

М. А. МНАЦАКАНЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ

Из простых физических соображений выводятся различные представления функции источников в теории переноса. Обсуждаются их преимущества.

Интенсивность излучения $I(\tau, \mu)$ в изотропно рассеивающей освещенной извне однородной полубесконечной среде, есть решение следующей задачи:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + S(\tau); \quad I(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0.$$

Наряду со стандартным представлением для функции источников S :

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu + S^*(\tau), \quad S^*(\tau) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau/\eta}, \quad (1)$$

можно записать ряд других, например:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 I(\tau, \mu) H(\mu) d\mu + S_H^*(\tau), \quad (2)$$

где

$$S_H^*(\tau) = \frac{\lambda}{2} H(\eta) e^{-\tau/\eta}.$$

Важность формулы (2) подчеркивается в работе [1]; вместе с тем там отмечается, что ее физический смысл неясен. В этой связи мы обращаем внимание на более ранние публикации [2, 3], в которых и была фактически установлена формула (2). Впрочем, там это было сделано непосредственно из физических соображений.

Ниже мы осветим физическую сторону двух представлений для функции источников, выводимых другим, формальным путем в [1], а также установим более общую форму представления для функции источников, опять же физически очевидную и содержащую в себе в качестве частных случаев эти два представления. Дабы не заслонять идеи деталями, мы ограничимся рассмотрением изотропного случая.

1. В [2, 3] введена функция $Y(\tau, \eta, \xi)$ и описаны ее физические свойства.

Эквивалентное определение Y состоит в следующем. Пусть через τ полубесконечной среды в направлении ξ к границе среды, вылетит из нее в направлении η .

Она определяет вероятность того, что квант, летящий на глубине τ к границе полубесконечной среды вылетает квант в направлении ξ . Ес-

ли перед средой расположить слой толщины τ , то вероятность выхода кванта в направлении η из суммарной полубесконечной среды определится величиной $Y(\tau, \eta, \xi)$. Эту же вероятность безотносительно к знаку ξ ниже обозначим через $X(\tau, \eta, \xi)$.

Пусть на границе полубесконечной среды имеется поглощенный квант. Вероятность его выхода в направлении μ , определяемую функцией Амбарцумяна, здесь обозначим через $\frac{\lambda}{2} H(\mu)$. Если перед средой расположить слой толщины τ , то мы получим новую полубесконечную среду с квантом, поглощенным в ней на глубине τ . Сказанное означает, что вероятность выхода этого кванта равна

$$P(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 Y(\tau, \eta, \mu) H(\mu) d\mu. \quad (3)$$

Учитывая, что величина Y состоит из диффузной и прямопролетной составляющих

$$Y(\tau, \eta, \xi) = Y_{\text{диф}}(\tau, \eta, \xi) + e^{-\tau/\xi} \delta(\eta - \xi), \quad (4)$$

из соотношения (3) мы фактически получаем представление (2).

2. Чтобы выяснить смысл функции источников, обратимся к другому очевидному соотношению [2—4]

$$P(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 X(\tau, \eta, \xi) d\xi, \quad (5)$$

выражающему собой то обстоятельство, что поглощенный на глубине τ квант излучается изотропно с плотностью вероятности $\frac{\lambda}{2}$, после чего его выход определяется действием функции $X(\tau, \eta, \xi)$. Подстановкой (4) в (5) мы и приходим к представлению (1).

В выражении (5) величина η является параметром. Интегрированием по η от 0 до 1 переходим к величинам S и I , т. е. приходим к формальной замене:

$$P(\tau, \eta) \rightarrow S(\tau), \quad Y(\tau, \eta, \xi) \rightarrow I(\tau, \xi). \quad (6)$$

Иными словами, формально, функция источников S есть величина P с «опущенной» зависимостью от углового параметра η .

3. Наряду со свойствами (3) и (5) отметим еще одно очевидное, но более общее свойство величины Y [2, 3]:

$$P(\tau+t, \eta) = \int_0^1 Y(\tau, \eta, \mu) P(t, \mu) d\mu. \quad (7)$$

Если в полубесконечной среде на глубине t поглощен квант, то вероятность его выхода из среды определяется величиной $P(t, \mu)$. Располагая перед средой слой толщины τ , мы находим, с одной стороны, что вероятность выхода этого кванта определяется действием на $P(t, \mu)$ оператора $Y(\tau)$, а с другой стороны, имеем задачу о вероятности выхода из суммарной полубесконечной среды кванта, поглощенного на глубине $\tau+t$.

Из (7), согласно (6), опуская зависимость от параметра η и выделяя из Y прямопролетную составляющую, мы заключаем, что имеет место более общее представление для функции источников

$$S(\tau+t) = \int_0^1 I(\tau, \mu) P(t, \mu) d\mu + S_p(\tau), \quad (8)$$

где

$$S_p(\tau) = P(t, \eta) e^{-\tau/\eta}.$$

При $t=0$ оно переходит в представление (2).

4. В другом предельном случае $\tau \rightarrow \infty$, используя известную асимптотику

$$P(t, \eta) = \frac{\lambda}{2} A e^{-k\eta} \frac{\eta H(\eta)}{1-k\eta}, \quad t \gg 1,$$

из (7) находим

$$\int_0^1 Y(\tau, \eta, \mu) \frac{\mu H(\mu)}{1-k\mu} d\mu = \frac{H(\eta)}{1-k\eta} e^{-k\tau}. \quad (9)$$

Смысл этого соотношения известен: в задаче Милна относительное угловое распределение выходящего из полубесконечной среды излучения не меняется при добавлении перед средой слоя произвольной толщины τ , но интегральное излучение при этом экспоненциально убывает.

Полагая под интегралом

$$\frac{\mu}{1-k\mu} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1-k\mu} - 1 \right),$$

получаем

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 Y(\tau, \eta, \mu) \frac{H(\mu)}{1-k\mu} d\mu = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 Y(\tau, \eta, \mu) H(\mu) d\mu = \frac{\lambda}{2} k \frac{\eta H(\eta)}{1-k\eta} e^{-k\tau}.$$

Из сравнения с (3) имеем

$$P(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 Y(\tau, \eta, \mu) \frac{H(\mu)}{1-k\mu} d\mu = \frac{\lambda}{2} k \eta \frac{H(\eta)}{1-k\eta} e^{-k\tau}. \quad (10)$$

Если теперь выделить из Y δ -составляющую (4), то придем к другому представлению (26—27) работы [1] для функции источников.

5. Таким образом, оба представления—(6—7) и (26—27) работы [1] являются предельными случаями физически очевидного представления (7)—(8)—одно при $\tau=0$, другое—при $\tau \rightarrow \infty$.

Представление (1) имеет серьезное преимущество перед другими известными. В него входит значение только нисходящей интенсивности I на «половинном» интервале $(0,1)$. Это обстоятельство упрощает вычислительную сторону задачи.

Представление же (8) обладает еще другими преимуществами,

ибо позволяет проводить вычисления рекуррентно с конечным шагом по t , а не бесконечно малыми шагами, как этого требует, например, классическое дифференциальное уравнение переноса.

Однако и этот способ не самый лучший. Более простой и эффективный метод численного решения задачи переноса состоит в использовании элементарного выражения функции Y , зависящей от двух угловых переменных, через функцию источников P , зависящую от одной—если речь идет о полубесконечной среде, и метода сведения [2, 4]—для слоя конечной толщины.

3 августа 1987 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Иванов, *Астрофизика*, 13, 505, 1977.
2. М. А. Мнацаканян, *ДАН СССР*, 225, № 5, 1049, 1975.
3. Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян, *Сообщ. Бюраканской обс.*, 46, 101, 1975.
4. М. А. Мнацаканян, *Астрофизика*, 11, 659, 1975; 12, 451, 1976.

Մ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

ԱՂՔՅՈՒՐՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՏԱՐԲԵՐ ՊԱՏԿԵՐԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ճառագայթման տեղափոխման տեսության աղբյուրների ֆունկցիայի տարբեր պատկերացումները կարելի է ստանալ պարզ ֆիզիկական դատողություներից: Քննարկվում են նրանց առավելությունները:

M. A. MNATSAKANYAN

ON SOME REPRESENTATIONS OF THE SOURCE FUNCTION

It is shown that several representations of the source function can be obtained based on simple physical considerations. Their advantages are discussed.