УДК 52—64

Э. Х. ДАНИЕЛЯН

К ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ТРЕХМЕРНОСТИ ГЕОМЕТРИИ. I. ТОЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрены задачи теории переноса излучения в средах, содержащих горизонтально-неоднородно распределенные первичные источники энергии. В случае полубесконечной среды при изотропном рассеянии получено явное интегральное представление для резольвентной функции основного интегрального уравнения посредством аналога φ-функции Амбарцумяна. Для последней также получено явное интегральное представление.

1. Введение

В теории переноса хорошо изученными можно считать задачи, в которых первичные источники излучения распределены в горизонтальной плоскости однородно. Во избежание недоразумений, сразу скажем, что под горизонтальной плоскостью подразумевается плоскость, параллельная границе рассеивающей среды. Если же распределение источников (первичных) зависит от всех пространственных координат, то нахождение интенсивности излучения в заданном месте представляет собой довольно трудную задачу (разумеется для сред, имеющих границы; например, для бесконечной среды это не является проблемой, поскольку известно явное выражение для резольвенты, которая в силу симметрии зависит, по существу, лишь от одной пространственной переменной). И, тем не менее, задачи подобного рода необходимо всесторонне исследовать, ввиду их большого прикладного значения в самых разных областях физики: от астрофизики, до физики плазмы, биофизики и др.

Некоторые из задач с учетом трехмерности геометрии уже изучались и к настоящему времени в этой области достигнут определенный прогресс. Так, в работе Амбарцумяна [1] впервые была рассмотрена задача о диффузии света в бесконечной среде, содержащей точечный первичный источник. В ней автору удалось свести задачу с точечным источником к задаче с плоским источником и получить асимптотическое выражение для функции источника. Отметим также работы Элиота [2], в которой для решения задач указанного типа применялось двумерное Фурье-преобразование, Абрамова и Напартовича [3], получивших некоторые асимптотические решения для задачи о диффузии излучения в полубесконечной среде, содержащей точечный источник, и, наконец работу Райбики [4], в которой с помощью двумерного Фурье-преобразования удается, в некотором смысле, свести задачи с горизонтально-неоднородными источниками к задачам с плоскопараллельной геометрией (как в полубесконечной, так и в среде конечной оптической толщины).

Полученные нами и приводимые ниже некоторые результаты для однородной полубесконечной среды основаны на применении метода интегрального преобразования Ганкеля, эквивалентного, в частном случае, двумерному преобразованию Фурье с использованием цилиндрической симметрии.

2. Интенсивность излучения при произвольных, горизонтально-неоднородных первичных источниках энергии

Рассмотрим полубесконечную рассеивающую среду, в которой имеются произвольно расположенные первичные источники излучения. Введем систему цилиндрических координат (τ, r и φ): переменные r и φ-полярные координаты точки на граничной плоскости, а переменная τ-расстояние точки от граничной плоскости. Отметим также, что переменные τ и r измеряются в оптических единицах.

Распределение первичных источников (излучающих изотропно и стационарно) в общем случае дается некоторой функцией трех переменных-$g(\tau, r, \varphi)$. В процессе диффузии первичного излучения в каждой точке среды установится некий стационарный режим, описываемый также функцией трех переменных—$\varepsilon(\tau, r, \varphi)$, которую обычно называют коэффициентом объемного излучения (ей пропорциональны функция источника и число возбужденных атомов в единице объема). Зная эту величину, очевидно, можно найти и интенсивность излучения в любом месте рассматриваемой среды. Например, для интенсивности излучения, идущего вверх в направлении $\arccos\eta$ на глубине τ и $r=0$, легко видеть, что

$$I(\tau, \eta, \varphi)=\frac{\lambda}{4\pi}\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t-\tau}{\eta}}\varepsilon\left[t, \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}(t-\tau), \pi+\varphi\right]\frac{dt}{\eta}.$$

Нетрудно убедиться, что функцию ε, соответствующую заданной функции g, можно найти с помощью величины-$\Gamma(\tau, \tau', r)$, обобщающей понятие обычной резольвенты $\Gamma(\tau, \tau')$ на случай задач с горизонтальной источниковой неоднородностью, следующим образом:

$$\varepsilon(\tau, r, \varphi)=g(\tau, r, \varphi)+$$
$$+\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\infty}r'dr'\int_0^{\infty}\Gamma\left(\tau',\tau, \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')}\right)g(\tau', r', \varphi')d\tau'.$$

При этом величине $\Gamma(\tau, \tau', r)dV$—приписывается следующий физический смысл: вероятность того, что квант, первоначально находившийся в поглощенном состоянии на оптической глубине τ', в результате диффузии поглотится в объеме dV, расположенном на глубине τ и отстоящем от первоначального места на расстоянии r. Очевидно, что эта функция должна быть симметричной относительно аргументов τ и τ', т. е.

$$\Gamma(\tau, \tau', r)=\Gamma(\tau', \tau, r),$$

а также, что имеет место нормировочное соотношение

$$2\pi\int_0^{\infty}\Gamma(\tau, \tau', r)\, r\, dr=\Gamma(\tau, \tau').$$

Это следует непосредственно из ее физического смысла, который позволяет также получить следующее интегральное уравнение:

$$\Gamma(\tau, \tau', r) = \frac{\lambda e^{-\rho_0}}{4\pi\rho_0^2} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty L(\tau'-t, r, r')\, \Gamma(\tau, t, r') r' dr'. \qquad (1)$$

Здесь обозначено

$$L(\tau, r, r') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-\sqrt{\tau^2+\rho^2}}}{\tau^2+\rho^2}\, d\varphi \qquad (2)$$

и

$$\rho_0 = \sqrt{r^2+(\tau'-\tau)^2}, \qquad \rho = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi}\ . \qquad (3)$$

Для решения уравнения (1) применим интегральное преобразование Ганкеля нулевого порядка. Кроме того, воспользовавшись теоремой сложения (см., например, [5])

$$J_0(z\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(zr) J_k(zr') \cos(k\varphi) \qquad (4)$$

и условием ортогональности бесселевых функций (см., например, [6])

$$y\int\limits_0^\infty J_n(yx) J_n(zx)\, x dx = \delta(y-z), \qquad (5)$$

получим следующее интегральное уравнение

$$\overline{\Gamma}(\tau, \tau', z) = \frac{\lambda}{4\pi} K(|\tau-\tau'|, z) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty K(|t-\tau'|, z)\, \overline{\Gamma}(\tau, t, z) dt, \qquad (6)$$

в котором черточки сверху означают результат применения преобразования Ганкеля к соответствующим величинам без черты, а z—параметр преобразования, т. е.

$$\overline{\Gamma}(\tau, \tau', z) = \int\limits_0^\infty \Gamma(\tau, \tau', r)\, J_0(zr) r dr\ . \qquad (7)$$

В формулах (4), (5) и (7), $J_n(z)$-функция Бесселя первого рода. Формула обращения, соответствующая (7), получается из нее заменой $\overline{\Gamma} \rightleftarrows \Gamma$ и $z \rightleftarrows r$.

Ядро уравнения (6) имеет следующий вид:

$$K(\tau, z) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\tau^2+\rho^2}}}{\tau^2+\rho^2} J_0(z\rho)\rho\, d\rho.$$

Однако, если воспользоваться частным случаем одного из известных (см., например, [7]), интегралов Сонина-Гегенбауэра

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0(bx) x\, dx = \frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

то для ядра можно получить представление в виде суперпозиции экспонент (относительно переменной τ):

$$K(\tau, z)=\int_1^\infty \frac{e^{-\tau\sqrt{z^2+x^2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dx=\int_{\sqrt{1+z^2}}^\infty e^{-\tau y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-z^2}}. \qquad (8)$$

Отметим, что уравнение (6) с ядром (8) впервые было получено другим способом в работе Райбики [4].

3. Явное выражение для резольвентной функции $\bar{\Phi}(\tau,z)$.

Из теории интегральных уравнений хорошо известно (см., например, [8] или [9]), что резольвенту интегрального уравнения типа Винера-Хопфа с разностным ядром можно выразить через ее граничные значения $\Gamma(0, \tau)$ и $\Gamma(\tau, 0)$ (в случае симметричных ядер они совпадают). В данном случае решение уравнения (6) запишется в виде

$$\bar{\Gamma}(\tau, \tau', z)=\bar{\Gamma}(0, |\tau'-\tau| z)+\int_0^{\min(\tau,\tau')}\bar{\Gamma}(0, \tau-t, z)\bar{\Gamma}(0, \tau'-t, z)dt. \qquad (9)$$

Вводя обозначение $\bar{\Gamma}(0, \tau, z)=\bar{\Phi}(\tau, z)$ и полагая в (6) $\tau=0$, получим следующее уравнение

$$\bar{\Phi}(\tau, z)=\frac{\lambda}{4\pi}K(\tau, z)+\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau-t|, z)\,\bar{\Phi}(t, z)dt. \qquad (10)$$

Уравнения такого типа, ядра которых удается представить в виде суперпозиции экспонент, подробно исследовались в работе Нагирнера [10], в которой и приводится их решение в явном виде. Для получения решения уравнения (10) необходимо, в частности, выяснить вопрос о корнях характеристического уравнения данной задачи

$$\frac{\lambda}{2\sqrt{k^2-z^2}}\ln\frac{1+\sqrt{k^2-z^2}}{1-\sqrt{k^2-z^2}}-1=0, \qquad (11)$$

т. е., при каких $k=k(z, \lambda)$ удовлетворяется (11). Легко видеть, что это равенство может иметь место лишь при значениях

$$k(z, \lambda)=\sqrt{z^2+k_0^2(\lambda)}\ . \qquad (12)$$

Здесь через $k_0(\lambda)$ мы обозначили корень обычного характеристического уравнения $u\ (1/k_0)=0$.

После вычисления полюсного члена, соответствующего корню характеристического уравнения (11), решение уравнения (10) запишется в виде

$$2\pi\bar{\Phi}(\tau, z)=C(z)e^{-k(z)\tau}+\frac{\lambda}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}\frac{b\, e^{-\frac{\tau}{\mu}}d\mu}{\left[\left(b-\frac{\lambda}{2}\mu\ln\left|\frac{\mu+b}{\mu-b}\right|\right)^2+\left(\frac{\lambda\pi\mu}{2}\right)^2\right]\mu H(\mu, z)}, \qquad (13)$$

в котором обозначено:

$$b=\sqrt{1-\mu^2z^2},\ k(z)=k(z,\lambda),\ C(z)=\left[\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}\frac{\mu H(\mu,z)d\mu}{[1-k(z)\mu]^2\sqrt{1-\mu^2z^2}}\right]^{-1} \qquad (14)$$

и

$$H(\mu,z)=1+2\pi\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\mu}}\overline{\Phi}(\tau,z)d\tau, \qquad (15)$$

причем функция H удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$H(\eta,z)=1+\frac{\lambda}{2}\eta H(\eta,z)\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}\frac{H(\mu,z)d\mu}{(\mu+\eta)\sqrt{1-\mu^2z^2}}. \qquad (16)$$

Уравнение (16) впервые было получено в упоминавшейся выше работе Райбики [4].

Выражение (13) не очень удобно для вычислений, ввиду зависимости верхнего предела интегрирования, а также величины в квадратных скобках в подинтегральном выражении от переменной z. Вводя новую переменную $\eta=\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2z^2}}$, получим более удобное для вычислений следующее окончательное выражение:

$$2\pi\overline{\Phi}(\tau,z)=C(z)e^{-k(z)\tau}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\frac{e^{-\tau\frac{\sqrt{1+\eta^2z^2}}{\eta}}d\eta}{R(\eta)\varphi(\eta,z)\eta(1+\eta^2z^2)}, \qquad (17)$$

в котором обозначено $R(\eta)=\left(1-\frac{\lambda}{2}\eta\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^2+\left(\frac{\lambda\pi\eta}{2}\right)^2$, а функция $\varphi(\eta,z)$ удовлетворяет уже следующему уравнению

$$\varphi(\eta,z)=\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2z^2}}+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta,z)\int\limits_0^1\frac{\varphi(\mu,z)d\mu}{\mu\sqrt{1+\eta^2z^2}+\eta\sqrt{1+\mu^2z^2}}, \qquad (18)$$

очень удобному (по сравнению с (16)), для вычислений.

Отметим, что выражения (18), (17), (12)—(10) и (6) при z=0 переходят в хорошо известные выражения для задач с плоским источником, что, разумеется, естественно поскольку при этом $K(\tau,0)=E_1(\tau)$.

Введенная нами вспомогательная функция $\varphi(\eta,z)$ следующим образом связана с рассмотренной ранее функцией $H(\eta,z)$:

$$\sqrt{1+\eta^2z^2}\,\varphi(\eta,z)=H\left(\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2z^2}},z\right). \qquad (19)$$

Для нее помимо (18) можно получить и другое уравнение (аналогичное уравнению для функции Амбарцумяна, полученному в работе

[11]). Для этого подставим (17) в (15) и проведем интегрирование по τ аналитически. Имея в виду (19), окончательно получим уравнение

$$\sqrt{1+\eta^2 z^2}\,\varphi(\eta, z) = 1 + \frac{\eta C(z)}{\sqrt{1+\eta^2 z^2}+\eta\sqrt{k^2+z^2}} + \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 \frac{d\mu}{R(\mu)(1+\mu^2 z^2)\varphi(\mu, z)\left[\eta\sqrt{1+\mu^2 z^2}+\mu\sqrt{1+\eta^2 z^2}\right]}, \tag{20}$$

обладающее по сравнению с (18) всеми преимуществами, о которых говорилось в работе [11] при сравнении общеизвестного уравнения Амбарцумяна для φ-функции с новым уравнением для нее.

Для функции $\varphi(\eta, z)$, являющейся обобщением функции Амбарцумяна, можно получить и явное интегральное представление. Приведем его здесь без вывода:

$$\varphi(\eta, z) = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2 z^2}}\exp\left\{-\frac{\eta}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(1-\lambda\,\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{v^2+z^2}}{\sqrt{v^2+z^2}}\right)\frac{\sqrt{1+\eta^2 z^2}\,dv}{[1+\eta^2(v^2+z^2)]}\right\} \tag{21}$$

Приведем также одно весьма полезное соотношение для нее:

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\eta, z)}{\sqrt{1+\eta^2 z^2}}\,d\eta = \frac{2}{\lambda}\left(1-\sqrt{1-\lambda\,\frac{\operatorname{arctg} z}{z}}\right). \tag{22}$$

Заметим, что при $z=0$, (21) переходит в известное явное выражение, полученное Фоком [12] для функции Амбарцумяна, а (22)-в известное соотношение для ее нулевого момента.

Дальнейшему изучению некоторых задач теории переноса в средах, содержащих локальные первичные источники энергии будет посвящена вторая часть нашей работы.

3 августа 1987 г.

Է. Խ. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՌԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ: I. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՌԵԶՈԼՎԵՆՏԻ ՃՇԳՐԻՏ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիտարկված են տեղափոխման տեսության խնդիրները հորիզոնական-անհամասեռությամբ բաշխված ճառագայթման աղբյուրներ պարունակող միջավայրերում։ Կիսանվերջ համասեռ միջավայրի իզոտրոպ ցրման խնդրում ստացված է հիմնական ինտեգրալ հավասարման ռեզոլվենտի բացահայտ տեսքը՝ Համբարձումյանի φ-ֆունկցիայի նմանակի միջոցով։ Վերջինիս համար նույնպես ստացված է ճշգրիտ բացահայտ արտահայտություն։

E. KH. DANIELIAN

ON THE PROBLEM OF RADIATIVE TRANSFER THEORY WITH ACCOUNT OF THREE-DIMENSIONAL GEOMETRY. I. EXPLICIT EXPRESSION OF BASIC INTEGRAL EQUATIONS RESOLVENT

The problems of radiative transfer theory in the medium which contains horizontal-unhomogeneous primary energy sources have been considered. By means of the analogy of Ambartsumian's φ-function the explicit representation of recolvent function of the basic integral equation has been deduced in the case of semiinfinite homogeneous medium with isotropic scattering. The explicit integral representation of the φ-function has been obtained too.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Бюлл. Ереванской астрон. обс., *6*, 3, 1945.
2. *T. P. Elliot*, Proc. Roy. Soc., *228A*, 424, 1955.
3. *Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович*, Астрофизика, *5*, 187, 1969.
4. *G. B. Rybicki*, JQSRT, *11*, 827, 1971.
5. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
6. *Э. Маделунг*, Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1961.
7. *А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров*, Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
8. *В. В. Соболев*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, *11*, 39, 1958.
9. *М. Г. Крейн*, Успехи матем. наук, *13*, 3, 1958.
10. *Д. И. Нагирнер*, АЖ, *41*, 669, 1964.
11. *Р. Р. Андреасян, Э. Х. Даниелян*, Сообщ. Бюраканской обс., *50*, 1978.
12. *В. А. Фок*, Математ. сб., *14*, 3, 1944.