

Р. Р. АНДРЕАСЯН, Э. Х. ДАНИЕЛЯН

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ φ -ФУНКЦИИ АМБАРЦУМЯНА

В теории изотропного рассеяния света большую роль играет φ -функция Амбарцумяна, введенная им в 1942 г. [1]. Эта функция фигурирует при нахождении решений почти всех задач теории переноса излучения в полупространстве.

К настоящему времени проведены подробные исследования этой функции: имеются подробные таблицы, получены асимптотические и явные интегральные представления. Ссылки на эти работы опускаются ввиду их многочисленности, их можно найти в любой монографии, посвященной вопросам теории переноса излучения.

В работе [1] для φ -функции приводится следующее уравнение:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\mu + \eta} d\mu, \quad (1)$$

в котором λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния. Там же это уравнение решалось численно методом итераций и, в частности, было выяснено, что сходимость последовательных приближений заметно ухудшается при значениях параметра λ близких к единице. При этом для улучшения сходимости (для $0,95 \leq \lambda \leq 1$) уравнение (1) модифицировалось и проводился ряд искусственных приемов.

Для функции Амбарцумяна можно получить другое уравнение, выгодно отличающееся от (1) тем, что сходимость последовательных приближений осуществляется быстрее и, что также важно, скорость сходимости практически не зависит от λ .

Для получения нового уравнения воспользуемся двумя хорошо известными соотношениями, связывающими φ -функцию с резольвентной функцией Соболева $\Phi(\tau)$:

$$\varphi(\eta) = 1 + \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\eta}} \Phi(\tau) d\tau \quad (2)$$

и

$$\Phi(\tau) = C e^{-\kappa \tau} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}} d\mu}{R(\mu) \mu \varphi(\mu)}. \quad (3)$$

Последнее соотношение получено Мининым в [2]. В нем обозначено

$$R(\mu) = \left(\frac{\lambda \pi \mu}{2} \right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{2} \mu \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^2 \text{ и } C = \frac{1}{\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) d\mu}{(1-k\mu)^2}}, \quad (4)$$

а k находится из условия $\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1$.

Подставляя (3) в (2) и интегрируя по оптической глубине, получим*

$$\varphi(\tau) = 1 + \frac{C\tau}{1+k\tau} + \frac{\lambda}{2} \tau \int_0^1 \frac{d\mu}{R(\mu)\varphi(\mu)(\mu+\tau)}. \quad (5)$$

С точки зрения численного решения методом итераций это уравнение по сравнению с (1) обладает очевидными преимуществами. Во-первых, внеинтегральная часть гораздо ближе к φ -функции и в известном смысле является ее аппроксимацией, получающейся из (2) заменой $\Phi(\tau)$ ее асимптотикой. Это должно привести, вообще говоря, к уменьшению числа итераций. Во-вторых, поскольку в интегральной части φ -функция стоит в знаменателе, то сходимость последовательных приближений должна осуществляться попеременно снизу и сверху. Последнее обстоятельство позволяет оценить погрешности вычислений.

Для нахождения φ -функции из полученного выше уравнения необходимо иметь величину C . Из соотношения (4) видно, что ее можно вычислить параллельно с вычислением φ -функции. Однако предварительное задание этой величины значительно улучшает сходимость последовательных приближений при численном решении уравнения (5). Величину C можно найти также из известного соотношения

$$C = \frac{1}{2k\varphi\left(\frac{1}{k}\right)} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right|.$$

Значения же φ -функции в точках $\frac{1}{k}$ можно взять из таблиц, приводимых в [3], или вычислить из явных интегральных представлений этой функции (см., например, [4]).

Нами были проведены вычисления φ -функции как из уравнения (5), так и общепринятым методом. В результате выяснилось, что независимо от параметра λ уравнение (5) обеспечивает заданную точность при гораздо меньшем числе итераций по сравнению с уравнением (1). Конкретнее, при вычислении нашим способом число итераций практически не зависит от λ и составляет порядка двух, трех. При этом

* Уравнение (5) следует из формулы (7) публикуемой в этом номере статьи Р. Р. Андреасяна при $\tau=0$ (прим. ред.).

обеспечивается точность в несколько единиц пятого знака. Для вычисления же φ -функции общепринятым способом с той же точностью число итераций, необходимых для сходимости последовательных приближений, составляет порядка 6—7 для $\lambda=0,8$ и очень быстро растет с ростом λ . В обоих случаях в качестве нулевого приближения принималось $\varphi_0(\eta)=1$.

Предложенный способ* более эффективного вычисления не является самоцелью (ибо, как уже говорилось, существуют подробные таблицы φ -функции), а преследует вполне конкретные практические цели. Как уже отмечалось выше, при решении любой задачи теории изотропной диффузии излучения в полубесконечной среде мы всегда сталкиваемся с φ -функцией. Поэтому при конкретных машинных расчетах при наличии эффективного способа гораздо выгоднее вычислять эту функцию по ходу решения основной задачи, чем вводить обширные таблицы.

В заключение отметим, что в случае анизотропного рассеяния для обобщенных H^m -функций Амбарцумяна—Чандрасекара имеет место уравнение

$$H^m(\eta) = 1 + \eta H^m(\eta) \int_0^1 \psi^m(\mu) \frac{H^m(\mu)}{\mu + \eta} d\mu. \quad (6)$$

Для них можно получить уравнение, аналогичное (5): Оно имеет вид

$$H^m(\eta) = 1 + C_{\text{om}} \frac{1}{1+k\eta} + \eta \int_0^1 \frac{\psi^m(\mu) d\mu}{R^m(\mu) H^m(\mu) (\mu + \eta)}. \quad (7)$$

Здесь

$$R^m(\mu) = \left[\pi \mu \psi^m(\mu) \right]^2 + \left[T^m(\mu) \right]^2; \quad T^m(\mu) = 1 + \mu \int_{-1}^1 \psi^m(\nu) \frac{d\nu}{\nu + \mu},$$

k —находится из условия

$$T^0\left(\frac{1}{k}\right) = 0, \text{ а } C = \frac{1}{\int_0^1 \psi^m(\mu) \frac{H^m(\mu)}{(1-k\mu)^2} d\mu}. \quad (8)$$

Нами также были проведены вычисления H^m -функций из уравнений (7) и (6) и сравнение сходимостей в обоих случаях. Рассматривалась двучленная индикатриса вида $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$. При этом (см. [5], стр. 151).

* В книге К. Кейз, П. Цвайфель, «Линейная теория переноса» (М., «Мир», 1972) приведен итерационный процесс (см. формулу (31) на стр. 152), который обладает всеми преимуществами метода данной статьи и в то же время требует гораздо меньшего объема вычислений (прим. ред.).

$$\psi^0(\eta) = \frac{\lambda}{2} \left[1 + (1-\lambda)\eta^2 \right]; \quad \psi^1(\eta) = \frac{\lambda}{2} (1 - \eta^2).$$

В результате выяснилось, что наш способ выгоднее применять при вычислении основной азимутальной гармоники обобщенной функции Амбарцумяна—Чандрассекара. Что касается высших гармоник, то итерационный процесс в обоих случаях сходится очень быстро.

Ռ. Ռ. ԱՆԴՐԵԱՍՅԱՆ, Է. Խ. ԴԱՆԵԼԻԱՆ

ՀԱՄԱՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆԻ φ -ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Մ

. Հոդվածում Համարձույանի φ -ֆունկցիայի համար դուրս է բերվում նոր ֆունկցիոնալ հավասարում: Այդ հավասարումով φ -ֆունկցիայի հաշվումը ավելի էֆեկտիվ է հայտնի եղանակների համեմատ: Արդյունքը ընդհանրացվում է նաև ոչ իզոտրոպ դիպքի համար:

R. R. ANDREASIAN, E. KH. DANIELIAN

ON CALCULATION OF AMBARTSUMIAN'S φ -FUNCTION

S u m m a r y

In the paper a new equation for the Ambartsumian φ -function is derived. The evaluation of the φ -function from this equation appears to be more effective than that based on the other known equations. The obtained result is generalized for the case of anisotropic scattering i. e. the appropriate equation for the Ambartsumian—Chandrasekhar's H^m —functions is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. I, Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1960.
2. И. Н. Минин, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
3. I. Kuščer, Canad. J. Phys., 31, 1187, 1953.
4. В. В. Соболев, Астрофизика, 3, 433, 1967.
5. В. В. Соболев, Расстояние света в атмосферах планет, М., «Наука», 1972.