

Г. А. АРУТЮНЯН

ПРОСТОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ $r_{III}(x', x, \gamma)$

1. Введение

Как известно, вычисление функции перераспределения $r_{III}(x', x, \gamma)$ (здесь и далее мы будем следовать обозначениям, принятым Хаммером в [1]) представляет собой довольно трудоемкую задачу. Указанная функция описывает элементарный процесс перераспределения по частотам и направлениям, когда наряду с доплеровским уширением линии учитывается также затухание вследствие излучения и столкновений, причем предполагается, что столкновения происходят настолько часто, что в системе отсчета, связанной с атомом, имеет место полное перераспределение по частотам. В настоящее время мы располагаем рядом работ, касающихся методов облегченного вычисления закона перераспределения $r_{III}(x', x, \gamma)$, среди которых следует отметить работы Рейчела и Вардаваса [2], а также Маньяна [3].

Способ построения $r_{III}(x', x, \gamma)$, предложенный в первой из них, основан на непосредственном вычислении двойного интеграла с помощью квадратурных формул. В работе [3] функция перераспределения разлагается в ряд по некоторой системе функций. Там же разработан метод построения этих функций.

Несколько иным способом подобное разложение получено А. Г. Никогосяном в работе [4]. Это разложение существенным образом облегчает дальнейшие вычисления и позволяет обобщить предложенный ранее в [5—7] метод решения задач об образовании спектральных линий на рассматриваемый нами случай перераспределения по частотам.

В настоящей работе мы укажем на относительно простой путь построения $r_{III}(x', x, \gamma)$, основанный на предложенном в [4] билинейном разложении функции перераспределения, а также получим некоторые асимптотические формулы, которые могут быть использованы для практических целей.

2. Функции перераспределения $r_I(x', x, \gamma)$ и $r_{III}(x', x, \gamma)$

Выражения функции перераспределения по частотам и направлениям для различных механизмов уширения спектральной линии были рассмотрены и подробно изучены в работе Хаммера [1]. Для чисто доплеровского рассеяния закон перераспределения дается выражением

$$r_I(x', x, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sin \gamma} \exp\left(-\frac{x'^2 + x^2 - 2x'x \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}\right), \quad (1)$$

где x' и x — безразмерные частоты соответственно поглощенного и переизлученного квантов и γ — угол рассеяния.

Если же помимо доплеровского механизма учитывается также пе-

пераспределение, обусловленное затуханием вследствие излучения и столкновений, то имеем

$$r_{\text{III}}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma \operatorname{cosec} \gamma}{\pi^{3/2} U(0, \sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2} U(x \operatorname{cosec} \gamma - u \operatorname{ctg} \gamma, \sigma \operatorname{cosec} \gamma)}{(x' - u)^2 + \sigma^2} du. \quad (2)$$

Здесь $\sigma = (\Delta\nu_E + \Delta\nu_c)/\Delta\nu_D$, где $\Delta\nu_D$ и $\Delta\nu_E$ суть доплеровская и естественная полуширины линии, а $\Delta\nu_c$ — полуширина линии, обусловленная столкновениями:

$$U(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{(x - u)^2 + \sigma^2} \quad (3)$$

— функция Фойгта.

Как показано в [4], функцию $r_{\text{III}}(x', x, \gamma)$ можно представить в следующем виде:

$$r_{\text{III}}(x', x, \gamma) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \gamma \alpha_k(x', \sigma) \alpha_k(x, \sigma), \quad (4)$$

где

$$\alpha_k(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_k(u) du}{(x - u)^2 + \sigma^2}, \quad (5)$$

$$\alpha_k(x) = (2^k \pi^{1/2} k!)^{-1/2} H_k(x) a(x) \quad (6)$$

суть собственные функции ядра $\zeta_1(x', x, \gamma) = r_1(x', x, \gamma)/a(x)$; $H_k(x)$ — полиномы Эрмита и $a(x) = \exp(-x^2)$ — контур доплеровского коэффициента поглощения.

В случае, когда важным является выявление лишь частотной зависимости, ограничиваются рассмотрением закона перераспределения, усредненного по углам

$$r(x', x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi r(x', x, \gamma) \sin \gamma d\gamma.$$

Для усредненных по направлениям функций перераспределения, соответствующих (1) и (2), будем иметь

$$r_1(x', x) = \int_{|x|}^{\infty} e^{-u^2} du$$

и

$$r_{\text{III}}(x', x) = \frac{1}{\pi^2 U(0, \sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(x', u) f(x, u) du, \quad (7)$$

где $|x| = \max(|x'|, |x|)$ и $f(x, u) = \arctg \frac{x+u}{\sigma} - \arctg \frac{x-u}{\sigma}$.

Нетрудно также убедиться, что $r_{III}(x', x)$ может быть представлено в форме, аналогичной (4)

$$r_{III}(x', x) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x_{2k}(x', \sigma) \alpha_{2k}(x, \sigma), \quad (8)$$

где $A_k = 1/(2k+1)$. Разложение (8) впервые было получено Хаммером (см. [1]) непосредственно из формулы (7).

Далее, из (3), (5) и (6) вытекает, что $x_0(x, \sigma) = \pi^{1/4} U(x, \sigma)$. Поэтому, если в суммах (4) и (8) ограничиться лишь первым членом, приходим к случаю полного перераспределения по частотам

$$r_{III}(x', x, \gamma) = r_{III}(x', x) = \frac{U(x', \sigma) U(x, \sigma)}{\sqrt{\pi} U(0, \sigma)}. \quad (9)$$

Устремляя σ к нулю, имеем $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \alpha_k(x, \sigma) = \alpha_k(x)$. Тогда разложения (4) и (8) будут описывать случай чисто доплеровского перераспределения.

Функции $x_k(x, \sigma)$, как известно, допускают следующее интегральное представление:

$$x_k(x, \sigma) = (2^k \pi^{1/2} k!)^{-1/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re}(-2i)^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t^2 - 2\sigma t + 2ixt} dt. \quad (10)$$

Мальяном в [3] были получены рекуррентные формулы для вычисления $x_k(x, \sigma)$. Однако при вычислениях по этим формулам предполагается знание вспомогательной системы функций

$$\beta_k(x, \sigma) = (2^k \pi^{1/2} k!)^{-1/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im}(-2i)^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t^2 - 2\sigma t + 2ixt} dt. \quad (11)$$

Надо отметить, что функции $\beta_k(x, \sigma)$ также допускают представление, аналогичное (5):

$$\beta_k(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_k(u) du}{(x-u)^2 + \sigma^2},$$

где $\beta_k(x) = (2^k \pi^{1/2} k!)^{-1/2} N_k(x)$, а $N_k(x)$ известны как функции Эрмита второго рода (см., напр., [8]).

Не останавливаясь на деталях, заметим лишь, что при таком подходе необходимо заранее протабулировать функции $\alpha_0(x, \sigma)$ и $\beta_0(x, \sigma)$, построение которых является предметом отдельной задачи.

Мы будем строить функции $\alpha_k(x, \sigma)$, придерживаясь другого, более простого, по нашему мнению, метода, предложенного Хаммером в [1] для усредненного по углам закона $r_{III}(x', x)$ и не требующего построения вспомогательных функций $\beta_k(x, \sigma)$. Указанный подход, к тому же, предоставляет возможность изучения асимптотического поведения функции перераспределения.

В формуле (10) разложим экспоненту $e^{-2\sigma t}$ в степенной ряд. Тогда получим

$$a_k(x, \sigma) = (2^{k+1/2} k!)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\sigma)^{2m}}{(2m)!} \left[M_{k+2m}(x) - (-1)^k \frac{\sigma}{2m+1} N_{k+2m+1}(x) \right], \quad (12)$$

где введены следующие обозначения:

$$M_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re}(-2t)^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t^2+2ixt} dt \quad (13)$$

и

$$N_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im}(-2t)^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t^2+2ixt} dt. \quad (14)$$

Из (13) и (14) можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$M_{k+1}(x) = 2xM_k(x) - 2kM_{k-1}(x), \quad (15)$$

$$N_{k+1}(x) = 2xN_k(x) - 2kN_{k-1}(x). \quad (16)$$

Первые четыре функции $M_k(x)$ и $N_k(x)$ имеют вид

$$M_0(x) = \exp(-x^2), \quad M_1(x) = 2xM_0(x),$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F(x), \quad N_1(x) = 2xN_0(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

где

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sin 2xt dt = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \quad (17)$$

— функция Дайсона, являющаяся решением следующей задачи Коши:

$$F'(x) = 1 - 2xF(x) \quad (18)$$

с начальным условием $F(0)=0$. Вопрос о вычислении функции $F(x)$ обсуждается, например, в работе Хаммера [9]. Ссылки по вопросу построения функции Дайсона можно найти также в [1].

3. Зависимость функции перераспределения от x

Учитывая асимптотическое поведение функции Дайсона

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n! x^{2n+1}}, \quad (19)$$

нетрудно получить, что

$$N_k(x) \approx \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi} x^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+k)!}{2^{2n} n! x^{2n}}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (20)$$

Что же касается функций $M_k(x)$, то они задаются простым выражением $M_k(x) = H_k(x) \exp(-x^2)$ и для больших x ими можно пренебречь. Тогда получаем

$$z_k(x, \sigma) \approx \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} x^{k+2}} (2^k \pi^{1/2} k!)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+k+1)!}{x^{2n}} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m \sigma^{2m}}{2^{2(n-m)} (2m+1)! (n-m)!}, \quad (21)$$

которое при $k=0$ переходит в известное (см. [10], [11]) асимптотическое выражение для функции Фойгта:

$$\pi^{-1/4} U(x, \sigma) = z_0(x, \sigma) \approx \frac{\sigma}{\pi^{3/4} x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{x^{2n}} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m \sigma^{2m}}{2^{2(n-m)} (2m+1)! (n-m)!}. \quad (22)$$

Для больших x (21) является довольно хорошим приближением. Следует заметить, что с ростом x функции $z_k(x, \sigma)$ ($k \neq 0$) убывают быстрее, чем $z_0(x, \sigma)$, и с большой точностью можно пренебречь остальными членами в суммах (4) и (8). Тогда, как уже было сказано выше, приходим к случаю полного перераспределения по частотам. Если же под знаком суммирования по n в (22) ограничиваться лишь первым членом, то есть, если принять, что при $|x| \rightarrow \infty$, $z_0(x, \sigma) \approx \pi^{-3/4} \sigma / x^2$, то получим

$$r_{III}(x', x, \gamma) = r_{III}(x', x) \approx \frac{\pi^{-3/2}}{U(0, \sigma)} \frac{\sigma^2}{x'^2 \cdot x^2}. \quad (23)$$

С другой стороны, легко видеть, что для малых σ и при значениях x , меньших некоторого x_k , в сумме (12) можно ограничиться первым слагаемым. Тогда $z_k(x, \sigma) \approx z_k(x)$ и в интервале частот $[-\underline{x}, \underline{x}]$ ($\underline{x} = \min\{|x_k|\}$) имеет место следующее приближенное равенство:

$$r_{III}(x', x, \gamma) \approx r_I(x', x, \gamma). \quad (24)$$

Таким образом, из (23) и (24) следует, что процесс рассеяния излучения, представляемый функцией $r_{III}(x', x, \gamma)$, в зависимости от σ и γ , может быть достаточно хорошо описан в центральных частотах линии доплеровским перераспределением по частотам и направлениям, а в далеких крыльях — полным перераспределением при лоренцовском профиле.

4. Зависимость функции перераспределения от угла рассеяния γ и параметра σ

В зависимости от значения угла рассеяния функция перераспределения $r_{III}(x', x, \gamma)$ изменяется в очень больших пределах. С точки зрения вычислений, наиболее простым является тот случай, когда переизлученный квант рассеивается под прямым углом к первоначальному направлению. При этом, как известно, отсутствует корреляция между частотами поглощенного и излученного квантов, и мы приходим к формуле (9). Тогда функция перераспределения $r_{III}(x', x, \gamma)$ (как и $r_I(x', x, \gamma)$) независимо от частоты поглощенного кванта x' имеет единственный максимум на частоте $x=0$, что следует из выражения (9) и обусловлено поведением контура поглощения.

Если же $\gamma \neq \pi/2$, в разложении (4) суммируются все слагаемые и возникает частичная когерентность. Функция $r_I(x', x, \gamma)$, как это нетрудно видеть непосредственно из формулы (1), при фиксированном значении x' имеет максимум на частоте

$$x = x' \cos \gamma. \quad (25)$$

Но для частот $x' \in [-\underline{x}, \underline{x}]$ выполняется равенство (24) и, следова-

тельно, в этом интервале $r_{III}(x', x, \gamma)$ также имеет максимумы на частотах, которые определяются выражением (25). В случае же, когда $x' \in [-x, x]$, максимум функции перераспределения $r_{III}(x', x, \gamma)$ с ростом $|x'|$ перемещается в центр линии, поскольку в этом случае справедливы соотношения (9) и (23).

Для значений γ , близких к нулю, начинает сказываться то обстоятельство, что рассматриваемые нами функции перераспределения $r_I(x', x, \gamma)$ и $r_{III}(x', x, \gamma)$ описывают элементарные акты рассеяния, принципиально отличающиеся друг от друга уже в системе отсчета, связанной с атомом. Из (1) легко видеть, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} r_I(x', x, \gamma) = a(x') \delta(x' - x). \quad (26)$$

Заметим, что (26) справедливо лишь потому, что в системе атома имеет место когерентное рассеяние.

Действительно, если ν_0 — центральная частота линии, v — скорость теплового движения атома в системе отсчета наблюдателя, $\Delta\nu$ и $\Delta\xi$ — смещения частоты кванта после переизлучения соответственно в системах отсчета наблюдателя и атома, то нетрудно видеть (ср., напр., с [1]), что

$$\Delta\nu = \Delta\xi + 2 \frac{\nu_0}{c} \vec{n} \vec{v} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (27)$$

где $\vec{n}$ — некоторый единичный вектор, связанный с направлениями поглощенного и переизлученного квантов.

Из (27) видно, что при $\gamma = 0$ когерентность в лабораторной системе может быть наблюдаема только тогда, когда $\Delta\xi = 0$, т. е., если в системе атома происходит когерентное рассеяние. Но если в системе атома имеет место полное перераспределение по частотам и, вообще говоря, $\Delta\xi \neq 0$, что характерно для закона перераспределения $r_{III}(x', x, \gamma)$, то когерентность не может быть наблюдаема.

Чтобы получить значение функции перераспределения $r_{III}(x', x, \gamma)$ при $\gamma = 0$, заметим, что она допускает следующее представление:

$$r_{III}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(x' - u)^2 + \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_I(u, t, \gamma)}{(x - t)^2 + \sigma^2} dt, \quad (28)$$

которое получено в работе [4]. Устремляя в (28) γ к нулю и учитывая (26), получим

$$r_{III}(x', x, 0) = \frac{\sigma^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(u) du}{[(x - u)^2 + \sigma^2][(x' - u)^2 + \sigma^2]}. \quad (29)$$

Как легко видеть, правая часть соотношения (29) лишь при $\sigma = 0$ выражается через δ -функцию.

Нетрудно также убедиться, что с ростом параметра σ интервал $[-x, x]$ уменьшается, и при $\sigma \rightarrow \infty$ мы приходим к полному перераспределению при лоренцовском профиле поглощения.

5. Численные результаты

В качестве иллюстрации мы здесь приведем некоторые результа-

ты вычислений, выполненных с помощью формул (4) и (8). Для наглядности приведены графики функций перераспределения в различных приближениях, т. е., когда бесконечная сумма заменяется соответствующей конечной суммой.

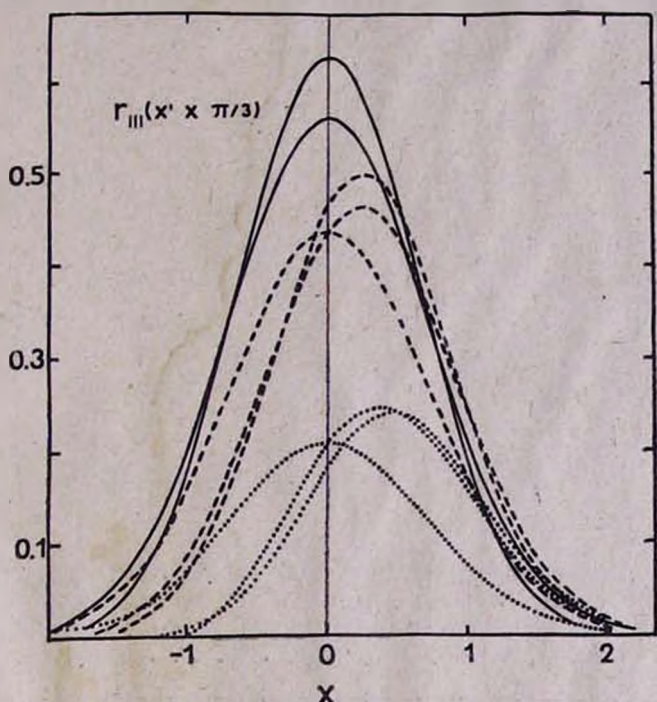


Рис. 1. Функция перераспределения $\Gamma_{III}(x', x, \pi/3)$ в I, II и IV приближениях, при $\sigma=10^{-2}$.
 — $x'=0$, — — — $x'=0,5$; $x'=1,0$

На рис. 1 показаны графики функции $\Gamma_{III}(x', x, \pi/3)$ при малых значениях фиксированного аргумента x' . Учитывая, что первое приближение соответствует полному перераспределению по частотам, можно проследить за ходом изменения функции перераспределения, когда к сумме (4) добавляются новые слагаемые и возникает частичная когерентность. Как видно, при этом максимумы функции перераспределения перемещаются в сторону $x=x'\cos\gamma$, т. е. определяются соотношением (25), справедливым для доплеровского рассеяния.

Для сравнения на рис. 2 приведены графики функции перераспределения при доплеровском рассеянии. На рисунке показаны графики функции $\Gamma_I(x', x, \pi/3)$ лишь при полном перераспределении и графики, построенные с помощью точной формулы (1).

Как можно заключить из рис. 3, на котором приведены графики функции $\Gamma_{III}(x', x, \pi/3)$ для больших значений x' , квант с наибольшей вероятностью переизлучается вблизи центра линии независимо от частоты поглощенного кванта x' . Надо заметить, что максимум функции перераспределения с ростом x' все больше перемещается к центру линии, что вытекает из формул (9) и (23).

На рис. 4 приведены графики усредненных по углам функций перераспределения $\Gamma_I(x', x)$ и $\Gamma_{III}(x', x)$ при малых значениях фиксированного аргумента x' .

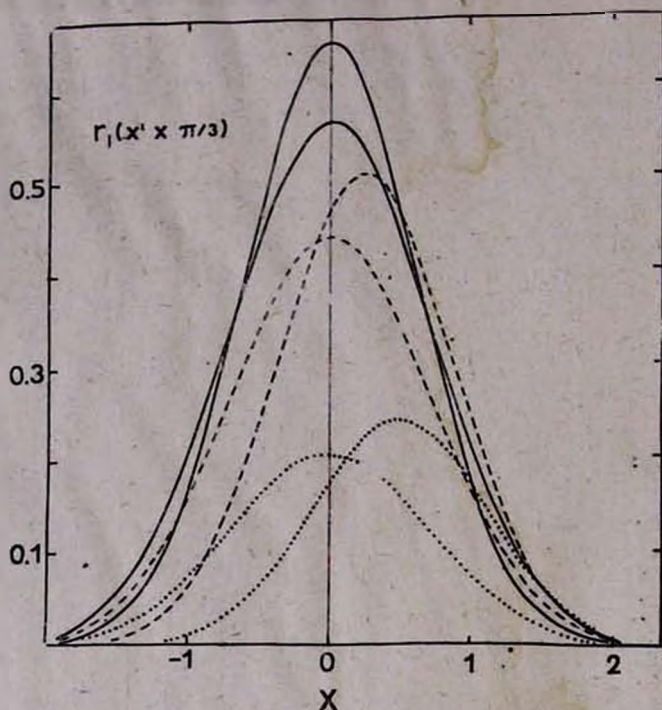


Рис. 2. Функции перераспределения $\Gamma_1(x', x, \pi/3)$. Приведены графики функции при истинном законе (формула (1)) и при полном перераспределении (1 приближение).
 — $x'=0$; — $x'=0.5$; $x'=1.0$.

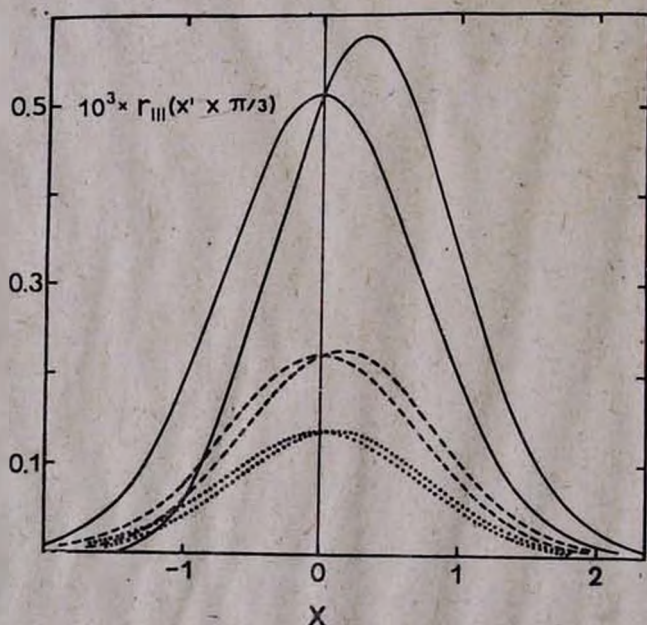


Рис. 3. Функция перераспределения $\Gamma_{III}(x', x, \pi/3)$ при больших значениях x' и $\sigma=10^{-2}$. Приведены графики функции лишь в I и II приближениях, поскольку в этом случае закон $\Gamma_{III}(x', x, \gamma)$ мало отличается от полного перераспределения.
 — $x'=3$; — $x'=4$; $x'=5$.

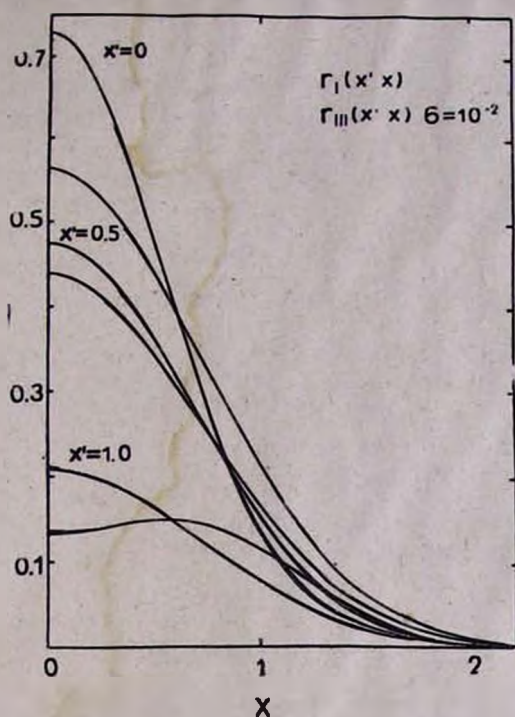


Рис. 4. Усредненная по углам функция перераспределения. Приведены графики функции в I и IV приближениях.

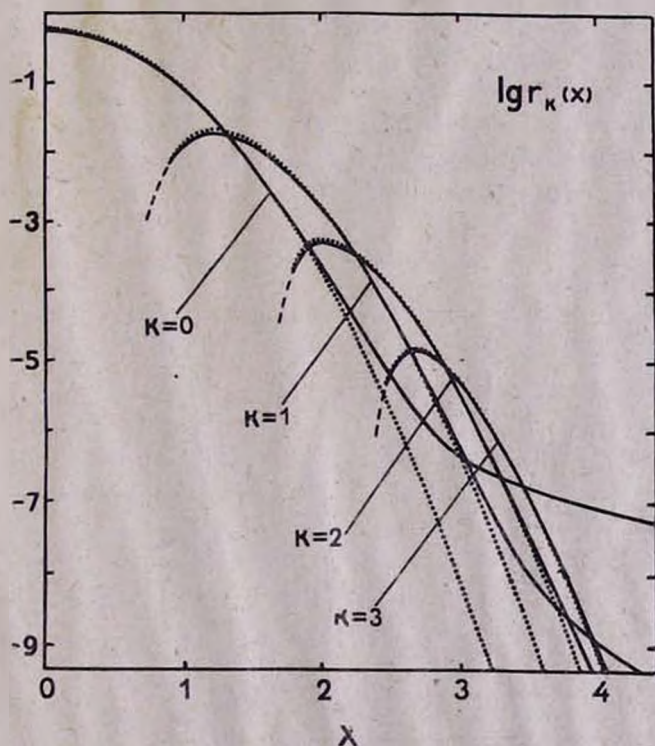


Рис. 5. Функция $r_K(x)$. — $\sigma = 10^{-2}$; $\sigma = 0$.

Доминирующую роль первого слагаемого в сумме (8) в далеких крыльях можно установить также с помощью графиков на рис. 5, где построены следующие функции: $r_k(x) = A_k x_k^2(x, 0)$ для фойгтовского и доплеровского законов рассеяния. Как легко видеть, для любого k при доплеровском законе перераспределения всегда найдется некоторое x_k такое, что

$$r_{k+1}(x) > r_k(x), \text{ при } |x| > x_k. \quad (30)$$

Неравенство (30) непосредственно следует из самого определения функций $r_k(x)$.

Что же касается фойгтовского закона рассеяния, то здесь наблюдается противоположная, в некотором смысле, картина. Как видно из графиков и согласно формуле (27), в этом случае для любого k можно найти такое x_k , что

$$r_{k+1}(x) < r_k(x) < \dots < r_0(x), \text{ при } |x| > x_k. \quad (31)$$

Автор выражает свою искреннюю признательность А. Г. Никогосяну за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

9 октября 1978 г.

Հ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

$r_{III}(x', x, \gamma)$ ՎԵՐԱԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՆԿՑԻԱՅԻ ԿԱՌՈՒՅՄԱՆ ՊԱՐԶ ԵՂԱՆԱԿ

Ա մ ֆ ո ֆ ո մ

Առաջարկվում է $r_{III}(x', x, \gamma)$ վերաբաշխման ֆունկցիայի հաշվման համեմատաբար պարզ եղանակ: Ֆունկցիայի ասիմպտոտային վարքը նկարագրելու համար ստացված են բանաձևեր, որոնք կարող են օգտագործվել գործնական նպատակների համար: Առանձին քննարկված է տարբեր ֆիզիկական գործոններից վերաբաշխման ֆունկցիայի ունեցած կախման հարցը: Բերված են թվային հաշվարկների արդյունքներ:

H. A. HARUTHYUNIAN

A SIMPLE METHOD FOR THE EVALUATION OF THE REDISTRIBUTION FUNCTION $r_{III}(x', x, \gamma)$.

Summary

A relatively simple method for the evaluation of the redistribution function $r_{III}(x', x, \gamma)$ is suggested. This function assumes completely non-coherent scattering in the atom's frame. Useful from the point of view of the practical applications asymptotical formulae are obtained. The dependence of the redistribution function on the various parameters is investigated. The results of the numerical calculations are also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. G. Hummer. MNRAS, 125, 21, 1962.
2. A. Reichel and I. M. Vardavas, JQSRT, 15, 929, 1975.

3. *C. Magnan*, JQSRT, 15, 979, 1975.
4. *А. Г. Никогосян*, ДАН СССР, 235, 786, 1977.
5. *А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян*, ДАН СССР, 229, 583, 1976.
6. *Н. А. Haruthyunian and A. G. Nikoghossian*, JQSRT, 19, 135, 1978.
7. *А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян*, Астрофизика, 14, 393, 1978.
8. *Н. Н. Лебедев*, Специальные функции и их приложения, М., Гостехиздат, 1953.
9. *D. G. Hummer*, Mem. RAS, 70, 1, 1965.
10. *G. N. Plass and D. I. Fluel*, Ac. J., 117, 225, 1953.
11. *Д. И. Нагирнер*, Труды АО ЛГУ. 31, 1, 1975.