Р. А. ВАРДАНЯН, Г. А. САНЯН

# О ЗАКОНЕ ПЛАНЕТНЫХ РАССТОЯНИЙ

Закон Тициуса—Боде был открыт более двухсот лет назад. Вначале он появился как правило для запоминания планетных расстояний. Открытия Урана и малых планет, средние радиусы орбит которых оказались в согласии с этим законом, явились серьезным свидетельством в его пользу. Впоследствии аналогичная закономерность была обнаружена и в спутниковых системах планет-гигантов [1].

Сомнения в справедливости закона Тициуса—Боде, возникшие после открытия Нептуна, в конечном счете привели к необходимости его усовершенствования. Существующие модификации этого закона свидетельствуют о возможности лишь приближенного представления планетных расстояний в виде геометрической прогрессии. Ее знаменатель—важный параметр, погрешности в определении которого весьма чувствительно влияют на точность совпадения расчетных расстояний с действительными. Согласно расчетам Блэгг [1], этот знаменатель равен 1,7275.

Данное значение получается в предположении, что планетная система состоит из девяти больших планет и пояса астероидов. Существование новых орбит между ними исключается. По-видимому, последнее условие, несмотря на всю правдоподобность, нельзя считать окончательным. Данное соображение, в свете недавних открытий американскими аппаратами новых тел в спутниковых системах, представляется нам не лишенным смысла.

Приведенный выше знаменатель Блэгг не дает хорошей аппроксимации последовательности планетных расстояний. Она достигается лишь введением некоторой 2П—периодической функции, называемой эволюционной, имеющей довольно сложный вид (см. также модификацию Ричардсона в [1]). Прогрессия является наиболее важной частью закона типа Тициуса—Боде и для заданной системы тел единственна. Выбор же эволюционной функции, по-видимому, неоднозначен.

В настоящей работе предлагается новая формулировка этого закона с знаменателем, отличающимся от знаменателей прогрессий, приводимых в работах других авторов. Во второй части нашего исследования мы обсудим некоторые следствия из полученной прогрессии.

Новая формулировка вытекает из следующего приближенного соотношения для планет земной группы, за исключением Меркурия:

$$2\pi R_n - 2R_n = 2\pi R_{n-1}, \tag{1}$$

где $R_n$, $R_{n-1}$—средние орбитальные радиусы планет с номерами $n$ и $n-1$ соответственно. Это означает, что длины орбит соседних планет отличаются почти на диаметр большей из них. Вместо (1) в дальнейшем будем следовать соотношению более общего вида:

$$2\pi R_n - 2kR_n = 2\pi R_{n-1}, \tag{2}$$

Здесь $k$—некоторый коэффициент, постоянный для данной системы. Введя обозначение $q = \pi/\pi - k$, из (2) получим

$$R_n = R_0 q^n, \tag{3}$$

где $R_0$—нормировочный множитель (единица расстояния), $q$—знаменатель прогрессии. Проверка показывает, что при $q=1,467$ и $R_0=1 (k=1)$ достигается заметно лучшее, чем по чистой прогрессии Блэгг, совпадение расчетных расстояний с действительными. Из формулы (3) следует, что в поясе астероидов должны существовать две орбиты, примерно соответствующие положениям максимумов пространственного распределения S и C типов этих планет. Данный вывод вытекает также из закона Армелини [2]. Далее обнаруживается одна орбита между Юпитером и Сатурном на расстоянии 6,79 а. е. и еще одна—за Сатурном, которую можно приписать Хирону (14, 22 а. е. вместо истинного 13,7 а. е.). По поводу первой заметим, что расчеты свидетельствуют о возможности существования устойчивой орбиты на расстоянии 6,8 а. е. [3]. Это значение мы и примем за средний орбитальный радиус предполагаемого тела. Других вакантных орбит для Солнечной системы приведенная прогрессия не дает.

Такое отождествление позволило увеличить число орбит до тринадцати. Пользуясь способом наименьших квадратов можно уточнить значения $q$ и $R_0$ для новой системы ($q=1,467$ и $R_0=1$ использовались в качестве начального приближения). Соответствующие формулы для определения этих величин даны в приложении.

Согласно нашим расчетам, оптимальные значения $q$ и $R_0$ таковы:

$$q = 1,453567$$
$$R_0 = 0,994 \text{ а. е.} \tag{4}$$

Заметим, что $\ln q$ характеризует наклон линейной зависимости между $\ln R_n$ и $n$ (см. рис.).

В выражениях для $q$ и $R_0$, приведенных в приложении, нумерация планет начинается с некоторого индекса $i=m\leqslant 0$. Вариации $m$ приводят, вообще говоря, к разным значениям $q$ и $R_0$. $i=0$ соответствует той планете, расстояние которой от центра системы наиболее близко к $R_0$. Вычисления показывают, что два значения $q$ можно считать практически равными, если они совпадают с точностью до трех-четырех знаков после запятой.

В таблице результаты расчетов $R_в$ сопоставлены с действительными средними расстояниями $R_{ист}$ планет от Солнца. Отношение этих величин $R_в/R_{ист}$ показывает точность приближения. Наибольшее отклонение от прогрессии наблюдается у Меркурия. Заметим, однако, что значение его большой полуоси близко к расчетному расстоянию (0,465 и 0,467 а . е. соответственно). Примечательно, на наш взгляд, появление двух орбит в поясе малых планет. Этот результат согласуется с предположением о том, что здесь, возможно, существовали два отдельных крупных тела или две независимые системы тел, в процессе эволюции слившиеся в одно кольцо. Следует подчеркнуть, что из-за некоторой неопределенности положений максимумов пространственного распределения S- и C-астероидов, отношение $R_в/R_{ист}$ для них может быть и иным.

Среди остальных планет заметнее всех выпадает из прогрессии Юпитер. В среднем квадрат отклонения отношения $R_в/R_{ист}$ от точной прогрессии, соответствующей $R_в / R_{ист} = 1$, равен 8,38%. Относительно же орбиты радиуса 6,8 а. е. можно высказать предположение, что она принадлежит, вероятно, астероиду или группе астероидов за орбитой Юпитера.

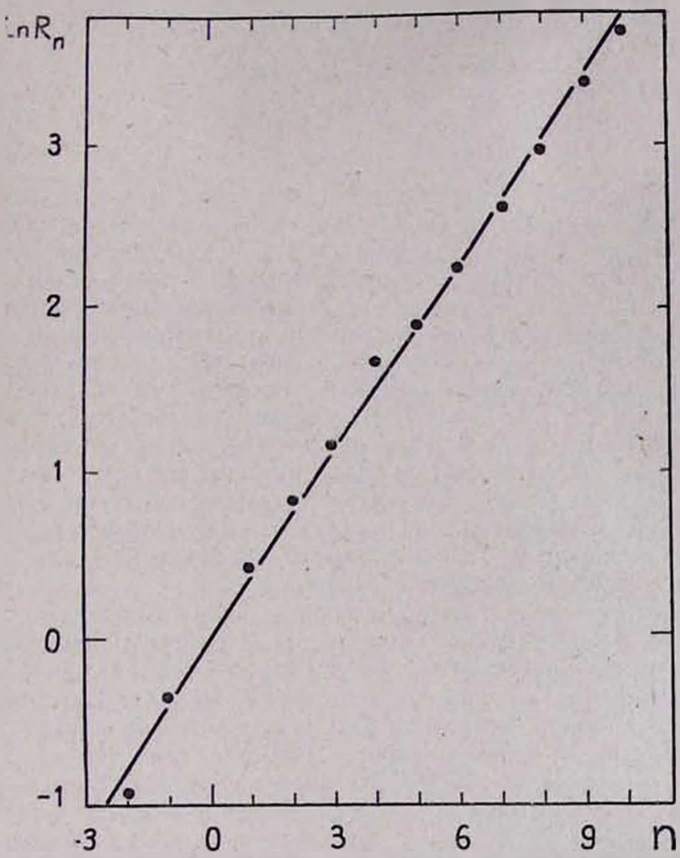


Рисунок. График зависимости логарифмов расстояний планет от их номера; тангенс угла наклона равен lnq; кружки соответствуют истинным положениям планет

*Таблица*

Расстояния планет от Солнца

| Планета | $R_{ист}$ а. е. | $R_n$ а. е. | $R_n/R_{ист}$ |
|---|---|---|---|
| Меркурий | 0.387 | 0.467 | 1.207 |
| Венера | 0.723 | 0.682 | 0.943 |
| Земля | 1.000 | 0.994 | 0.994 |
| Мерс | 1.524 | 1.450 | 0.951 |
| S—астероиды | 2.350 | 2.115 | 0.900 |
| C—астероиды | 3.150 | 3.084 | 0.979 |
| Юпитер | 5.200 | 4.500 | 0.865 |
| ? | 6.800 | 6.562 | 0.965 |
| Сатурн | 9.538 | 9.570 | 1.003 |
| Хирон | 13.700 | 13.960 | 1.019 |
| Уран | 19.190 | 20.361 | 1.061 |
| Нептун | 30.070 | 29.698 | 0.988 |
| Плутон | 39.500 | 43.316 | 1.097 |
| Трансплутон | ? | 63.180 | ? |

Весьма важным является вопрос о статистической значимости геометрической прогрессии. Наиболее подробно он исследован Дермоттом в работе [4], посвященной, главным образом, системам планет-гигантов. Подчеркнем, что анализ таких систем—задача непростая, что вызвано существованием нерегулярных спутников. Ниже приводятся полученные Дермоттом значения знаменателей прогрессий:

система Юпитера—1,59
—"— Сатурна —1,26
—"— Урана —1,44.

Значения постоянной $k$ из (2) для этих систем равны соответственно: 1,166; 0,648 и 0,956. На примерах фиктивных систем случайно распределенных спутников было показано, что в них образуется большое число вакансий, а некоторые орбиты содержат более одного спутника. Далее выяснилось, что в таких системах образование прогрессий, знаменатели которых в кубической степени равнялись бы целому числу (даже приближенно) маловероятно. Заметим, что полученные Дермоттом знаменатели удовлетворяют условию целочисленности кубов (почему речь идет именно об этой степени станет ясно чуть ниже): $1{,}59^3=4$; $1{,}26^3=2$; $1{,}44^3=3$. Для Солнечной системы с знаменателем $q=1{,}458567$ это условие выполняется приближенно: $q^3=3{,}1$. По Блэгг $q^3=5.155$. На наш взгляд, приведенные факты дают основание предполагать, что полученная нами прогрессия планетных расстояний статистически значима. Во всяком случае ее статистическая значимость выше, чем у чистой прогрессии Блэгг.

По-видимому, результаты Дермотта могут быть строго проверены в рамках теории геометрических вероятностей. Определенное указание на это можно усмотреть в задаче о распределении случайных точек на интервале фиксированной длины $[0, D]$. При независимом распределении вероятность принять какую-либо координату $0\leqslant x_k\leqslant D$ где $k=1, 2, \ldots n$, $n$—число точек, одинакова для всех точек (некоторые из них могут проектироваться друг на друга). Составим отношения $x_k/x_{k-1}$. Нас интересует случай, когда $(x_k/x_{k-1})^3$—целое число. Это условие выполняется для целочисленных и иррациональных $x_k/x_{k-1}$ Тогда вероятность образования геометрической прогрессии $x_k=x_{k-1}q$ должна быть равна нулю, поскольку множество иррациональных чисел, удовлетворяющих поставленному условию, нульмерно. В общем случае вероятность образования п точками какой-либо геометрической прогрессии на заданном интервале $[0, D]$ пропорциональна $\lambda=1/D^n$ Детальный анализ этой задачи—предмет отдельной работы. Здесь же мы хотели лишь обратить внимание на аналогию между проблемой происхождения геометрической прогрессии в небесномеханических системах и теорией геометрических вероятностей.

Вывод о целочисленности кубов знаменателей прогрессий интересен тем, что он позволяет поставить вопрос о взаимосвязи между законом типа Тициуса—Боде и наличием орбитальных резонансов у планет и спутников, проявляющемся, как известно, в соизмеримости их средних движений. Из формулы (3) и третьего закона Кеплера следует, что для тех членов системы, номера которых отличаются на две единицы, имеет место соотношение:

$$\frac{\omega_{n+2}}{\omega_n}=q^3, \tag{5}$$

где $\omega$—среднее движение. В Солнечной системе у Венеры с Марсом и Урана с Плутоном наблюдается соизмеримость, близкая к 3,1:1; у Сатурна и Урана отношение средних движений заметно хуже согласуется с (5). У Юпитера и Сатурна оно сильно отличается от расчетного.

Сопоставление наших результатов с результатами Дермотта позволило выявить ряд общих закономерностей в расположении орбит небесномеханических систем, возможно, связанных с проблемой соизмеримостей. Оказалось, что первые члены обычно заметно отклоняются от прогрессии. Исключение составляет Миранда у Урана. Другая особенность состоит в том, что новые орбиты чередуются до и после гигантских членов. Кроме того, по крайней мере один из членов—гигантов уклоняется от прогрессии. В планетной системе это Юпитер, у Юпитера—Каллисто, а также Рея и Титания у Сатурна и Урана соответственно. Если сказанное имеет место в действительности, то, по-видимому, это свидетельствует об общности эволюционных путей планетной и спутниковых систем.

Хотелось бы также обратить внимание на то обстоятельство, что некоторые из вакантных орбит находятся в резонансе с орбитами гигантов системы. В зависимости от устойчивости резонансов эти орбиты могут быть либо населенными, либо нет.

Детальный анализ соизмеримостей в спутниковых системах был предпринят в работе [5], где обсуждается также связь этого явления с приливной эволюцией систем. Автор полагает, что приливные силы могли вызвать лишь малые изменения средних движений спутников. Другая точка зрения отводит приливным силам (и диссипативным вообще) значительную роль в эволюции Солнечной системы в целом [6]. Влияние этих сил на равновесное (невозмущенное) движение отдельного тела тем слабее, чем больше его масса. Поскольку под действием взаимных притяжений и иных сил тела непрерывно изменяют свои расстояния от центра системы, в разные эпохи ее эволюции степень соответствия этих растояний закону типа Тициуса—Боде будет меняться.

В данной работе мы придерживались той точки зрения, что закон типа Тициуса—Боде должен описывать распределение орбит не только больших планет, но также всевозможных устойчивых гелиоцентрических орбит планетообразных тел. Дальнейшие исследования покажут, насколько адекватно такое предположение, а также обязательно ли представление планетных расстояний в виде членов геометрической прогрессии. В настоящее время трудно сказать, можно ли приписать этому закону статус фундаментального. Несомненно то, что его значение и смысл могут быть раскрыты полностью лишь в рамках космогонической теории. В связи с этим необходимо искать эмпирические зависимости между знаменателями прогрессий и физическими параметрами систем. В качестве таковых можно было бы выбрать параметры пространственных распределений (массы, плотности и т. д.). К сожалению, этот выбор затруднен неполнотой имеющейся информации о спутниках больших планет.

В заключение приведем основные выводы настоящей работы.

1. Закон планетных расстояний формулируется как постоянство отношений разностей длин двух соседних орбит на диаметр большей из них.

2. Новый знаменатель прогрессии для Солнечной системы указывает на приближенную соизмеримость третьего порядка для тех членов, номера которых отличаются на две единицы.

3. Хотя бы один из членов-гигантов систем отклоняется от закона прогрессии.

4. Вакантные орбиты, как правило, появляются до и после членов-гигантов.

## Приложение

Приведем вывод формул для расчета оптимальных значений знаменателя $q$ и множителя $R_0$. Пусть $r_i$—истинные расстояния планет от Солнца, $i$—номер планеты. Аппроксимируем их значениями $R_i$, определяемыми по формуле общего члена прогрессии:

$$R_i = R_0 q^i. \tag{1}$$

Обозначим

$$\ln R = p; \quad \ln q = Q \tag{2}$$

Оптимальные значения величин $q$ и $R_0$ находятся путем минимизации функции

$$\Phi(p, Q) = \sum_{i=m}^{N+m-1} (\ln r_i - p - iQ)^2, \tag{3}$$

где $m \leqslant 0$, а $N$—общее число планет ($N=13$).

Эта задача сводится к решению системы двух уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Q} = 0. \tag{4}$$

После подстановки (3) в (4) и несложных преобразований получим:

$$R_0 = \exp\left[N\langle\ln r\rangle - F(m)\ln q\right], \tag{5}$$

$$q = \exp\left[\frac{N\langle\ln r\rangle F(m) - \sum\limits_{i=m}^{N+m-1} i \ln r_i}{F^2(m) - L(m)}\right], \tag{6}$$

где

$$F(m) = \sum_{i=m}^{N+m-1} i; \quad L(m) = \sum_{i=m}^{N+m-1} i^2; \quad N\langle\ln r\rangle = \sum_{i=m}^{N+m-1} \ln r_i.$$

При разных $m$, как показывают расчеты, получаем приближения с различной точностью. Оказывается, что минимальное среднеквадратичное отклонение отношения $R_n/R_{\text{ист}}$ от точной прогрессии, соответствующей $R_n/R_{\text{ист}} = 1$, имеет место при $m = -2$. В этом случае получаем $q = 1{,}458576$, а $R_0 = 0{,}994$ а. е.

*15 января 1984 г.*

Ռ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Գ. Ա. ՍԱՀՅԱՆ

## ՄՈԼՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕՐԵՆՔԻ ՄԱՍԻՆ

*Բերված է երկրաչափական պրոգրեսիայով $R_n = R_0 q^n$ նկարագրվող մոլորակների հեռավորությունների օրենքի նոր ձևակերպումը։ $q$, $R_0$ հաստատունների համար ստացված են 1.458567 և 0.994 ա.մ. համապատասխան արժեքները։ Պրոգրեսիան ցույց է տալիս, որ համակարգում գոյություն ունի երրորդ կարգի թույլ ռեզոնանս այն անդամների համար, որոնց համարները տարբերվում են երկու միավորով։*

R. A. VARDANIAN, G. A. SAHIAN

## ON THE PLANETARY DISTANCES LAW

A new formulation of the planetary distances law discribed by $R_n = R_o q^n$ geometrical progression is suggested. The values of constants $q$ and $R_o$ was finded to be equal to 1,458567 and 0.994 a. u. respectively. The progression shows to the presence of slight third order commensurability for planets numbers of which differ by two units.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Ньето*, Закон Тициуса—Боде. М., Мир, 1976.
2. *E. Badolati*. A. Supposed New Law for Planetary Distances, The Moon and the Planets, 26, 339, 1982.
3. *А. Рой*, Движение по орбитам. М., Мир, 1981.
4. *S. F. Dermott*, On the Origin of Commensurabilities. II. The Orbital Period Relation. Monthly. Not. Roy. Astron. Soc., 141, 363, 1968.
5. *S. F. Dermott*. On the Origin of Commensurabilities. I. The Tidal Hihpothesis Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 141, 349, 1968.
6. *Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов*, Резонансы и малые знаменатели в небесной механике, М., Наука, 1978.