ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ В ЗАДАЧАХ СЛОЖЕНИЯ СЛОЕВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СВОЙСТВ

PRINCIPLE OF INVARIANCE IN THE PROBLEMS OF THE ADDING OF LAYERS WITH ARBITRARY PROPERTIES

О. В. ПИКИЧЯН

Бюраканская астрофизическая обсерватория

Резюме. Доклад посвящен применениям «метода сложения слоев» к задачам многократного рассеяния. Выявлено принципиальное различие между методами сложения Стокса и Амбарцумяна,—если первый является методом «последовательных отражений», то второй—методом «функциональных зависимостей» основывающимся на принципе инвариантности. Методом Амбарцумяна, при помощи введения понятия сшивающей функции, строится общая процедура сложения. Последняя позволяет рассчитать внутреннее и внешнее поле в «составном» слое при произвольном выборе характеристик (толщина, первичные источники, элементарный акт рассеяния) составляющих слоев. При этом: а) информацию о внутренних полях исходных слоев можно использовать максимально, б) количество уравнений подлежащих к решению является минимальным, одновременно с требованием их наибольшей простоты, в) уравнения не зависят от первичных источников. Подход с равным успехом применим и к задачам с произвольно сложной геометрией. Все упрощения плоских задач тождественно достижимы и в этом сложном случае. Проиллюстрирована возможность дополнительного, существенного упрощения процедуры сложения путем использования «локальных» свойств задач—представлена разновидность метода удвоения позволяющая рассчитать внутреннее поле в однородном слое при произвольных источниках. Задача сводится к решению уравнений для функций зависящих лишь от одной угловой переменной и вовсе не зависящих от первичных источников. Показана эффективная численная реализуемость предложенной процедуры.

Abstract. In the present paper the „layers adding method" in the radiative transfer problems is studied. The principle difference between the Stokes' and Ambartsumian's adding methods is pointed out. The first is a method of „successive reflections" and the second—of „functional dependences" which is based on the principle of invariance. The general adding procedure is constructed for the calculation of the internal and external radiation fields in the „compound" slab, when the characteristics (optical depth, single scattering properites, primary energy sources) of the „composite" layers are arbitrary chosen, by using Ambartsumian's method and the idea of sew function. As a result a) the information about the internal fields of the initial layers can be used maximally, b) the number of the solving equations is the minimal with the requirement of its most simplicity, c) equations are independent of the primary energy sources. It is shown that this approach is identically applicable also for the transfer problems of the media with the arbitrary complicated curved geometries. All the plane problems' simplifications remained valid also in this case. The new version of doubling method is represented. It reduces the internal field transfer problem of the homogeneous layer with the arbitrary redistribution of primary sources to the equation solving procedure for the functions having only one angular argument and quite independent the energy sources. The efficient numerical realization of the procedure is also shown.

Введение. Задачи переноса (з. п.) излучения первоначально были сформулированы Шварцшильдом и Шустером и исследовались исключительно на основе интегро-дифференциального уравнения переноса. Поскольку оно является частным случаем кинетического уравнения, то этот подход часто называют *подходом Больцмана.*

В 1942 г. для исследования з. п. Амбарцумяном был предложен и использован новый, принципиально иной подход получивший название *принципа инвариантности* (п. и.). Методы теории переноса, основанные на применении п. и. можно условно разделить на две группы: в первой п. и. применяется в дифференциальной форме, т. е. включает результаты, полученные на основе малого варьирования различных характеристик (параметров) среды, таких как толщина слоя, оптическая глубина местоположения источника излучения или точки наблюдения, альбедо однократного рассеяния... и вытекающие из них следствия, а во второй—в интегральной форме, т. е. в виде «метода сложения слоев» (как конечных, так и бесконечных). Применениям п. и. именно в виде «метода сложения слоев» и будет посвящен наш доклад.

Метод сложения слоев по Стоксу и Амбарцумяну. В 1821 году Френелем [1] была рассмотрена задача об учете многократных отражений между находящимися в вакууме бесконечно тонкими плоскостями. Эквивалентные выражения для системы плоскостей были независимо получены также Нейманом в 1835г., Клаузиусом в 1848 г., Провостейом и Дисейнсом в 1850 г. (см., например, [2]).

Стоксом же в 1862 г. была рассмотрена (независимо от предшественников) более общая задача, когда между плоскостями вместо вакуума имеется среда с неким поглощением [3]. Сначала решалась задача одной пластины, ограниченной двумя одинаковыми плоскостями. Затем находились коэффициенты отражения r_{n+m} и пропускания q_{n+m} для стопки $n+m$ таких пластин, состоящей из двух „пачек“, содержащих n и m штук пластин, соответственно. При этом величины r_n, r_m и q_n, q_m, для „n“ и „m“ пачек считались известными. И, наконец, задача была доведена до конца с помощью оригинального квази-геометрического метода—r_n и q_n пачки n одинаковых пластин были выражены через r и q одной пластины.

Сущность метода Стокса проиллюстрируем на символическом примере—пусть имеются два слоя, отражающие и пропускающие свойства которых есть соответственно r_1, q_1 и r_2, q_2. Требуется нахождение соответствующих величин r_{1+2}, q_{1+2} суммарного слоя. Отраженное от суммарного слоя излучение складывается из лучей, которые: отразились только от верхнего слоя; прошли верхний слой, а затем или однажды, или дважды, или трижды, и т. д. отражаясь от нижнего и верхнего слоев, и наконец пройдя через верхний слой, вышли из среды. Суммируя подобным образом все слагаемые, соответствующие последовательным отражениям лучей между слоями, получим как r_{1+2}, так и q_{1+2}:

$$\begin{aligned} r_{1+2} &= r_1 + q_1 r_2 q_1 + q_1 r_2 (r_1 r_2) q_1 + \ldots = r_1 + q_1 r_2 \left[\sum_{l=0}^{\infty} (r_1 r_2)^l\right] q_1, \\ q_{1+2} &= q_2 q_1 + q_2 (r_1 r_2) q_1 + \ldots = q_2 \left[\sum_{l=0}^{\infty} (r_1 r_2)^l\right] q_1. \end{aligned} \tag{1}$$

В рассматриваемом примере ряд суммируется как обычная геометрическая прогрессия

$$\sum_{i=0}^{\infty}(r_1r_2)^i=(1-r_1r_2)^{-1}. \quad (2)$$

Формула (1) показывает, что данный метод сложения сводится к построению последовательности отдельных отражений между составляющими слоями, т. е. к последовательному учету каждого отдельного отражения от нижнего и верхнего слоев. Следовательно сущность метода сложения Стокса заключается в *разложении характеристик системы в ряд по кратности взаимодействия* между ее частями.

Начиная с 1938 года, при чтении курса теоретической астрофизики в Ленинградском университете, Амбарцумяном систематически использовалась (независимо от указанных выше авторов) другая разновидность «метода сложения слоев». Им рассматривались задачи о переносе излучения в мутных средах.

Приведем ход решения рассмотренного выше примера методом Амбарцумяна. Падающее на суммарный слой излучение (единичной мощности), вообще говоря, после многократных рассеяний, порождает на *границе раздела* слоев (сшивающая граница) некое *результирующее поле,* описываемое вверх и вниз идущими интенсивностями I^+_{1+2} и I^-_{1+2} соответственно. Искомые величины r_{1+2}, q_{1+2} могут быть явным образом выражены через эти, введенные Амбарцумяном, характеристики результирующего поля

$$r_{1+2}=r_1+q_1I^+_{1+2}, \quad q_{1+2}=q_2I^-_{1+2}. \quad (3)$$

Сами же вспомогательные величины $I^{\pm}_{1+2}$ могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{aligned} I^+_{1+2}&=r_2I^-_{1+2},\\ I^-_{1+2}&=q_1+r_1I^+_{1+2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Первая из формул (3) гласит—„отраженное от суммарного слоя излучение формируется из доли r_1 падающего на среду потока, которая отразилась только от верхнего слоя, и из пройденной через верхний слой доли q_1 вверх идущего результирующего потока I^+_{1+2}", а вторая—„пропущенное излучение q_{1+2} формируется из пройденной через нижний слой доли q_2, нисходящего на границе раздела слоев результирующего потока I^-_{1+2}". Повторение тех же рассуждений для I^+_{1+2} и I^-_{1+2} приводит к системе (4), из которой, очевидно, имеем

$$I^+_{1+2}=q_1r_2/(1-r_1r_2), \quad I^-_{1+2}=q_1/(1-r_1r_2). \quad (5)$$

Подстановка (5) в (3) и (2) в (1), естественно, приводит к одному и тому же результату

$$\begin{aligned} r_{1+2}&=r_1+q_1^2r_2/(1-r_1r_2),\\ q_{1+2}&=q_2q_1/(1-r_1r_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, несмотря на то, что подходы как Стокса, так и Амбарцумяна являются «методами сложения слоев», их сущности различаются принципиальным образом, ибо первый (как и его предшественники) основывается на идее представления искомых величин через известные посредством *разложения* их в *бесконечный ряд* по кратностям последовательных отражений, а второй—на идее установления непосредственных *функциональных связей между* искомыми и заданными величинами посредством использования характеристик *результирующего поля*—т. е. второй исходит из *принципа инвариантности.* Между тем до сих пор встречаются работы, авторы которых исходя лишь из факта, что в основе обоих методов лежит процедура сложения слоев, не входя в их сущность, эти два принципиально разных подхода ошибочно отождествляют.

Рассмотрев формулу (6) как систему функциональных уравнений Амбарцумян [5] далее использовал их для перехода от «слоистого» случая к «непрерывной» задаче одномерного однородного слоя (укажем также [4]).

Описанный метод (формулы (3)—(4)) был опубликован лишь в 1944 году [5] (см. также [6]) уже после выхода (в 1942—43 гг.) основополагающих работ по принципу инвариантности, в которых были рассмотрены более общие случаи—трехмерные задачи отражения и отражения-пропускания полубесконечного и конечного слоев при плоскопараллельной симметрии [7, 8]. Однако важность работы [5] заключается в том, что здесь впервые принцип инвариантности представлен в более общей—*интегральной форме,* как «метод сложения конечных слоев».

Позднее (в 1947 году) соотношения (3)—(4) были анализированы Чандрасекаром [9] в случае трехмерной плоскопараллельной среды и стали широко известны как «четыре принципа инвариантности Чандрасекара». При этом формулы (4) называют «первым и вторым», а (3)—«третьим и четвертым принципами», соответственно.

Общие особенности практических алгоритмов сложения. Дальнейшее развитие метода сложения целиком было связано исследованием соотношений типа (3)—(4). Большой вклад в эту область был внесен работами Редхеффера [10] (им в 1944—62 гг. была разработана «алгебра» для операторов отражения-пропускания), Беллмана [11], Ван де Хюлста [12],Прайзендорфера [13], их многочисленных учеников и последователей. Для анализа основных характерных черт всех имеющихся практических, «точных» (а не приближенных) алгоритмов сложения достаточно ограничиться рассмотрением лишь трех из них.

А. Процедура Гранта и Ханта [14] позволяет рассчитать поле излучения в плоских средах при *произвольном выборе* первичных источников и свойств элементарного акта рассеяния. Этим методом внутреннее поле в суммарном слое рассчитывается лишь *на границах между исходными слоями,* поэтому детальность поля в суммарном слое ограничена выбором толщин исходных слоев. В последних не задаются и не используются характеристики внутренних полей, а только операторы отражения-пропускания (при наличии источников также собственные излучательные способности).

Формулы сложения с учетом внутренней структуры полей излучения суммирующихся слоев на основе метода сложения слоев Амбарцумяна были получены в работах [15] (формулы (13)—(14)) для поверхностной функции Грина при сложении двух слоев), [16] (пп. 3, для объемной функции Грина), [17] (формула (1) , для поверхностной функции Грина при погружении одного слоя в другой).

Б. В работе [17] была построена процедура, которая позволяет, при освещении однородного слоя параллельными лучами, оставаясь в рамках метода удвоения Ван де Хюлста, рассчитать (наряду с функциями отражения-пропускания) также интенсивность *внутреннего* поля излучения. Деятельность поля на каждом этапе удвоения здесь определяется, вообще говоря, уже не толщиной «суммирующихся слоев» (точнее удваивающегося слоя), как это имело место в процедуре Гранта и Ханта, а «заданной» детальностью поля «суммирующихся слоев» (точнее удваивающегося слоя). Метод справедлив лишь для слоя *не содержащего* внутренних источников энергии.

В. Более общей является процедура предложенная в статье [18], позволяющая использовать как заданные внутренние поля исходных слоев, так и учитывать неоднородность этих слоев и наличие произвольных внутренних источников энергии. Однако в этом *универсальном методе* уравнения типа (4) *надо решать дважды*—на каждом этапе сложения очередного слоя (в рамках известной процедуры сложения слоев Ван де Хюлста) и при определении интенсивности на границах между составляющими слоями внутри окончательно сконструированного слоя. Причем так как все эти *уравнения зависят от первичных источников*, то при каждом их новом выборе уравнения должны быть решены заново.

Все известные алгоритмы сложения сталкиваются с необходимостью решения систем типа (4). Для этого сначала система дискретизируется по угловым (и энергетическим) переменным. Затем, в одних случаях (например, в [14], [19]) исходят из формального представления решения в виде

$$I^{+}_{1+2}=\hat{A}^{-1}r_2q_1, \qquad \hat{A}=[1-r_1r_2], \tag{7}$$

после чего построение обратной матрицы $\hat{A}^{-1}$ производится или точно, с помощью обычного аппарата линейной алгебры, или же приближенно—посредством использования разложения типа (2) в виде

$$\hat{A}^{-1}=\sum_{i=1}^{N}a_i, \quad a_i=a_0a_{i-1}, \quad a_0=r_1r_2; \tag{8}$$

В иных же случаях (например, [18]) уравнения (4) решают «в лоб», или непосредственно как систему линейных алгебраических уравнений, или же—путем итераций.

Естественно, что точное построение обратной матрицы $\hat{A}^{-1}$ целесообразно лишь для матриц небольшого порядка. Построение же $\hat{A}^{-1}$ путем (2) и (8) физически означает возвращение от метода функциональных зависимостей (метод Амбарцумяна) к методу последовательных отражений (метод Стокса). Решение же системы (4) «в лоб» неудобно тем, что процедура решения уравнений зависит от первичных источников и при каждом их новом выборе должна быть произведена заново.

Таким образом, разбор имеющихся методов показывает целесообразность построения процедуры сложения, которая была бы в состоянии рассчитать интенсивность внутреннего (и внешнего) поля излучения в суммарном слое при произвольных предположениях относительно: оптических толщин, свойств элементарного акта рассеяния и первичных источников исходных слоев, при этом позволяя:

1) максимально использовать *всю информацию* о структуре внутренних полей излучения исходных слоев;
2) обходиться решением *минимального* количества по возможности более простых уравнений;
3) ограничиваться лишь уравнениями, *не зависящими* от выбора первичных источников энергии.

Сшивающая функция. В рассмотренном символическом примере п. и. был применен уже дважды—при получении формул (3) и (4). Однако, применение п. и. дает возможность, наряду с системой (4), непосредственно получить также явные выражения для $I^{\pm}_{1+2}$

Введем новую вспомогательную величину—сшивающую функцию, представляющую собой диагональную функцию Грина з. п. суммарного слоя на сшивающей границе двух составляющих слоев. В нашем примере она представляется идущими вверх и вниз интенсивностями S_{1+2} и T_{1+2} результирующего поля, на сшивающей границе, порожденного освещением этой же границы (а не внешней) пучком параллельных лучей сверху. Тогда вместо (4) будем иметь

$$I^{+}_{1+2}=S_{1+2}\,q_1,$$
$$I^{-}_{1+2}=q_1+T_{1+2}q_1. \qquad (9)$$

Для определения же S_{1+2}, T_{1+2} опять повторяя рассуждения Амбарцумяна, непосредственно получим

$$S_{1+2}=r_2+r_2T_{1+2}, \qquad (10)$$
$$T_{1+2}=r_1S_{1+2}.$$

Определение из уравнений вместо $I^{\pm}_{1+2}$ величин S_{1+2}, T_{1+2} оправдано тем, что последние являются универсальными характеристиками суммарного слоя и вовсе не зависят от источников энергии, в то время как $I^{\pm}_{1+2}$ меняются при каждом их новом выборе (в нашем примере источником являются параллельные лучи, освещающие суммарный слой извне).

Таким образом, введение сшивающей функции позволяет удовлетворить требованию 3) предыдущего раздела. Сшивающая функция впервые была введена в [16] (формулы (26) и (27)) для выражения объемной функции Грина через частные значения—поверхностную функцию Грина и диагональную функцию Грина, а в работах [20—23] с ее помощью были исследованы некоторые прямые и обратные з. п. в средах как с плоской, так и с произвольной геометрией.

Внутреннее поле. Усложним рассмотренный символический пример. Отыскивается интенсивность $I_{1+2}(\tau, M)$ на некоторой глубине τ суммарного слоя „$1+2$" (толщины $\tau_1+\tau_2$) в точке $M\{\vec{\Omega}, E, t\}$ фазового пространства направлений, энергий и времен, когда заданы все соответствующие характеристики суммирующихся слоев „1" и „2" (толщины τ_1 и τ_2 соответственно). При этом, как источники $Q_1(\tau, M)$, $Q_2(\tau, M)$, так и свойства элементарного акта рассеяния $\lambda_1(\tau)$, $x_1(\tau, M'\to M)$ и $\lambda_2(\tau)$, $x_2(\tau, M'\to M)$ в слоях „1" и „2" соответственно, являются произвольными („штрихами" здесь и ниже обозначены характеристики начального состояния).

Рассуждая аналогично Амбарцумяну в этом случае получим (в операторных обозначениях)

$$I_{1+2}(\tau)=I_1(\tau)+\tilde{G}_1(\tau\leftarrow\tau_1)I^{+}_{1+2}(\tau_1), \quad \tau\in[0, \tau_1),$$
$$I_{1+2}(\tau_1+\tau)=I_2(\tau)+G_2(\tau\leftarrow 0)I^{-}_{1+2}(\tau_1), \quad \tau\in(0, \tau_2]. \qquad (11)$$

Индексы показывают принадлежность данной величины к соответствующему слою; функция Грина $G(\tau\leftarrow\tau')\equiv I$ при $Q=\delta(M-M')\delta(\tau-\tau')$, а знак „$\sim$" означает, что в данной операторной величине исходное излучение имеет восходящее (положительное) направление, например $\tilde{G}_1 = \tilde{r}_1$ при $\tau=\tau_1$, $\vec{n}'\vec{\Omega}'>0$, $\vec{n}\vec{\Omega}<0$, где $\tilde{r}_1$—оператор диффузного отражения при освещении слоя „1" снизу; $\vec{n}$—нормаль в сторону убывания τ.

Интенсивности на сшивающей границе находятся из выражения

$$I^{\pm}_{1+2}(\tau_1) = \begin{Bmatrix} I_2^{+}(0) \\ I_1^{-}(\tau_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S \\ T \end{Bmatrix} I_1^{-}(\tau_1) + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{S} \end{Bmatrix} I_2^{+}(0), \tag{12}$$

где сшивающие коэффициенты яркости S, T и $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ введены посредством $G\equiv S$ и $G\equiv T-\delta(M-M')/|\vec{n}\vec{\Omega}|$ при $\vec{n}'\vec{\Omega}'<0$, а $\vec{n}\vec{\Omega}>0$ и $\vec{n}\vec{\Omega}<0$ соответственно, при этом $\tau'\equiv\tau\equiv\tau_1$. Аналогично обозначены также $\tilde{G}\to\tilde{S}, \tilde{T}$. при $\vec{n}'\vec{\Omega}'>0$, $\vec{n}\vec{\Omega}<0$ и $\vec{n}\vec{\Omega}>0$ соответственно.

Сшивающая функция находится, например, с помощью уравнения

$$T=K+TK, \qquad K\equiv\tilde{r}_1 r_2. \tag{13}$$

и явных выражений

$$S=r_2+r_2T, \quad \tilde{S}=\tilde{r}_1+T\tilde{r}_1, \quad \tilde{T}=S\tilde{r}_1 \tag{14}$$

Поверхностные функции Грина $\tilde{G}_{1+2}(\tau\leftarrow\tau_1)$ и $G_{1+2}(\tau\leftarrow 0)$ определяются из тех же соотношений (11) при $Q\equiv\delta(\tau_1+\tau_2-\tau)\delta(M-M')$ и $Q\equiv\delta(\tau)\delta(M-M')$ соответственно.

Приведенная процедура сложения, очевидно, уже удовлетворяет всем трем требованиям 1), 2), 3), сформулированным выше.

Обобщенная задача Стокса. По примеру задачи о сложении «пачек пластин» можно сформулировать следующую «обобщенную задачу Стокса».

Имеются две „пачки" с толщинами $\tau_N=\sum\limits_{k=1}^{N}\tau_k$ и $\tau_M=\sum\limits_{k=N+1}^{N+M}\tau_k$ содержащие N и M плоских, вообще говоря неодинаковых слоев соответственно. Каждая из этих $N+M$ слоев имеет произвольные характеристики—оптическую толщину $T_k=\tau_k-\tau_{k-1}$, первичные источники $Q_k(\tau, M)$, характеристики элементарного акта $\lambda_k(\tau)$, $x_k(\tau, M'\to M)$. Задана интенсивность (внутренняя и выходящая) поля излучения в пачках „N"$\to I_{\tau_N}$ и „M"$\to I_{\tau_M}$, требуется нахождение интенсивности $I_{\tau_N+\tau_M}$ поля в суммарной пачке „$N+M$" (толщины $\tau_N+\tau_M\equiv\sum\limits_{k=1}^{N+M}T_k$).

Решение этой задачи дается формулами, рассмотренного выше символического примера при постановке $\tau_1=\tau_N$ и $\tau_2=\tau_M$.

Приведенная в рассмотренном примере процедура сложения и сформулированная на ее основе задача позволяют вычислить поле излучения в произвольном слое толщины T, путем мысленного представления его в виде «пачки» из N слоев $T=\sum\limits_{k=1}^{N}T_k$. При этом исходные слои $\{T_k\}$ могут быть взяты и конечными и бесконечными, как толстыми для которых справедливы асимптотики, так и тонкими, в которых действуют приближения небольшого числа рассеяний. В случае слоистых сред, каждый отдельный однородный слой можно рассчитать по схеме удвоения (см. ниже), являющейся частным случаем данной схемы, или же любым другим способом, после чего их можно «сшивать» по вышеприведенным формулам.

Однако сам алгоритм вычислений на основе приведенных формул допускает множество вариантов (попарное сложение всех исходны слоев и повторение процедуры с полученными; реккурентное наращи вание путем одиночного сложения каждого следующего слоя и т. д.) Здесь мы не будем заниматься анализом их оптимального выбора. О большей частью обусловлен требованиями конкретной ситуации имеющимися резервами памяти и времени на ЭВМ. Укажем лишь, чт иной раз бывает выгодным после определения интенсивностей на кон тактных границах τ_k окончательно сконструированного слоя, интен сивность внутри каждого из слоев T_k рассчитать, вместо простых фор мул «двуслойного сложения» (11), из чуть более сложной формуль «погружения»

$$I_T(\tau_k+\tau)=I_{T_k}(\tau)+\tilde{G}_{T_k}(\tau\leftarrow\tau_k)I_T^+(\tau_k)+G_{T_k}(\tau\leftarrow0)I_T^-(\tau_{k-1}), \qquad (15$$

где $\tau\in(\tau_k-\tau_{k-1}\equiv T_k)$, $T\equiv\sum\limits_{k=1}^{N} T_k$.

Задачи с произвольной геометрией. З. п. в средах с произвольно геометрией из-за их большой математической сложности являются во обще малоизученными. Замечателен факт, что п. и. с равным успехом применим также к этому кругу задач. Более того, все достижения мето дов сложения, о которых шла речь выше, тождественно остаются спра ведливыми и здесь [20, 21]. И в этом общем случае вышеупомянуты требования 1), 2), 3) удовлетворяются полностью.

Использование локальных свойств з. п.. Универсальность процеду ры сложения относительно выбора свойств элементарного акта рассея ния, первичных источников и геометрии задачи обусловлена тем, что п. и., примененный в интегральной форме, оперирует макропроцессом, используя при этом лишь «глобальные» свойства процесса переноса. Это те свойства, которые обусловлены только многократностью рас сеяния и не зависят от таких «локальных» факторов, какими являются характеристики среды и единичный акт взаимодействия переносимого агента со средой. Но после упрощения з. п. с помощью глобальных свойств процесса можно упростить их еще дальше, исходя уже из воз можностей конкретной ситуации, которые представляются «локальны ми» свойствами—геометрией задачи, свойствами первичных источников и элементарного акта рассеяния, играющими роль «частных или упро щающих предположений».

Например, если в «обобщенной задаче Стокса» предположить однородность среды (локальное свойство), то принимая толщины сум мирующихся слоев одинаковыми, придем к методу удвоения, который, как хорошо известно, позволяет на каждом следующем шаге сложения удваивать толщину слоя рассчитанного на предыдущем шаге. В итоге, подходящим выбором толщины исходного слоя, очень быстро и эконо мично достигается произвольная, наперед заданная толщина оконча тельного слоя.

Формулы (11) при $\tau_1=\tau_2\equiv\tau_0$ принимают вид

$$I_{2\tau_0}^{Q}(\tau)=I_{\tau_0}^{Q_1}(\tau)+\tilde{G}_{\tau_0}(\tau\leftarrow\tau_0)I_{2\tau_0}^{Q,+}(\tau_0),$$

$$I_{2\tau_0}^{Q}(\tau_0+\tau)=I_{\tau_0}^{Q_2}(\tau)+G_{\tau_0}(\tau\leftarrow0)I_{2\tau_0}^{Q,-}(\tau_0). \qquad (16)$$

Величины $I_{2\tau_0}^{Q,\pm}$ находятсРиспятья из (12) при замене $I_2^+\equiv I_{\tau_0}^{Q_2,+}$, $I_1^-\equiv I_{\tau_0}^{Q_1,-}$ и учете локального свойства $S=\tilde{S}$, $T=\tilde{T}$; а функции S и T— из (13) и (14) с учетом также $\tilde{r}_1=r_1$. Подчеркнем, что здесь $I_B^{A,\pm}$ означает интенсивность в слое толщины „B" при источниках „A", слои $(0, \tau_0)$ и $(\tau_0, 2\tau_0)$ заполнены источниками Q_1 и Q_2 соответственно, а $Q = h_{(0,\tau_0)} Q_1(\tau, M) + h_{(\tau_0, 2\tau_0)} Q_2(\tau, M)$, где $h_{(a,b)} = 0$ при $\tau \notin (a, b)$ и $h_{(a,b)} = 1$ при $\tau \in (a, b)$.

Учет же другого локального свойства—точного разделения угловых переменных приводит к дополнительному еще большему упрощению решения, позволяя из уравнений рассчитать функции меньшего количества переменных. Действительно, с помощью алгебраического выражения объемной функции Грина [16] (формула (31)) и определения сшивающей функции, сшивающие коэффициенты яркости зависящие от двух угловых переменных (например, при изотропном рассеянии) могут быть вместо (13)—(14) выражены через функции одной угловой переменной

$$\left.\begin{matrix} S(\mu, \mu') \\ T(\mu, \mu') \end{matrix}\right\} = \frac{\lambda}{4} \frac{S_{2\tau_0}(\mu') \pm S_{2\tau_0}(\mu)}{\mu' \pm \mu} \pm \frac{\lambda}{4} \frac{U_{2\tau_0}(+\mu') U_{2\tau_0}(\pm\mu) - U_{2\tau_0}(\mp\mu) U_{2\tau_0}(-\mu')}{\mu' \pm \mu}. \tag{17}$$

Вспомогательные функции $S_{2\tau_0}(\mu)$, $U_{2\tau_0}(\pm\mu)$ сшивающих коэффициентов яркости определяются из уравнений

$$S_{2\tau_0}(\mu) = 1 + 2\mu \int_0^1 \rho_{\tau_0}(\mu, \mu') S_{2\tau_0}(\mu') d\mu', \tag{18}$$

$$\begin{cases} U_{2\tau_0}(+\mu) = \psi(\mu)/\mu + 2\mu \int_0^1 \rho_{\tau_0}(\mu, \mu') U_{2\tau_0}(-\mu') d\mu', \\ U_{2\tau_0}(-\mu) = 2\mu \int_0^1 \rho_{\tau_0}(\mu, \mu') U_{2\tau_0}(+\mu') d\mu'. \end{cases} \tag{19}$$

Здесь вспомогательные функции Амбарцумяна φ и ψ определяются из явных выражений

$$\varphi_{2\tau_0}(\mu) = \varphi_{\tau_0}(\mu) + \mu U_{2\tau_0}(-\mu) e^{-\tau_0/\mu} + 2\mu \int_0^1 \sigma_{\tau_0}(\mu, \mu') U_{2\tau_0}(-\mu') \mu' d\mu',$$

$$\psi_{2\tau_0}(\mu) = \mu U_{2\tau_0}(+\mu) e^{-\tau_0/\mu} + 2\mu \int_0^1 \sigma_{\tau_0}(\mu, \mu') U_{2\tau_0}(+\mu') \mu' d\mu', \tag{20}$$

а $\rho_{\tau_0}(\mu, \mu')$, $\sigma_{\tau_0}(\mu, \mu')$ обычные коэффициенты яркости „половинного" слоя.

Переходя в выражении (13), в частности, к изотропно излучающему плоскому источнику, нетрудно найти аналогичные соотношениям (20) явные выражения для функций $G_{2\tau_0}(\tau \leftarrow \tau', \mu) = \int_{-1}^{+1} G_{2\tau_0}(\tau, \mu \leftarrow \tau', \mu') d\mu$, $U_{2\tau_0}(\tau, \mu) = \int_0^1 G_{2\tau_0}(0, \mu' \leftarrow \tau, \mu) d\mu'$ знание которых уже достаточно для определения функции Грина $G_{2\tau_0}(\tau, \mu \leftarrow \tau', \mu')$ из алгебраического выражения (см. [16, 20, 23]).

Приведенная разновидность метода удвоения выгодно отличается от известных тем, что позволяет рассчитать интенсивности *внутреннего* и *внешнего* поля излучения при *произвольных* источниках энергии при этом уравнения решаются для велечин зависящих лишь от *одной угловой переменной* и *вовсе не зависящих от первичных источников.*

На рис. 1 и 2 представлены полярные диаграммы углового распределения интенсивности в середине слоя (полярный угол отсчитывается от верхней части вертикальной оси по часовому ходу (0°, 360°) при наличии плоского изотропного источника на границе (рис. 1) и в середине (рис. 2.) слоя, и его эволюцию в зависимости от толщины слоя.

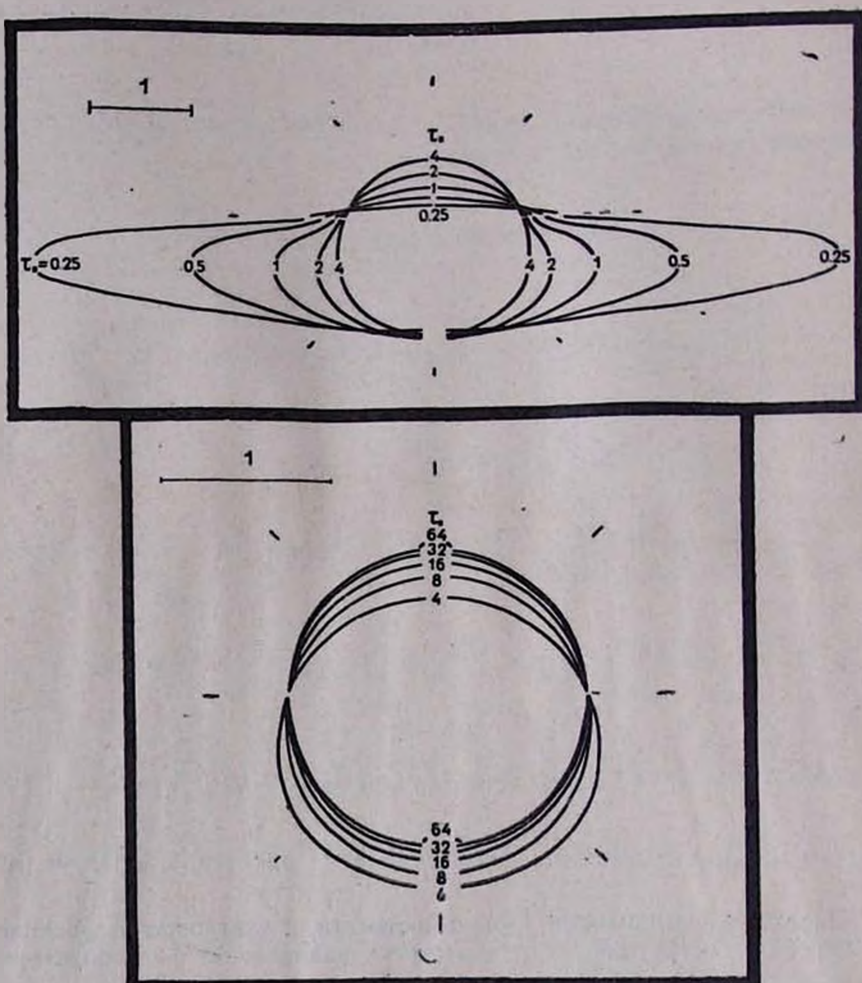
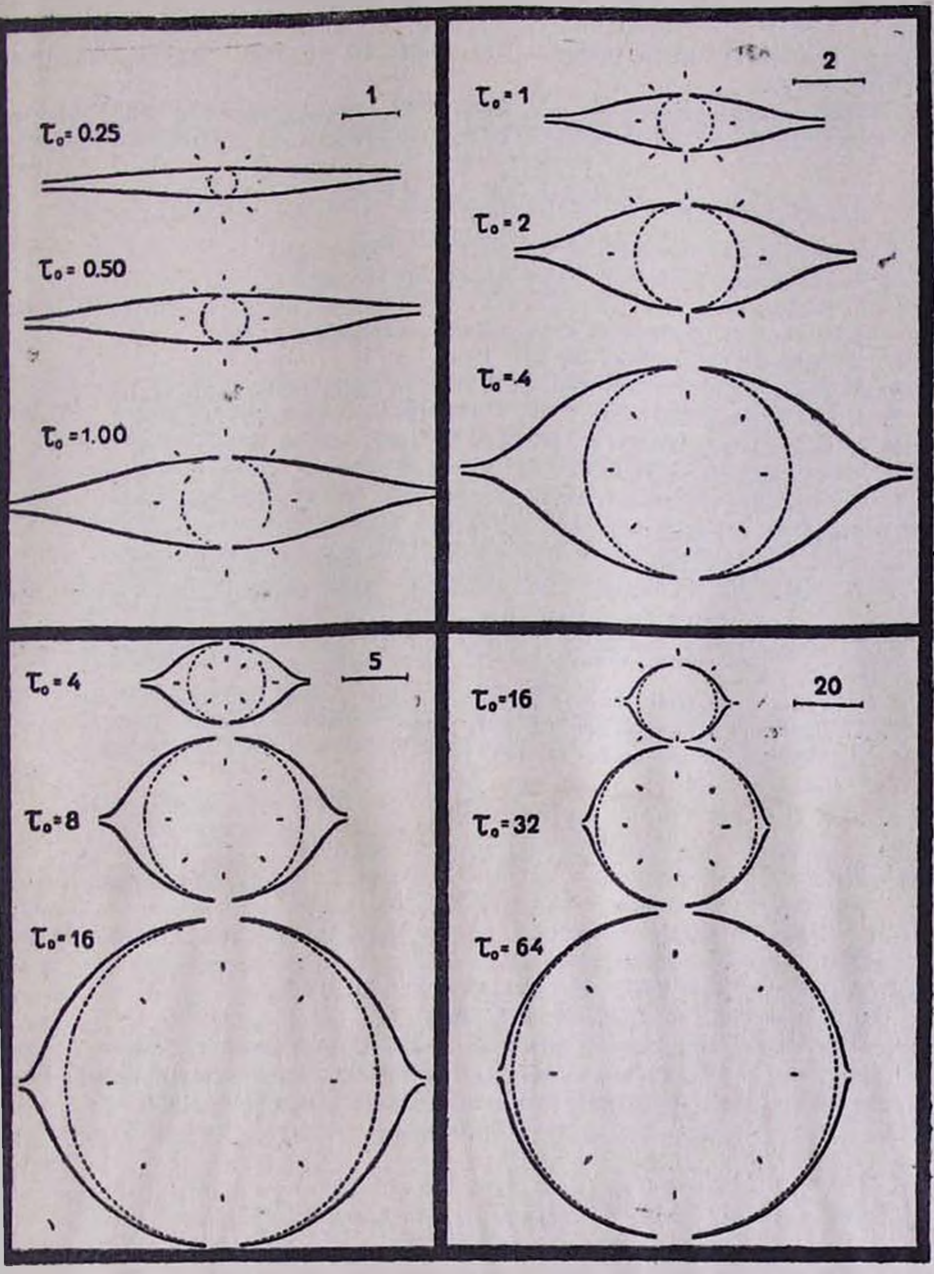


Рис. 1



1
τ_0= 0.25
τ_0= 0.50
τ_0 =1.00
2
τ_0 = 1
τ_0 = 2
τ_0 = 4
5
τ_0 = 4
τ_0 = 8
τ_0 = 16
20
τ_0 = 16
τ_0 = 32
τ_0 = 64

Рис. 2

На каждом квадрате рис. 2 масштаб меняется (задан на правом верхнем углу). При этом в каждом следующем квадрате для наглядности повторена последняя диаграмма предыдущего квадрата в новом (уменьшенном) масштабе. Вычисление функций $S_{2\tau_0}(\mu)$, $U_{2\tau_0}(\pm\mu)$, $\varphi_{2\tau_0}(\mu)$, $\psi_{2\tau_0}(\mu)$ на ЭВМ ЕС—1010 для слоев с толщинами от $\tau_0=2^{-20}$ до $2\tau_0=64$ с точностью пяти цифр после запятой длится менее полторы (<1.5) минут.

Автор признателен М. О. Закаряну за составление программы и совместное проведение вычислений по приведенному выше алгоритму.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. J. Fresnel*, Oevres Complètes, v. 10, Paris, 1866, p. 640.
2. *L. B. Tuckerman*, J. Optical Soc. America, 37, 818, 1947.
3. *G. G. Stokes*, Proc. Roy. Soc., 11, 545, 1862=Mathem. and Phys. Papers of Sir G. Stokes, vol. 4, Cambridge, Univ. Press, London, 1904, p. 145.
4. *H. W. Schmidt*, Ann. Phys., 23, 671, 1907.
5. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН Арм. ССР, естеств. науки, № 1—2, 31, 1944.
6. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, 7, 199, 1947.
7. *В. А. Амбарцумян*, Астрон. ж., 19, № 5, 30, 1942.
8. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
9. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, Изд. ин. лит., Москва, 1953.
10. *R. Redheffer*, J. Math. and Phys. 41, № 1, 1, 1962.
11. *R. Bellman, R. Kalaba, G. M. Wing*, J. Math. Phys (N.Y.), 1, 280, 1960.
12. *H. C. Van de Hulst*, Multiple Light Scattering: Tables, Formulas, and Applications, vol. 1, 2, Academic Press, New York, 1980.
13. *R. W. Preisendorfer*, Radiative Transfer on Discrete Spaces, Pergamon Press, Oxford, 1965.
14. *I. P. Grant, G. E. Hunt*, Proc. Roy. Soc. London A., 313, 183, 1969.
15. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 12, 579, 1976.
16. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 14, 169, 1978.
17. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 56, 833, 1979.
18. *T. Viik*, Astrophys. Sp. Sci., 86, 169, 1982.
19. *J. E. Hansen, L. D. Travis*, Sp. Sci. Rev., 16 527, 1974.
20. *О. В. Пикичян*, Принцип инвариантности и задачи переноса с физическими и геометрическими характеристиками произвольной сложности (доклад на симпозиуме «Принцип инвариантности и его приложения», Бюракан, 26—30 октября, 1981), Ереван, 1985, в печати.
21. *О. В. Пикичян*, ДАН СССР, 262, 860, 1982; 263, 601, 1982.
22. *О. В. Пикичян*, ДАН СССР, 273, 861, 1983.
23. *О. В. Пикичян*, Исследование некоторых общих свойств полей излучения в плоскопараллельных средах на основе применения принципа инвариантности, Бюраканская астрофизическая обсерватория, Ереван, диссертация, 1983.