OF определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= R(\pi - 2\theta_0 - \sin 2\theta_0) \\ y_0 &= R(1 + \cos 2\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для некоторой точки N на линии семейства β из рис. 2 будем иметь

$$x = x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} ds \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \rho \sin\theta d\theta.$$

Из (4) найдем радиус кривизны линий скольжения семейства β .

$$\rho = \left| \frac{ds}{d\theta} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2} = 4R \sin\theta \quad (7)$$

Подставив (6) и (7) в предыдущее уравнение после интегрирования получим

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\pi - 4\theta_0 + 2\theta - \sin 2\theta) \\ y &= R(1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

При $\theta = \theta_0$ будем иметь уравнение линии OF, при $\theta_0 = \theta_{OF}$ — уравнение линии BF.

Для получения уравнений семейств линий скольжения в поле ВФС отложим на радиусе кривизны граничной линии BF отрезок r (рис. 3). Тогда координаты некоторой точки M найдем следующими соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r \cos\theta \\ y &= y_1 + r \sin\theta. \end{aligned}$$

Подставив значения x_1 и y_1 из соответствующих уравнений (8), получим

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\pi - 4\theta_{OF} + 2\theta - \sin 2\theta) + r \cos\theta \\ y &= R(1 + \cos 2\theta) + r \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При $r = 0$ будем иметь уравнения линии BF, а при $r = \rho$ параметрическое уравнение ЕС — огибающей семейства линий скольжения α

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\pi - 4\theta_0 + 2\theta + \sin 2\theta) \\ y &= R(3 - \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Рассмотрим поле скоростей. Будем считать, что на неподвижный резец надвигается обрабатываемое изделие со скоростью v .

В области ВГО компоненты скорости определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos \gamma [\operatorname{tg} \gamma + \cos \theta + (\theta - \theta_0) \sin \theta] \\ v_y &= -v \cos \gamma [1 - \sin \theta + (\theta - \theta_0) \cos \theta] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Спроектировав v_x и v_y на касательные к линиям α и β , получим компоненты скорости вдоль линий скольжения

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha &= v [\cos \gamma - \sin (\theta - \gamma)] \\ v_\beta &= v [\cos (\theta - \gamma) + (\theta - \theta_0) \cos \gamma] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В области ВГС компоненты скорости определяются теми же уравнениями (11) и (12), только в этом случае θ_0 постоянная величина, равная его значению в точке F

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cos \gamma [\operatorname{tg} \gamma + \cos \theta + (\theta - \theta_{0F}) \sin \theta] \\ v_y &= -v \cos \gamma [1 - \sin \theta + (\theta - \theta_{0F}) \cos \theta] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В области АВС деформированный материал движется как „жесткое“ тело со скоростью схода стружки, равной скорости на границе ВС. Подставив $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим компоненты скорости в области АВС

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \left[\sin \gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{0F} \right) \cos \gamma \right] \\ v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Полное решение должно удовлетворять также граничным условиям для скоростей и условию несжимаемости материала.

На границе OF из условия сплошности материала следует, что нормальные компоненты скорости по обе стороны линии OF должны быть равны.

Из рис. 1 для недеформированного материала

$$v_\beta = v \cos (\theta_0 - \gamma).$$

Подставив во второе уравнение (12) $\theta = \theta_0$ на границе OF, также получим

$$v_\beta = v \cos (\theta_0 - \gamma).$$

Линия ЕС является геометрическим местом особых точек.

Так как резец неподвижный, то нормальная составляющая скорости на передней грани должна равняться нулю. Подставив $\theta = \frac{\pi}{2}$ в уравнения (11), получим компоненты скорости на участке передней грани

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \left[\sin \gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \cos \gamma \right] \\ v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Как видно из уравнений (14) и (15) всюду на передней грани как на участке l_1 , так и на участке l_2 $v_y = 0$.

Из уравнения (15) следует, что стружка вдоль передней грани, деформируясь, движется с переменной скоростью. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ получим значение v_x у вершины резца, а при $\theta_0 = \theta_{0F}$ — в конце участка l_1 .

Из условия несжимаемости материала следует, что отношение скорости резания v к скорости схода стружки $v_{стр.}$ должна равняться усадке стружки Δ . Скорость схода стружки равна скорости v_x в области ABC, то есть определяется уравнением (14), поэтому

$$\frac{v}{v_{стр.}} = \frac{1}{\sin \gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{0F} \right) \cos \gamma} \quad (16)$$

Определим значение θ_{0F} . Подставив $\theta = \frac{\pi}{2}$ в первое из уравнений (8), получим

$$l_1 = 2R(\pi - 2\theta_{0F}).$$

С другой стороны, из рис. 1 не трудно определить

$$l_1 = \frac{a - 4R \sin \gamma}{\cos \gamma} \quad (17)$$

Приравняв правые части последних уравнений, будем иметь

$$\theta_{0F} = \frac{\pi}{2} - \frac{a - 4R \sin \gamma}{4l \cos \gamma} \quad (18)$$

Подставив (18) в (16), получим

$$\frac{v}{v_{стр.}} = \frac{4R}{a}.$$

Определим усадку стружки. Из рис. 1

$$\Delta = \frac{a_1}{a} = \frac{BC}{a},$$

BC является радиусом кривизны линии BF в точке B. Учитывая, что в этой точке $\theta = \frac{\pi}{2}$, из уравнения (7) найдем $BC = 4R$.

Следовательно, усадка стружки также равна

$$\Delta = \frac{4R}{a}, \quad (19)$$

поэтому

$$\frac{v}{v_{стр.}} = \Delta.$$

Таким образом, поле скоростей удовлетворяет также несжимаемости материала. Направив ось v по направлению скорости резания, ось a — перпендикулярно поверхности резания, определим проекцию силы, действующей на резец.

Из рис. 1, принимая ширину среза равной единице, получим:

$$P_v = -\tau_{xy} \sin \gamma (l_2 + l_1) - \sigma_y l_2 \cos \gamma - \int_0^{l_1} \sigma_y dx \cos \gamma$$

$$P_a = -\tau_{xy} \cos \gamma (l_2 + l_1) + \sigma_y l_2 \sin \gamma + \int_0^{l_1} \sigma_y dx \sin \gamma$$

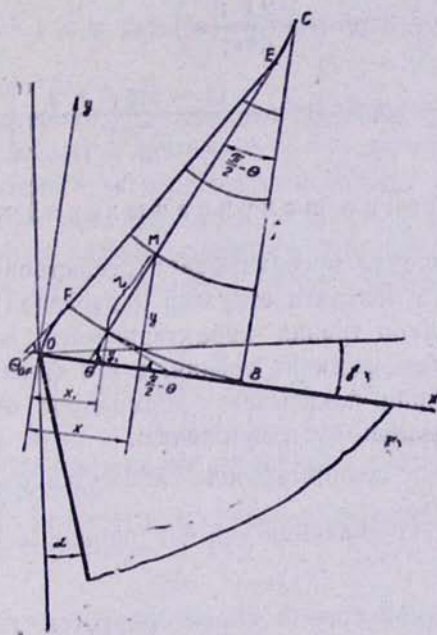


Рис. 3.

Учитывая уравнения (5), (17) и то, что $l_2 = BC = 4R$, после интегрирования получим:

$$\left. \begin{aligned} P_v &= k \left[a(1 - 3\operatorname{tg} \gamma) + \frac{a^2 - 8R^2}{2R \cos \gamma} \right] \\ P_a &= k \left[a(1 - \operatorname{tg} \gamma + 4\operatorname{tg}^2 \gamma) + \frac{8R^2(1 - 2\operatorname{tg} \gamma - a^2 \operatorname{tg} \gamma)}{2R \cos \gamma} \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В полученных основных зависимостях единственным неизвестным является параметр поля напряжений в зоне стружкообразования R . Очевидно, значение R следует определить таким, чтобы сила P_v , совершающая работу резания, получилась бы минимальной.

Продифференцировав P_v по R и приравняв нулю, получим

$$2k \cos \gamma (8R^2 - a^2) = 0,$$

отсюда

$$R = \frac{\sqrt{2}}{4} a. \quad (21)$$

При $R = \frac{\sqrt{2}}{4} a, \frac{d^2 P_v}{d^2 R} > 0$. Следовательно, при равенстве (21) P_v принимает минимальное значение.

Теперь, имея значение R , можно определить все необходимые величины. Так, подставив (21) в (20) для проекций силы резания, окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} P_v &= ka \left(1 - 3\operatorname{tg} \gamma + \frac{2\sqrt{2}}{\cos \gamma} \right) \\ P_a &= k \left[1 - \operatorname{tg} \gamma + 4\operatorname{tg}^2 \gamma + \frac{(1 - 3\operatorname{tg} \gamma) \sqrt{2}}{\cos \gamma} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Обсуждение полученных результатов

Полученное решение предсказывает существование двух участков I_1 и I_2 пластического контакта стружки и передней грани.

В участке I_1 закон трения характеризуется постоянством удельной силы трения. Коэффициент трения, в его физическом понимании теряет смысл. Он лишь показывает формальное отношение удельной силы трения к нормальному напряжению.

Здесь стружка, деформируясь, движется с переменной скоростью, увеличиваясь от значения $v \sin \gamma$ у вершины резца до $\frac{\sqrt{2}}{2} v$ в конце участка I_1 .

В участке I_2 закон трения характеризуется постоянством коэффициента трения.

Здесь предельно напряженная стружка движется с постоянной скоростью, в рассматриваемом случае $\frac{\sqrt{2}}{2} v$. Наличие двух характерных участков контакта обнаруживается при экспериментальных исследованиях. Правда, некоторые авторы не совсем точно I_2 называют участком упругого контакта.

Полученное решение позволяет предсказать тот же характер распределения износа и тепла, выделенного от трения на передней гра-

ни. Удельная работа трения в рассматриваемом случае равна kv_x . Отсюда следует, что участок l_2 , где v_x имеет максимальное значение, изнашивается интенсивнее. Таким образом, можно предсказать лункообразование и появление фаски на передней грани.

Серьезное исследование вопросов механики процесса стружкообразования с позиций теории пластичности было проведено в работе [3]. Авторы этой работы, исходя из схемы стружкообразования с единственной плоскостью сдвига, для угла сдвига нашли следующее решение

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \gamma - \eta. \quad (23)$$

Заметим, что в нашем случае, с увеличением γ , как следует из уравнений (17) и (21), длина участка контакта l_1 уменьшается и при $\gamma \geq \frac{\pi}{4}$

становится равной нулю, то есть неоднородное поле напряжений ВСФО исчезает, и схема деформации, упрощаясь, преобразовывается в схему с единственной плоскостью сдвига. Нетрудно выяснить, что

при $\gamma \geq \frac{\pi}{4}$ значение β и в нашем случае определяется уравнением (23).

При больших значениях угла трения η решение (23) с уменьшением переднего угла приводит к чрезмерному увеличению силы резания. Для согласования теории с экспериментами полное решение в работе [3] связывалось с наростообразованием. Однако нарост предсказывался для случаев, когда экспериментально он не обнаруживается. Необходимо было искать иное решение, которое и было приведено в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности, М., 1969.
2. Р. Б. Мартиросян. Резание металлов как процесс пластической деформации сжатия и сдвига, Армгосиздат, 1963.
3. И. Ли и Б. Шаффер. Применение теории пластичности к проблеме механической обработки материалов, «Механика», 5, 1952.