О. В. ПИКИЧЯН

СВЕЧЕНИЕ СРЕДЫ, ОСВЕЩЕННОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛУЧАМИ, ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКОНЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ЧАСТОТАМ

1. Введение

Задача свечения среды при освещении параллельными лучами является одной из классических задач теоретической астрофизики. Решение этой задачи, полученное применением принципа инвариантности Амбарцумяна, в случае монохроматического изотропного рассеяния в полубесконечной плоско-параллельной среде имеет вид [1, 2]

$$\rho(\zeta, \eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \frac{\varphi(\eta) \cdot \varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \tag{A}$$

где $\rho(\zeta, \eta)$—функция диффузного отражения в вероятностном представлении, $\arccos\zeta$ и $\arccos\eta$, соответственно, углы падения и отражения, λ—вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния, $\varphi(\eta)$—известная функция Амбарцумяна, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\eta + \mu} d\mu. \tag{Б}$$

Результат (А, Б) позволяет: а) определить отражательную способность среды без вычисления величин, характеризующих световой режим внутри среды, б) выразить искомую функцию многих переменных через функцию, зависящую от меньшего количества аргументов.

В дальнейшем эта задача была обобщена Соболевым на случай полностью некогерентного рассеяния [3]. При рассмотрении же общего случая некогерентного рассеяния с произвольным законом перераспределения излучения по частотам задача сильно усложняется. Поэтому при решении этой задачи было использовано представление функции перераспределения в виде билинейного разложения по некоторой системе ортонормированных функций [4].

В настоящей заметке мы покажем, что физика задачи допускает обобщение (А, Б) на случай некогерентного рассеяния с произвольным законом перераспределения по частотам без какого-либо разложения или специфического представления функции перераспределения. При этом оба вышеуказанные преимущества а) и б) сохраняются. Ключом этого обобщения является введение понятия вероятности выхода *излученного* кванта и применение принципа обратимости оптических явлений.

Для большей наглядности будем исходить из вероятностной трактовки явлений переноса, предложенной Соболевым в [5].

2. Вероятность выхода излученного кванта

В астрофизике представляет особенный интерес интенсивность выходящего из среды излучения. При наличии в среде произвольных первичных источников энергии, мощность которых характеризуется величиной $Q(\tau, x)$, выходящую интенсивность можно находить, следуя Соболеву, из выражения (см. [6], гл. VIII, §4):

$$I(0, x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} L(\tau, x')P(\tau, x', x, \eta)\frac{d\tau}{\eta} + \int_0^{\infty} Q(\tau, x)e^{-\frac{\alpha(x)}{\eta}\tau}\frac{d\tau}{\eta}, \tag{1}$$

где

$$L(\tau, x) = \alpha(x)\int_0^{\infty} E_1(|\tau - t|\cdot\alpha(x))Q(t, x)dt, \tag{2}$$

$P(\tau, x', x, \eta)dxd\eta$—вероятность того, что квант безразмерной частоты x', поглощенный на глубине τ полубесконечной плоскопараллельной среды в процессе диффузии выйдет из среды в частотном интервале $[x, x+dx]$, в направлении η, в телесном угле $2\pi d\eta$. Из соотношения (2) видно, что при определении выходящего излучения посредством вероятности выхода поглощенного кванта, нужно определить функцию $L(\tau, x)$, т. е. необходимо предварительно интегрировать мощность источников $Q(\tau, x)$ по всем глубинам. Если же вместо P ввести аналогичную вероятность $G_0(\tau, x', x, \eta)$ для кванта первоначально уже *излученного* (изотропно) на глубине τ, то необходимость определения $L(\tau, x)$ отпадает

$$I(0, x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} Q(\tau, x',)G_0(\tau, x', x, \eta)\frac{d\tau}{\eta} \tag{3}$$

(следует отметить, что введенная величина $G_0(\tau, x', x, \eta)$ является нулевым моментом по углу поверхностной функции Грина [11, 12] $G_0 = \int_0^1 G(0, \tau; x', \zeta, \tau, \eta)d\zeta$). Очевидно, что

$$P(\tau, x_1, x_2, \eta) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x)G_0(\tau, x, x_2, \eta)dx, \tag{4}$$

где $g(x_1, x)dx$—представляет собой вероятность того, что поглощенный квант частоты x_1 будет переизлучен в интервале частот $[x, x+dx]$. Подставляя формулу (2) в выражение (1) и сравнивая с (3), можно выразить также функцию G_0 через P

$$G_0(\tau, x_1, x_2, \eta) = \delta(x_1 - x_2) e^{\frac{-\alpha(x_1)}{\eta}\tau} + \alpha(x_1) \int\limits_0^{\infty} E_1(|\tau - t|\alpha(x_1)) P(t, x_1, x_2, \eta) dt. \tag{4a}$$

Это выражение следует также непооредственно из физических соображений, если исходить из вероятностного смысла функций G_0, P и ядра E_1. С учетом формулы (4) выражение (4a) превращается в интегральное уравнение для G_0, которое приведено ниже (смотри формулу (14)) из физических соображений. В случае когерентного рассеяния (при этом $g(x, x') = \delta(x - x')$) из (4) имеем:

$$P(\tau, x_1, x_2, \eta) = \frac{\lambda}{2} G_0(\tau, x_1, x_2, \eta).$$

Отсюда видно, что величины P и G_0 совпадают с точностью до множителя $\frac{\lambda}{2}$, поэтому отпадает необходимость использования формулы (2), т.е. интегрирования величины Q по оптической глубине и использование величин P или G_0 в формуле (3) в равной мере оправдано. В общем же случае некогерентного рассеяния различие между величинами G_0 и P существенно (смотри формулу (4)), поэтому целесообразно использовать именно вероятность выхода первоначально излученного кванта. Отметим также, что $(1/\eta) G_0(\tau, x_1, x_2, \eta)$ представляет собой интенсивность выходящего излучения, если в среде на глубине τ имеется плоский изотропный монохроматический источник единичной мощности. Для функции G_0 с помощью принципа инвариантности можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial G_0(\tau, x, x_2, \eta)}{\partial \tau} = -\frac{\alpha(x_2)}{\eta} G_0(\tau, x, x_2, \eta) + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'', x_2, \eta) dx'' \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') \Phi(\tau, x, x') dx'. \tag{5}$$

В уравнении (5) $\alpha(x)$—профиль коэффициента поглощения, $r(x', x'') = \alpha(x') g(x', x'')$, а также обозначено:

$$\varphi(x', x, \eta) = G_0(0, x', x, \eta) \tag{6}$$

$$\Phi(\tau, x, x') = \int\limits_0^1 G_0(\tau, x, x', \mu) \frac{d\mu}{\mu}. \tag{7}$$

Для определения $\Phi(\tau, x, x')$ из (5) и (7) нетрудно получить уравнение

$$\Phi(\tau, x_1, x_2) = K(\tau, x_1, x_2) + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx'' \int\limits_0^{\tau} K(\tau - t, x'', x_2) \Phi(t, x_1, x') dt, \tag{8}$$

где

$$K(\tau, x_1, x_2) = \int_0^1 \varphi(x_1, x_2, \mu) e^{\frac{-\alpha(x_2)}{\mu}\tau} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{9}$$

В случае же слоя конечной оптической толщины τ_0, для соответствующей величины $G_0(\tau, \tau_0, x_1, x_2, \eta)$ из принципа инвариантности вытекают уже два дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial G_0}{\partial \tau} + \frac{\partial G_0}{\partial \tau_0} = -\frac{\alpha(x_2)}{\eta} G_0 +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0) r(x', x'') dx' dx'' \int_0^1 G_0(\tau, \tau_0, x_1, x', \mu) \frac{d\mu}{\mu}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial G_0}{\partial \tau_0} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x'', x_2, \eta; \tau_0) r(x', x'') dx' dx'' \int_0^1 G_0(\tau_0 - \tau, \tau_0, x_1, x', \mu) \frac{d\mu}{\mu}, \tag{11}$$

где

$$\varphi(x_1, x_2, \eta; \tau_0) = G_0(0, \tau_0, x_1, x_2, \eta), \tag{12}$$

$$\psi(x_1, x_2, \eta; \tau_0) = G_0(\tau_0, \tau_0, x_1, x_2, \eta). \tag{13}$$

Для решения основной задачи нам помимо дифференциальных уравнений для G_0 понадобятся также соотношения взаимности, к выводу которых мы и переходим.

3. Соотношения взаимности

Функция G_0 удовлетворяет некоторому соотношению взаимности, которое выражает „принцип обратимости“ для этой величины. Рассмотрим „оптически обратную“ к $G_0(\tau, x_1, x_2, \eta) dx_2 d\eta$ функцию $\bar{G}_0(\tau, x_1, x_2, \eta) dx_1 d\tau$, представляющую собой вероятность того, что падающий на границу среды квант с частотой x_2 под углом $\arccos \eta$ к нормали, вообще говоря после рассеяний, будет поглощен на глубине между τ и $\tau + d\tau$ с частотой, заключенной между x_1 и $x_1 + dx_1$. Величины G_0 и $\bar{G}_0$, очевидно, удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$G_0(\tau, x_1, x_2, \eta) = e^{\frac{-\alpha(x_2)}{\eta}\tau} \delta(x_1 - x_2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \alpha(x)_1 \int_0^{\infty} E_1(|t-\tau| \cdot \alpha(x_1)) dt \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, x', x_2, \eta) g(x_1, x') dx', \tag{14}$$

$$\bar{G}_0(\tau, x_1, x_2, \eta) = \frac{\alpha(x_2)}{\eta} e^{\frac{-\alpha(x_2)}{\eta}\tau} \delta(x_1 - x_2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \alpha(x_1) \int_0^{\infty} E_1(|t-\tau| \cdot \alpha(x_1)) dt \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_0(t, x', x_2, \eta) g(x', x_1) dx'. \tag{15}$$

Учитывая частотную симметрию элементарного акта рассеяния $\alpha(x_1)\, g\,(x_1,\ x_2)=\alpha(x_2) g(x_2,\ x_1)$, затем имея в виду, что интересующие нас решения уравнений (14 — 15) должны быть ограничены при $\tau\to\infty$, и сравнивая уравнения между собой, приходим к искомому соотношению взаимности

$$\eta\bar{G}_0(\tau,\ x_1,\ x_2,\ \eta)=\alpha(x_1) G_0(\tau,\ x_1,\ x_2,\ \eta). \tag{16}$$

Пусть на границу полубесконечной плоскопараллельной среды падает квант безразмерной частоты x_1, под углом $\arccos\zeta$ к нормали. Вероятность того, что этот квант диффузно отразится от среды с частотой, заключенной между x_2 и x_2+dx_2 в направлении $\arccos\eta$, внутри телесного угла $2\pi d\eta$ можно выразить посредством величин G_0 и $\bar{G}_0$ соотношениями:

$$\rho(x_1, \zeta, x_2\, \eta)=\frac{\lambda}{2\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x_1, x) dx \int\limits_{0}^{\infty} e^{\frac{-\alpha(x_1)}{\zeta}\tau} G_0(\tau, x, x_2, \eta) d\tau, \tag{17}$$

$$\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x, x_2) dx \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha(x_2)}{\eta}\tau}\, \bar{G}_0(\tau, x, x_1, \zeta) d\tau. \tag{18}$$

Сравнивая между собой (17—18) и учитывая (16), получаем соотношение „обратимости" для функции отражения в виде

$$\zeta\rho(x_1,\ \zeta,\ x_2,\ \eta)=\eta\rho(x_2,\ \eta,\ x_1,\ \zeta). \tag{19}$$

Аналогично доказывается „обратимость" и для функций диффузного отражения $\rho(x_1,\ \zeta,\ x_2,\ \eta;\ \tau_0)$ и пропускания $\sigma(x_1,\ \zeta,\ x_2,\ \eta;\ \tau_0)$ слоя конечной оптической толщины.

4. Диффузное отражение от полубесконечной среды

Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{\partial G_0(\tau,\ x,\ x_2, \eta)}{\partial\tau}=-\ \frac{\alpha(x_2)}{\eta}\, G_0(\tau, x, x_2, \eta)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x'', x_2, \eta) dx''\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx'\int\limits_{0}^{1} G_0(\tau, x, x', \mu)\frac{d\mu}{\mu}. \tag{20}$$

Из соотношений (20) и (17) легко можно получить

$$\left[\frac{\alpha(x_1)}{\zeta}+\frac{\alpha(x_2)}{\eta}\right]\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta)=\frac{\lambda}{2\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x_1, x)\varphi(x, x_2, \eta) dx+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x'', x_2, \eta) dx''\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx'\int\limits_{0}^{1}\rho(x_1, \zeta, x', \mu)\frac{d\mu}{\mu}. \tag{21}$$

Из физических соображений очевидно, что

$$\varphi(x', x_2, \zeta) = \delta(x' - x_1) + \int_0^1 \rho(x', \mu, x_1, \zeta)\, d\mu. \tag{22}$$

Учитывая соотношение взаимности (19) приходим к выражению:

$$\varphi(x', x_1, \zeta) = \delta(x' - x_1) + \zeta \int_0^1 \rho(x_1, \zeta, x', \mu)\, \frac{d\mu}{\mu}. \tag{23}$$

Далее, подставляя (23) в (21) окончательно получаем (см. также [9])

$$\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta) = \frac{\lambda}{2\zeta}\, \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', x_1, \zeta) r(x', x'') \varphi(x'', x_2, \eta)\, dx'\, dx''}{\dfrac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \dfrac{\alpha(x_2)}{\eta}}. \tag{24}$$

Из (24) и (22) находим для определения φ функциональное уравнение

$$\varphi(x_1, x_2, \eta) = \delta(x_1 - x_2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'', x_2, \eta)\, dx'' \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')\, dx' \int\limits_0^1 \frac{\varphi(x', x_1, \zeta)}{\dfrac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \dfrac{\alpha(x_2)}{\eta}}\, \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{25}$$

Формулы (24) и (25) являются искомыми, они обобщают результаты (А, Б) Амбарцумяна на случай произвольного закона перераспределения излучения по частотам.

Следует отметить, что знание функции φ позволяет из (8) определить резольвентную функцию $\Phi(\tau, x, x')$, после чего находится $G_0(\tau, x_1, x_2, \eta)$ из (5), которая позволяет определить выходящую интенсивность при произвольных первичных источниках энергии, зависящих от глубины и частоты. Нетрудно убедиться, что аналогично монохроматическому рассеянию, функция $\varphi(x_1, x_2, \eta)$ может выражаться непосредственно через резольвентную функцию

$$\varphi(x_1, x_2, \eta) = \delta(x_1 - x_2) + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x_2, x)\, dx \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha(x_2)}{\eta} t}\, \Phi(t, x, x_1)\, dt.$$

Интересно заметить, что из уравнения (25) вытекает соотношение для нулевого момента φ-функции: $\varphi_0(x_1, x_2) = \int_0^1 \varphi(x_1, x_2, \eta)\, d\eta$

$$\frac{1}{2}\Big[\alpha(x_1)\varphi_0(x_1, x_2) + \alpha(x_2)\varphi_0(x_2, x_1)\Big] = \alpha(x_1)\delta(x_1 - x_2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x', x_1) r(x', x'') \varphi_0(x'', x_2)\, dx'\, dx'',$$

которое является аналогом известного соотношения $\varphi_0 = 1 + \frac{\lambda}{4}\varphi_0^2$.

5. Диффузное отражение и диффузное пропускание излучения слоем конечной оптической толщины

Аналогично случаю полубесконечной среды, с использованием формул (10—13), можно решить и задачу диффузного отражения и диффузного пропускания для слоя конечной толщины. При этом получаются: задача Коши для ρ, σ, φ, ψ

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau_0} + \left[\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}\right]\rho = \frac{\lambda}{2\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\, r(x', x'')\,\varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0)\,dx'dx'',$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau_0} = \frac{\lambda}{2\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\, r(x', x'')\,\psi(x'', x_2, \eta; \tau_0)\,dx'dx'',$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau_0} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}\sigma = \frac{\lambda}{2\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\, r(x', x'')\,\varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0)\,dx'dx'',$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau_0} + \frac{\alpha(x_1)}{\zeta}\sigma = \frac{\lambda}{2\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\, r(x', x'')\,\psi(x'', x_2, \eta; \tau_0)\,dx'dx'',$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_0} = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')\,\psi(x'', x_2, \eta; \tau_0)\,dx'dx''\int\limits_{0}^{1}\psi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau_0} = -\frac{\alpha(x_2)}{\eta}\psi + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')\,\varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0)\,dx'dx''\int\limits_{0}^{1}\psi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

с начальными условиями $\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta; 0) = \sigma(x_1, \zeta, x_2\ \eta; 0) = 0$, $\varphi(x_1, x_2, \eta; 0) = \psi(x_1, x_2, \eta; 0) = \delta(x_1 - x_2)$, явные выражения

$$\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta; \tau_0) = \frac{\lambda}{2\zeta}\,\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')[\varphi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0) - \psi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\psi(x'', x_2, \eta; \tau_0)]\,dx'dx''}{\alpha(x_1)/\zeta + \alpha(x_2)/\eta} \tag{I}$$

$$\sigma(x_1, \zeta, x_2, \eta; \tau_0) = \frac{\lambda}{2\zeta}\,\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')[\varphi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\psi(x'', x_2, \eta; \tau_0) - \psi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0)]\,dx'dx''}{\alpha(x_1)/\zeta - \alpha(x_2)/\eta}$$

$$\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta; \tau_0) = \frac{\lambda}{2\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')\,dx'dx''\int\limits_{0}^{\tau_0}\psi(x', x_1, \zeta; \tau)\,\psi(x'', x_2, \eta; \tau)\,d\tau,$$

$$\sigma(x_1, \zeta, x_2, \eta; \tau_0) = \tag{II}$$

$$= \frac{\lambda}{2\zeta} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')dx'dx'' \int\limits_0^{\tau_0} e^{-\frac{\alpha(x_1)}{\zeta}(\tau_0-\tau)} \varphi(x', x_1, \zeta; \tau)\psi(x'', x_2, \eta; \tau)d\tau;$$

$$\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta; \tau_0) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\zeta} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x'x'')dx'dx'' \int\limits_0^{\tau_0} e^{-\left[\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}\right](\tau_0-\tau)} \varphi(x', x_1, \zeta; \tau)\varphi(x'', x_2, \eta; \tau)d\tau,$$

$$\sigma(x_1, \zeta, x_2, \tau_0) = \tag{III}$$

$$= \frac{\lambda}{2\zeta} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')dx'dx'' \int\limits_0^{\tau_0} e^{-\frac{\alpha(x_2)}{\eta}(\tau_0-\tau)} \psi(x', x_1, \zeta; \tau)\varphi(x'', x_2, \eta; \tau)d\tau$$

и функциональные уравнения

$$\varphi(x_1, x_2, \eta; \tau_0) = \delta(x_1-x_2) + \frac{\lambda}{2} \times$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')[\varphi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0) - \psi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\psi(x'', x_2, \eta; \tau_0)]dx'dx''}{\alpha(x_1)/\zeta + \alpha(x_2)/\eta} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$\psi(x_1, x_2, \eta; \tau_0) = \delta(x_1-x_2)e^{-\frac{\alpha(x_2)}{\eta}\tau_0} + \frac{\lambda}{2} \times \tag{Ia}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')[\varphi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\psi(x'', x_2, \eta; \tau_0) - \varphi(x', x_1, \zeta; \tau_0)\varphi(x'', x_2, \eta; \tau_0)]dx'dx''}{\alpha(x_1)/\zeta - \alpha(x_2)/\eta} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$\varphi(x_1, x_2, \eta; \tau_0) = \delta(x_1-x_2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')dx'dx'' \int\limits_0^{\tau_0} \psi(x'', x_2, \eta, \tau)d\tau \int\limits_0^1 \psi(x', x_1, \zeta; \tau)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$\psi(x_1, x_2, \eta; \tau_0) = \delta(x_1-x_2)e^{-\frac{\alpha(x_2)}{\eta}\tau_0} + \tag{IIa}$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x'x'')dx'dx'' \int\limits_0^{\tau_0} \psi(x'', x_2, \eta; \tau)d\tau \int\limits_0^1 e^{-\frac{\alpha(x_1)}{\zeta}(\tau_0-\tau)} \varphi(x', x_1, \zeta; \tau)\frac{d\zeta}{\zeta};$$

$$\varphi(x_1, x_2, \eta; \tau_0) = \delta(x_1-x_2) + \tag{IIIa}$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')dx'dx'' \int\limits_0^{\tau_0} \varphi(x'', x_2, \eta; \tau)d\tau \int\limits_0^1 e^{-\left[\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}\right](\tau_0-\tau)} \varphi(x', x_1, \zeta; \tau)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$\psi(x_1, x_2, \eta; \tau_0)=\delta(x_1-x_2)e^{-\frac{\alpha(x_2)}{\eta}\tau_0}+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x',x'')dx'dx''\int\limits_0^{\tau_0} e^{-\frac{\alpha(x_2)}{\eta}(\tau_0-\tau)}\varphi(x'',x_2,\eta;\tau)d\tau\int\limits_0^1 \psi(x',x_1,\zeta;\tau)\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{IIIa}$$

а для нулевых моментов $\varphi_0(x_1, x_2)=\int\limits_0^1 \varphi(x_1, x_2, \eta; \tau_0)d\eta$ и $\psi_0(x_1, x_2)=$ $=\int\limits_0^1 \psi(x_1, x_2, \eta; \tau_0)d\eta$ уравнения

$$\frac{1}{2}[\alpha(x_1)\varphi_0(x_1, x_2)+\alpha(x_2)\varphi_0(x_2, x_1)]=\alpha(x_1)\delta(x_1-x_2)+$$
$$+\frac{\lambda}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x', x'')[\varphi_0(x', x_1)\varphi_0(x'', x_2)-\psi_0(x', x_1)\psi_0(x'', x_2)]dx'dx'',$$

$$\alpha(x_1)\psi_0(x_1, x_2)-\alpha(x_2)\psi_0(x_2, x_1)=$$
$$=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x',x'')[\varphi_0(x',x_1)\psi_0(x'',x_2)-\psi_0(x',x_1)\varphi_0(x'', x_2)]dx'dx'',$$

причем первое из них является аналогом известного соотношения $\varphi_0 = 1 + \frac{\lambda}{4}(\varphi_0^2-\psi_0^2)$.

Формулы (I,Ia) и (II,IIa) в случае монохроматического рассеяния $-r(x_1, x_2) = \alpha(x_1)\delta(x_1-x_2)$ впервые были получены В. А. Амбарцумяном [2], (см. также [6]), а соотношения (III и IIIa)— В. В. Соболевым [7]. Затем были обобщены В. В. Ивановым [8] на случай полного перераспределения по частотам—$r(x_1, x_2)=A\alpha(x_1)\alpha(x_2)$ Очевидно, что из приведенных выше формул легко могут быть получены указанные частные случаи, а если перейти в них к разложению $r(x_1,x_2)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\alpha_k(x_1)\alpha_k(x_1)$, нетрудно получить соответственно результаты работы [4] (см. также [10]).

Автор искренне признателен В. А. Амбарцумяну за проявленный интерес к работе, Г. Т. Тер-Казаряну за ценные замечания, а также Э. Х. Даниеляну и А. Г. Никогосяну за обсуждение результатов.

14 апреля 1978 г.,
переработана 27 мая 1979 г.

Հ. Վ. ՊԻԿԻՉՅԱՆ

ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐՈՎ ԼՈՒՍԱՎՈՐՎԱԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԼՈՒՍԱՐՁԱԿՈՒՄԸ ԸՍՏ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՎԵՐԱԲԱՇԽՄԱՆ ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Զուգահեռ ճառագայթների ազդեցության տակ միջավայրի լուսարձակ-

ման խնդրին վերաբերող հայտնի առնչությունները, որոնք ստացված էին Վ. Հ. Համբարձումյանի կողմից մոնոխրոմատիկ ցրման դեպքում, անմիջականորեն ընդհանրացվում են ոչ կոհերենտ ցրման դեպքի համար ըստ հաճախականությունների վերաբաշխման կամայական $r(x_1, x_2)$ օրենքի դեպքում։ Ըստ որում չի օգտագործվում վերաբաշխման ֆունկցիայի որևէ հատուկ ներկայացում կամ տրոհում։ Դա հաջողվում է իրականացնել ճառագայթված քվանտի համար միջավայրից դուրս գալու հավանականության գաղափար մտցնելու և օպտիկական երևույթների շրջելիության սկզբունքն օգտագործելու շնորհիվ։ Միաժամանակ ստացված են նաև բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս հաշվել միջավայրից դուրս եկող ճառագայթման ինտենսիվությունը միջավայրում էներգիայի սկզբնական աղբյուրների առկայության դեպքում, որոնց հզորությունը կարող է կախված լինել և՛ խորությունից, և՛ հաճախականությունից։

H. V. PIKIDJIAN

THE ILLUMINATION OF A MEDIUM UNDER THE ACTION OF PARALLEL RAYS AT THE ARBITRARY LAW OF FREQUENCY REDISTRIBUTION OF RADIATION

Summary

The well-known results of Ambartzumyan, referring to the problem of diffuse reflection and transmission, are directly generalized for the case of non-coherent scattering with the arbitrary law $r(x_1, x_2)$ of frequency redistribution of radiation. Neither decomposition nor special assumption of redistribution function is used in this generalization. It is achieved by means of introducing the concept of exit probability of *ejected* quantum as well as by using the principle of reversibility of the optical phenomena. In passing, relations, allowing to determine the external radiation field at arbitrary initial energy sources the radiation power of which depends upon the optical depth and frequency, have been also obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, АЖ, 19, 30, 1942.
2. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
3. *В. В. Соболев*, АЖ, 26, 129, 1949.
4. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 213, 1972.
5. *В. В. Соболев*, АЖ, 28, 355, 1951.
6. *В. В. Соболев*, Перенос энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
7. *В. В. Соболев*, АЖ, 34, 336, 1957.
8. *В. В. Иванов*, АЖ, 40, 257, 1963.
9. *О. В. Пикичян*, ДАН Арм. ССР, 67, 151, 1978.
10. *А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян*, ДАН СССР, 229, 583, 1976.
11. *Э. Х. Даниелян, О. В. Пикичян*, Астрофизика, 13, 275, 1977.
12. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 14, 169, 1978.