М. А. МНАЦАКАНЯН

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СРЕДАХ

Посвящается 70-летию академика В. А. Амбарцумяна

1. Оператор инвариантности

Пусть через границу полубесконечной среды выходит некое излучение с распределением f_0 (по углам, частотам и т. д.). Поместим перед полубесконечной средой слой толщиной τ. Тогда из суммарной полубесконечной среды после всевозможных рассеяний выйдет излучение с другим распределением f_τ. Введем оператор $Y(\tau)$, действие которого сводится к следующему:

$$f_\tau = Y(\tau) f_0. \tag{1.1}$$

Другими словами, оператор $Y(\tau)$ определяет вероятность (для линейных задач) выхода из полубесконечной среды кванта, первоначально летевшего на глубине τ в сторону границы.

Очевидно, что $Y(O) = I$—единичный оператор. Поэтому в случае бесконечно тонкого добавляемого слоя оператор $Y(d\tau)$ можно представить в виде разложения

$$Y(d\tau) = I - G d\tau. \tag{1.2}$$

Оператор G описывает то изменение, которое происходит с выходящим из среды излучением при добавлении перед полубесконечной средой бесконечно тонкого слоя. В каждой конкретной задаче он легко строится из физических соображений с использованием определения (1.2).

Пусть φ —оператор Амбарцумяна, определяющий излучение полубесконечной среды с квантами, поглощенными на ее границе. Если $Ad\tau$— оператор поглощения кванта отдельным слоем $d\tau$, то, очевидно,

$$Y(d\tau) = I - Ad\tau + \varphi A d\tau. \tag{1.3}$$

Сравнивая с (1.2), находим

$$G = (I - \varphi)A. \tag{1.4}$$

После того, как построен оператор G, мы легко можем решить разные задачи для полубесконечной среды, используя идеи инвариантности Амбарцумяна. Соответствующие уравнения инвариантности составляются при помощи оператора G, поэтому мы будем называть G оператором инвариантности.

Операторы Y, G и φ представляют собой аналоги переходных матриц и производят суммирование (интегрирование) по соответствующим параметрам первичных квантов. Оператор A обычно является оператором умножения на функцию от параметров начального состояния кванта (до поглощения). Здесь и ниже для операторов мы не вводим специальных обозначений, думая, что это не приведет к недоразумениям.

Перейдем к составлению уравнений инвариантности. Мы подразумеваем только задачи об излучении, выходящем из полубесконечной среды. В качестве иллюстраций мы ограничимся их применением к простейшим задачам переноса для полубесконечной среды. Конкретные результаты, в основном, известны, их можно найти в классических трудах В. А. Амбарцумяна [1], В. В. Соболева [2, 3] и В. В. Иванова [4], однако наша работа оправдывается физической прозрачностью и математической простотой выводов. В этой связи мы надеемся распространить в дальнейшем развиваемый аппарат на случаи нелинейной и сферической задач теории рассеяния света.

Операторы Y и G введены в работах [5—10], имеющих целью свести задачи переноса излучения в слое конечной оптической толщины к соответствующим задачам для полубесконечной среды.

Настоящая статья написана на основе конспекта лекций, прочитанных автором на семинарах радиофизического факультета и студентам-теоретикам физического факультета Ереванского гос. университета.

2. Уравнения инвариантности

Рассмотрим следующие задачи для однородной полубесконечной среды. Рассмотрение ведется в вероятностной трактовке.

Задача Милна. Пусть в полубесконечной среде с чистым рассеянием $\lambda = 1$ бесконечно глубоко расположен источник (поглощен квант). Нужно найти распределение u выходящего из среды излучения. Добавив к границе полубесконечной среды бесконечно тонкий слой, мы получим ту же задачу Милна для суммарной полубесконечной среды и, следовательно, прежнее распределение выходящего излучения. Поскольку изменений в выходящем излучении при этом не происходит, то действие оператора G сводится к нулевому:

$$Gu = O. \tag{2.1}$$

Этим уравнением описывается решение задачи Милна.

Равномерное распределение источников. Пусть в полубесконечной среде задано равномерное распределение первичных источников с плотностью ε, и нас интересует распределение u выходящего из среды излучения. Добавим перед средой бесконечно тонкий слой с той же плотностью источников ε. Под влиянием добавленного слоя в среде «теряется» распределение $Gud\tau$, но дополнительно излучается $\varphi\varepsilon d\tau$ —в результате же выходящее излучение должно остаться прежним, ибо мы имеем прежнюю постановку задачи. Иными словами, решение этой задачи сводится к уравнению

$$Gu = \varphi\varepsilon. \tag{2.2}$$

Экспоненциальное распределение источников. Рассмотрим более общую задачу—полубесконечную среду с экспоненциальным распределением первичных источников по глубине τ с плотностью $\varepsilon e^{-\mu\tau}$. Пусть u—выходящее из среды излучение. Добавим бесконечно тонкий слой $d\tau$ с плотностью источников $\varepsilon 1(+ \mu d\tau)$, продолжающей исходное экспоненциальное распределение. Мы получим суммарную полубесконечную среду опять с экспоненциальным распределением источников, но с плотностью, всюду в $(1+\mu d\tau)$ раз большей. Поэтому распределение выходящего излучения, в силу линейности задачи, будет равно $(1+\mu d\tau)u$. С другой стороны, оно равно излучению $Y(d\tau)u$, вышедшему под влиянием добавленного слоя $d\tau$, и излучению самого добавленного слоя—$\varphi\varepsilon d\tau$. Следовательно, решение этой задачи описывается уравнением

$$(1 + \mu d\tau)u = Y(d\tau)u + \varphi\varepsilon d\tau,$$

или

$$Gu + u\mu = \varphi\varepsilon. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) при $\mu=0$ переходит в (2.2) и при $\varepsilon=0$ в (2.1).

Свечение полубесконечной среды определяется оператором Амбарцумяна φ/μ. Если p—индикатриса рассеяния (функция перераспределения по частотам и т.п.), а R—оператор отражения от полубесконечного слоя, то, очевидно,

$$\varphi = \frac{\lambda}{2}\varphi^* p, \text{ где } \varphi^* = I + R. \tag{2.4}$$

Диффузное отражение. Квант, падающий на границу полубесконечной среды, поглощается с экспоненциальной по глубине плотностью вероятности $Ae^{-A\tau}$. (Напомним, что $Ad\tau$ есть вероятность поглощения отдельным слоем $d\tau$). Этим первичным распределением обусловлено выходящее излучение. Поэтому задача о диффузном отражении сводится к задаче об экспоненциальном распределении при $\mu \to A$, $\varepsilon \to A$;

$$GR + RA = \varphi A. \tag{2.5}$$

Используя (1.4) и (2.4), можно (2.5) переписать в виде

$$AR + RA = \varphi A \varphi^*. \tag{2.6}$$

Принцип обратимости для оператора диффузного отражения в вероятностной трактовке можно записать в виде:

$$AR = A^+ R^+.$$

Транспонирование означает перемену местами параметров начального и конечного состояний. С учетом этого $RA = A^+ R$ и уравнение (2.6) для оператора отражения принимает вид

$$(A + A^+) R = \varphi A \varphi^*. \tag{2.7}$$

Из этого соотношения, учитывая, что A есть оператор умножения на функцию, находится оператор отражения R, а подстановка его в (2.4) приводит к *функциональному уравнению* Амбарцумяна для φ.

Точечный источник. Вероятность выхода кванта, первоначально летящего на глубине τ, определяется величиной $Y(\tau)$. Если речь идет о первоначально поглощенном кванте, то эту величину обозначим через $P(\tau)$. Отметим несколько физически очевидных, но важных соотношений между этими величинами:

$$Y(\tau_1 + \tau_2) = Y(\tau_1) Y(\tau_2), \tag{2.8}$$

$$P(\tau) = Y(\tau) \varphi. \tag{2.9}$$

Если посредством X доопределить Y и для квантов, первоначально летевших в глубь среды, то

$$P(\tau) = \frac{\lambda}{2} X(\tau) p. \tag{2.10}$$

Световой режим в глубоких слоях. Пусть квант поглощен на большой глубине $\tau \gg 1$ в полубесконечной среде. Распределение u выходящего излучения найдем из условия, что добавление бесконечно тонкого слоя уменьшает излучение в некоторое число $(1-k)d\tau$ раз (эргодичность), оставляя относительное распределение неизменным:

$$Gu = ku. \tag{2.11}$$

Если квант первоначально движется внутри среды, то выходящее излучение определяется величиной $Y(\tau)$, причем для больших глубин относительное распределение $\overline{Y}$ удовлетворяет уравнению:

$$G\overline{Y} = k\overline{Y}. \tag{2.12}$$

Как следует, например, из (2.8), $Y(\tau) = \overline{Y} e^{-k\tau}$.

Произвольное распределение источников. Пусть в полубесконечной среде, заполняющей область $(-\infty, \tau)$ задано распределение квантов с плотностью $g(\tau)$. Пусть $g(\tau)=0$ при $\tau<0$ и фиксирована на всей положительной полуоси τ. Обозначим выходящее из среды излучение через $u(\tau)$.

Добавим перед полубесконечной средой бесконечно тонкий слой $d\tau$ с плотностью $g(\tau+d\tau)$. Вышедшее из суммарной полубесконечной среды распределение будет равно $u(\tau+d\tau)$. С другой стороны, оно складывается из излучения, выходящего в результате воздействия добавленного слоя $d\tau$: $Y(d\tau)u(\tau)$ и дополнительного излучения $\varphi g(\tau+d\tau)d\tau$ самого добавленного слоя $d\tau$. Следовательно,

$$u(\tau+d\tau)=Y(d\tau)u(\tau)+\varphi g(\tau)d\tau,$$

или

$$\frac{du(\tau)}{d\tau}+Gu(\tau)=\varphi g(\tau), \tag{2.13}$$

с начальным условием $u(0)=0$. Если $g(\tau)=0$, то (2.13) при $Y(0)=I$ переходит в уравнение для $Y(\tau)$.

Случаю ***неоднородной среды*** посвящен шестой параграф статьи.

3. Одномерная среда

В этом параграфе мы рассмотрим задачу монохроматического рассеяния в одномерной однородной полубесконечной среде и исследуем вопрос критичности слоя конечной толщины.

3.1. Изотропное рассеяние. В данном случае $A=1$, а $G\equiv k$ есть число:

$$k=1-\varphi, \tag{3.1.1}$$

где φ—вероятность выхода кванта, поглощенного на границе. Задача Милна (2.1) дает тривиальное $k=0$ при $\lambda=1$.

При равномерном распределении источников, согласно (2.2),

$$u=s\varphi/k. \tag{3.1.2}$$

При экспоненциальном распределении из (2.3) имеем

$$u=\varepsilon\frac{\varphi}{\mu+k}. \tag{3.1.3}$$

Свечение дается формулой (2.4):

$$\varphi=\frac{\lambda}{2}(1+R), \tag{3.1.4}$$

где R определяется из (2.5) или (2.7):

$$R=\frac{\varphi}{1+k}=\frac{\varphi^2}{\lambda}. \tag{3.1.5}$$

Из (3.1.1) и (3.1.5) имеем

$$\varphi = 1 - k = \frac{\lambda}{1+k}, \tag{3.1.6}$$

откуда находим постоянную затухания k:

$$k = \sqrt{1-\lambda}. \tag{3.1.7}$$

Согласно (3.1.5),

$$R = \frac{1-k}{1+k}. \tag{3.1.8}$$

При распределении $g(\tau)$ источников из (2.13) имеем:

$$u(\tau) = \varphi \int_0^\tau e^{-k|\tau-\tau'|} g(\tau') d\tau'. \tag{3.1.9}$$

3.2. Критическая толщина слоя. При $\lambda > 1$ задачи для полубесконечной среды теряют физический смысл, однако можно написать формальные решения, представляющие собой аналитическое продолжение соответствующих формул на комплексную плоскость (k). λ имеет смысл среднего числа частиц, генерируемых при поглощении одной частицы.

В (3.1.7) введем

$$k = i\bar{k}, \text{ где } \bar{k} = \sqrt{\lambda - 1}. \tag{3.2.1}$$

Тогда вероятность диффузного отражения (3.1.8)

$$R = \frac{1-k}{1+k} = \frac{1-i\bar{k}}{1+i\bar{k}} = e^{-2i\,\mathrm{arctg}\,\bar{k}}. \tag{3.2.2}$$

Рассмотрим, например, задачу о вероятности выхода p_τ кванта, поглощенного в середине слоя толщины τ. Согласно уравнениям, связывающим свойства слоев конечной и полубесконечной толщин [5,6]:

$$P\left(\frac{\tau}{2}\right) = p_\tau + Z(\tau)\, p_\tau,$$

где $P(\tau)$—вероятность выхода кванта с глубины τ полубесконечного слоя, а $Z(\tau) = Y(\tau)R = Re^{-k\tau}$ (см. [5,6]). Отсюда

$$p_\tau = \frac{P(\tau/2)}{1+Z(\tau)}. \tag{3.2.3}$$

Мы видим, что комплексная величина

$$Z(\tau) = e^{-i\bar{k}\tau - 2i\,\mathrm{arctg}\,\bar{k}} \tag{3.2.4}$$

при условии $\tau = \tau_{kp}$, где

$$\tau_{kp} = \frac{1}{\bar{k}} (\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\bar{k}), \tag{3.2.5}$$

принимает значение $Z=-1$, при котором знаменатель (3.2.3) обращается в нуль. Этому соответствует бесконечное (в среднем) число генерируемых в среде частиц, т. е. спонтанный взрыв.

Приведем без вывода также выражение для критической толщины слоя с границей, отражающей долю α излучения:

$$\tau_{kp}=\frac{1}{\bar{k}}\operatorname{arctg}\frac{\sin 2\varphi}{\alpha-\cos 2\varphi}, \tag{3.2.6}$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}\bar{k}$,

или

$$\tau_{kp}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\lambda-1}}{(\alpha+1)\lambda-2}. \tag{3.2.7}$$

3.3. Анизотропное рассеяние. Пусть x есть вероятность того, что при рассеянии квант сохранит прежнее направление движения, а a—полетит в обратном, причем $x+a=\lambda$.

Введем вероятности φ_+ и φ_- выхода из среды кванта, поглощенного на границе, в зависимости от того, двигался он до поглощения в сторону выхода из среды или в обратном направлении.

Так как оператор G по своему смыслу относится к кванту, первоначально движущемуся в направлении выхода из среды, то

$$G\equiv k=1-\varphi_+. \tag{3.3.1}$$

В формулу же (2.5) для диффузного отражения входит φ_-

$$R=\frac{\varphi_-}{1+k}. \tag{3.3.2}$$

Согласно (2.4)

$$\varphi_+=x+aR,\quad \varphi_-=a+xR. \tag{3.3.3}$$

Из последних трех соотношений легко получаем

$$R=\frac{a}{1-x+k} \tag{3.3.4}$$

и $(1-x)^2-k^2=a^2$, откуда

$$k=\sqrt{(1-x)^2-a^2}=\sqrt{1-\lambda}\ \sqrt{1+\lambda-2x}. \tag{3.3.5}$$

Во всех задачах о первичных источниках нужно учесть направление полета кванта перед поглощением.

Критическая толщина слоя для $\lambda>1$ дается величиной

$$\tau_{kp}=\frac{1}{\bar{k}}\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{\bar{k}}{1-x}\right),\quad x<\frac{\lambda+1}{2}, \tag{3.3.6}$$

где $k=i\bar{k}$. Из (3.3.6) видно, что, как и следовало ожидать, с ростом a, т. е. с увеличением вытянутости «индикатрисы» рассеяния назад, увеличивается среднее число рассеяний (блужданий «взад—вперед»), а следовательно, уменьшается критическая толщина слоя.

Если $x \geqslant \frac{\lambda+1}{2}$, то $\tau_{kp} = \infty$.

4. Трехмерная среда

Мы рассмотрим однородную трехмерную среду с изотропным и анизотропным монохроматическим рассеянием. В обоих случаях $A=1/\zeta$, где ζ—косинус угла между направлением движения кванта и внешней нормалью к границе среды.

4.1. Изотропное рассеяние. В этом случае ядро оператора G, очевидно, имеет вид

$$G(\eta, \zeta) = \frac{\delta(\eta-\zeta)}{\zeta} - \frac{\lambda}{2}\frac{\varphi(\eta)}{\zeta}. \tag{4.1.1}$$

Мы обозначили вероятность выхода кванта, поглощенного на границе, через $\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)$, где φ—функция Амбарцумяна.

Действие оператора G, например, на функцию $\eta\varphi(\eta)$ дает

$$G(\eta\varphi)=\int_0^1 G(\eta,\zeta)\zeta\varphi(\zeta)d\zeta = \varphi(\eta)\left(1-\frac{\lambda}{2}\int_0^1\varphi(\zeta)d\zeta\right) = \sqrt{1-\lambda}\,\varphi(\eta). \tag{4.1.2}$$

Здесь использовано следующее ниже выражение (4.1.11). В частности, при $\lambda=1$:

$$G(\eta\varphi) = 0. \tag{4.1.3}$$

В задаче Милна распределение выходящего излучения определяется уравнением (2.1): $Gu=0$. Сравнивая с (4.1.3), находим

$$u(\eta) = C\eta\varphi(\eta). \tag{4.1.4}$$

Сравнивая с (4.1.2) уравнение (2.2) для задачи о равномерно распределенных источниках, находим:

$$u(\eta) = \varepsilon\frac{\eta\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{4.1.5}$$

При экспоненциальном распределении из (2.3) находим

$$u(\eta) = \frac{\eta\varphi(\eta)}{1+\mu\eta}\left(\varepsilon + \frac{\lambda}{2}u_{-1}\right), \tag{4.1.6}$$

где $u_{-1} = \int_0^1 u(\zeta)d\zeta/\zeta$ определяется из самого выражения (4.1.6). Если использовать (4.1.10), то найдем, что

$$u(\eta) = \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\eta\varphi(\eta)}{1+\mu\eta}. \tag{4.1,7}$$

Вероятность диффузного отражения определяется из (2.7):

$$R(\eta,\zeta)=\frac{\lambda}{2}\eta\frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta+\zeta}. \qquad (4.1.8)$$

Подстановкой (4.1.8) в (2.4), т. е., в

$$\varphi(\eta)=1+\int_0^1 R(\eta,\zeta)d\zeta, \qquad (4.1.9)$$

получается функциональное уравнение Амбарцумяна

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\eta+\zeta}. \qquad (4.1.10)$$

Отсюда следует, что (см.[1]),

$$\frac{\lambda}{2}\varphi_0=1-\sqrt{1-\lambda}. \qquad (4.1.11)$$

4.2. Световой режим в глубоких слоях. В задаче о световом режиме на больших глубинах из (2.11) имеем

$$u(\eta)=\frac{\lambda}{2}u_{-1}\frac{\eta\varphi(\eta)}{1-k\eta}. \qquad (4.2.1)$$

Деля на η и интегрируя, находим условие для определения постоянной k:

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\varphi(\mu)}{1-k\mu}d\mu=1. \qquad (4.2.2)$$

Выражение для $Y(\tau,\eta,\zeta)$ получено в [6,7]. Здесь же мы ограничимся исследованием асимптотического поведения $Y(\tau,\eta,\zeta)$ при больших τ. Из (2.12) следует, что

$$\overline{Y}(\eta,\zeta)=C(\zeta)\frac{\eta\varphi(\eta)}{1-k\eta}. \qquad (4.2.3)$$

Используя свойство симметрии (см. [7])

$$\zeta\varphi(\zeta)Y(\tau,\eta,\zeta)=\eta\varphi(\eta)Y(\tau,\zeta,\eta), \qquad (4.2.4)$$

находим

$$Y(\tau,\eta,\zeta)\approx\frac{\lambda}{2}Ce^{-k\tau}\frac{\eta\varphi(\eta)}{(1-k\eta)(1-k\zeta)}=\frac{P(\tau,\eta)}{1-k\zeta}, \qquad (4.2.5)$$

так как

$$P(\tau,\eta)=Y(\tau,\eta,0). \qquad (4.2.6)$$

Постоянная C находится из соотношения (2.8) при $\tau_1,\tau_2\gg 1$

$$\frac{\lambda}{2}C\int_0^1\frac{\mu\varphi(\mu)}{(1-k\mu)^2}d\mu=1. \qquad (4.2.7)$$

Очевидно, что постоянная u_{-1} в (4.2.1) равна C.

Используя соотношение (2.9) при $\tau \gg 1$, снова приходим к условию (4.2.2), а используя соотношение (2.10)

$$P(\tau,\eta) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} Y(\tau,\eta,\zeta)d\zeta, \tag{4.2.8}$$

при $\tau \gg 1$, получаем другое, эквивалентное условие

$$\frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1-k}{1+k} = 1. \tag{4.2.9}$$

4.3. Анизотропное рассеяние. Введем вероятность $\frac{\lambda}{2}K(\eta,\zeta)$ выхода в направлении η кванта с поверхности при условии, что он был поглощен в направлении ζ.

Нетрудно видеть, что

$$G(\eta,\zeta) = \frac{\delta(\eta-\zeta)}{\eta} - \frac{\lambda}{2}\frac{K(\eta,\zeta)}{\zeta}. \tag{4.3.1}$$

Для очень больших глубин (2.11):

$$u(\eta)\ (1-k\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 K(\eta,\zeta)u(\zeta)d\zeta, \tag{4.3.2}$$

причем k находится из условия разрешимости этого уравнения.

Рассмотрим задачу диффузного отражения (2.5):

$$R(\eta,\zeta) = \frac{\lambda}{2}\frac{\eta}{\eta+\zeta}\left\{K(\eta,-\zeta) + \int_0^1 K(\eta,\mu)\ R(\zeta,\mu)d\mu\right\}. \tag{4.3.3}$$

Связь между K и индикатрисой p получается из (2.4)

$p(-\eta,\zeta)$

$$K(\eta,\zeta) = p(\eta,\zeta) + \int_0^1 R(\eta,\eta')\ p(\eta',-\zeta)d\eta'. \tag{4.3.4}$$

Заметим, что в последних формулах свойство симметрии $\zeta R(\eta,\zeta)$ не использовано.

Как в свое время показал В. А. Амбарцумян [1], в случае двучленной индикатрисы рассеяния, когда

$$K(\eta,\zeta) = \varphi_0(\eta) + x_1\varphi_1(\eta)\zeta, \tag{4.3.5}$$

при чистом рассеянии, $\lambda=1$, величина φ_1 тождественно равна нулю, а $K(\eta,\zeta)$ совпадает с $\varphi(\eta)$ для сферической индикатрисы. Далее следовало, что функция отражения от полубесконечной среды в этом случае такая же, как при сферической индикатрисе.

Из (4.3.1) мы видим, что в рассматриваемом случае оператор инвариантности совпадает с таким же для сферической индикатрисы. Поскольку решения всех задач для полубесконечной среды однозначно определяются оператором G, то мы заключаем, что вообще любая задача для полубесконечной среды в случае чистого рассеяния с двучленной индикатрисой имеет то же решение, что и со сферической индикатрисой.

Несколько подробнее этот случай будет рассмотрен в готовящейся к печати работе автора по анизотропному рассеянию в слое конечной оптической толщины.

5. Некогерентное рассеяние

Рассматривается изотропное некогерентное рассеяние с функцией перераспределения по частотам $g(x,x')$. Коэффициент поглощения $A=\alpha(x')$. Далее $\alpha(x)=\int g(x,x')\alpha(x')dx'$, $\int\alpha(x)dx=1$.

5.1. Одномерная среда. Пусть $\frac{\lambda}{2}\varphi(x,x')$ вероятность выхода кванта, поглощенного на границе с частотой x', из полубесконечной среды с частотой x. Тогда ядро интегрального оператора G есть

$$G(x,\ x')=\alpha(x')\ \delta(x-x')-\frac{\lambda}{2}\alpha(x')\ \varphi(x,\ x'). \tag{5.1.1}$$

При экспоненциальном распределении источников частоты x' с плотностью $\varepsilon e^{-\mu\tau}$ из (2.3) для распределения выходящего излучения $u(x,\ x')$ имеем:

$$\left[\mu+\alpha(x)\right]u(x,\ x')=\frac{\lambda}{2}\varepsilon\varphi(x,\ x')+\frac{\lambda}{2}\int\varphi(x,\ x'')\ \alpha(x'')\ u(x'',x')dx''. \tag{5.1.2}$$

В задаче о диффузном отражении $\varepsilon\to\alpha(x')$, $\mu\to\alpha(x')$ из (2.7):

$$\left[\alpha(x)+\alpha(x')\right]R(x,\ x')=\frac{\lambda}{2}\alpha(x')\ \varphi(x,\ x')+\frac{\lambda}{2}\int\varphi(x,x'')\alpha(x'')R(x'',x')dx''. \tag{5.1.3}$$

Причем для $\varphi(x,\ x')$ можно, согласно (2.4), написать

$$\varphi(x,\ x')=g(x,\ x')+\int R(x,\ x'')\ g(x'',x')dx''. \tag{5.1.4}$$

В случае полного перераспределения по частотам

$$\varphi(x,\ x')=\varphi(x),\quad g(x,\ x')=\alpha(x),$$

и все уравнения существенно упрощаются. Например,

$$R(x,\ x')=\frac{\lambda}{2}\frac{\varphi(x)\varphi(x')}{\alpha(x)+\alpha(x')}, \tag{5.1.5}$$

$$\varphi(x)=\alpha(x)+\frac{\lambda}{2}\varphi(x)\int\frac{\varphi(x')\alpha(x')}{\alpha(x)+\alpha(x')}dx'. \tag{5.1.6}$$

5.2. Трехмерная среда. В задаче о некогерентном изотропном по углам рассеянии в трехмерной среде $A=\frac{\alpha(x')}{\zeta}$. Введем вероятность $\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta; x, x')$ того, что квант частоты x', поглощенный на границе полубесконечной среды, выйдет из нее с частотой x в направлении η.

Очевидно,

$$G(\eta,\zeta; x,x') = \delta(\eta-\zeta)\,\delta(x-x')\frac{\alpha(x')}{\zeta} - \frac{\lambda}{2}\varphi(\eta, x, x')\frac{\alpha(x')}{\zeta}. \quad (5.2.1)$$

Уравнение для φ-функции (2.4) имеет вид

$$\varphi(\eta, x, x') = \int \varphi^*(\eta, x, x'')\, g(x'', x')\,dx'', \quad (5.2.2)$$

где

$$\varphi^*(\eta, x', x'') = \delta(x'-x'') + \int R(\eta,\mu, x', x'')\,d\mu,$$

а для вероятности диффузного отражения (2.7):

$$\left[\frac{\alpha(x)}{\eta}+\frac{\alpha(x')}{\zeta}\right]R(\eta, \zeta; x, x') = \frac{\lambda}{2}\int\varphi(\eta; x, x'')\,\alpha(x'')\,\varphi^*(\zeta; x', x'')\,dx''. \quad (5.2.3)$$

В случае полного перераспределения по частотам задача описывается отношением $z=\mu/\alpha(x)$. Вводя вместо $\varphi(\eta; x)$ величину $H(z)$, нетрудно видеть, что

$$G(z, z') = \frac{\delta(z-z')}{z'} - \frac{\lambda}{2}H(z)\frac{a(z')}{z'}, \quad (5.2.4)$$

где

$$a(z) = \begin{cases} \int \alpha^2(x)\,dx, & |z| \leqslant 1, \\ 2\int\limits_{x(z)} \alpha^2(x)\,dx, & |z| > 1, \end{cases} \quad (5.2.5)$$

а

$$\alpha\Big(x(z)\Big) = \frac{1}{|z|}.$$

Множитель $a(z)$ появляется при переходе от двойного интегрирования по $d\zeta\,dx'$ к одинарному по dz.

Действие оператора G, например, на функцию $zH(z)$ даст

$$G(zH) = H(z) - \frac{\lambda}{2}H(z)\int_0^\infty H(z')\,a(z')\,dz' = \sqrt{1-\lambda}\,H(z). \quad (5.2.6)$$

В случае полного перераспределения по частотам имеется известная аналогия с задачей монохроматического рассеяния по углам [4].

6. Неоднородная среда

Пусть на полуоси $\tau<0$ расположена полубесконечная среда с $\lambda=\lambda_0=\mathrm{const}$. Добавим к ней на положительной полуоси $\tau>0$ слой толщины τ с переменной $\lambda(\tau)$. Суммарная полубесконечная среда в пределе $\tau\to\infty$ фактически представляет собой полубесконечную среду с заданным распределением в ней неоднородности $\lambda(\tau)$. При составлении уравнений инвариантности мы будем менять край среды τ, отрезая или добавляя слой.

Вероятность $\varphi(\tau)$ выхода из среды кванта, поглощенного на границе неоднородной полубесконечной среды, зависит от поведения $\lambda(\tau)$ во всей среде и посредством λ зависит от положения границы τ. Оператор G определяется снова из (1.4) и является функцией τ.

Рассмотрим задачу об экспоненциальном распределении источников. Выходящее излучение обозначим через $u(\tau)$. Добавим бесконечно тонкий слой $d\tau$. Тогда из новой среды выйдет $u(\tau+d\tau)$.

Поместим в добавленном слое источники в количестве $\varepsilon(1+\mu d\tau)$. Из новой полубесконечной среды должно выйти излучение $(1+\mu d\tau)\times u(\tau+d\tau)$. С другой стороны это излучение складывается из $Y(d\tau)u(\tau)$— того, что прошло под действием добавленного слоя $d\tau$ и излучения $\varepsilon(1+\mu d\tau)\varphi(\tau)d\tau$ самого слоя $d\tau$. Поэтому

$$(1+\mu d\tau)\ u(\tau+d\tau)=Y(d\tau)u(\tau)+\varepsilon\varphi(\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем искомое уравнение

$$\frac{du(\tau)}{d\tau}+Gu(\tau)+\mu u(\tau)=\varepsilon\varphi(\tau). \tag{6.0}$$

Начальным условием служит значение u для полубесконечной среды с $\lambda=\lambda_0$. В частности, можно принять $\lambda_0=0$ и $u(0)=0$.

6.1. Одномерная среда. В этом случае $G=k(\tau)$, причем

$$k(\tau)=1-\varphi(\tau). \tag{6.1.1}$$

Уравнение (6.0) имеет вид

$$\frac{du(\tau)}{d\tau}+\Big[1+\mu-\varphi(\tau)\Big]u(\tau)=\varepsilon\varphi(\tau). \tag{6.1.2}$$

Оно легко разрешимо в квадратурах, если известно φ:

$$u(\tau)\ q(\tau)=u(0)+\varepsilon\int_0^\tau\varphi(t)q(t)dt, \tag{6.1.3}$$

где

$$q(t)=\exp\left\{t\mu+\int_0^t k(t')\,dt'\right\}. \tag{6.1.4}$$

При $\mu\to 0$ получаем решение задачи о равномерном распределении источников, а еще при $\varepsilon\to 0$—решение задачи Милна.

Для задачи о диффузном отражении в (6.1.2) полагаем $\varepsilon=\mu=1$, $u\equiv R$ и используем выражение (2.4):

$$\frac{dR(\tau)}{d\tau}=\frac{\lambda(\tau)}{2}\Big(1+R(\tau)\Big)^2-2R(\tau). \tag{6.1.5}$$

Такому же уравнению Риккати удовлетворяет функция $\varphi(\tau)$:

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}=\varphi^2(\tau)-2\varphi(\tau)+\lambda(\tau). \tag{6.1.6}$$

Пусть в слое конечной толщины $\lambda(\tau)$ монотонно растет, скажем, от 0 до 1. От этого слоя спереди можно срезать такую часть, чтобы отражение от оставшегося слоя было максимально — R_{max}. Обозначим через λ_m значение λ в этой точке среза. Интересно, что величина R_{max} совпадает с отражением от такой полубесконечной среды, в которой всюду $\lambda=\lambda_m$. Это и аналогичное утверждение для величины φ очевидным образом следуют из приведенных уравнений.

6.2. Трехмерная среда. Оператор G зависит от τ и имеет вид

$$G(\tau, \eta, \zeta)=\frac{\delta(\eta-\zeta)}{\zeta}-\frac{\lambda}{2}\frac{\varphi(\tau, \eta)}{\zeta}, \qquad (6.2.1)$$

где $\varphi(\tau, \eta)$ — вероятность выхода кванта с поверхности полубесконечной среды, зависящая от распределения $\lambda(\tau)$.

В задаче о диффузном отражении полагаем в (6.0) $\varepsilon=\mu=1/\zeta$

$$\frac{dR(\tau, \eta, \zeta)}{d\tau}+\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)R(\tau, \eta, \zeta)=\frac{\lambda(\tau)}{2}\varphi(\tau, \eta)\left\{\frac{1}{\zeta}+R_{-1}(\tau, \zeta)\right\}, \qquad (6.2.2)$$

где $R_{-1}(\tau, \zeta)=\int_0^1 R(\tau, \eta, \zeta)\frac{d\eta}{\eta}$. Начальным условием служит решение этой задачи для полубесконечной среды с $\lambda=\lambda_0$. В частности, если $\lambda_0=0$, $R(0, \eta, \zeta)=0$.

Ввиду симметрии величины $\zeta R(\eta, \zeta)$, согласно (2.4), имеем

$$1+\zeta\int_0^1 R(\tau, \eta, \zeta)\frac{d\eta}{\eta}=1+\int_0^1 R(\tau, \zeta, \eta)d\eta=\varphi(\tau, \zeta). \qquad (6.2.3)$$

Поэтому

$$\frac{dR(\tau, \eta, \zeta)}{d\tau}+\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)R(\tau, \eta, \zeta)=\frac{\lambda(\tau)}{2\zeta}\varphi(\tau, \eta)\,\varphi(\tau, \zeta), \qquad (6.2.4)$$

или, интегрируя, находим

$$R(\tau, \eta, \zeta)=\frac{1}{2\zeta}\int^{\tau}\lambda(\tau')\,\varphi(\tau', \eta)\,\varphi(\tau', \zeta)e^{-(\tau-\tau')\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)}d\tau'. \qquad (6.2.5)$$

Подставляя (6.2.5) в (6.2.3), получаем уравнение для φ:

$$\varphi(\tau, \eta)=1+\frac{1}{2}\int^{\tau}\lambda(\tau')\,\varphi(\tau', \eta)e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta}}\int_0^1\varphi(\tau', \zeta)e^{-\frac{\tau-\tau'}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta}d\tau'. \qquad (6.2.6)$$

При $\lambda_0=0$ полученные уравнения переходят в соответствующие уравнения для неоднородного слоя конечной оптической толщины τ.

7. Оператор X

Обратимся к задаче о нахождении поверхностной функции Грина $X(\tau)$ в полубесконечной среде. Что касается этой задачи для слоя конечной толщины, то решать ее практически мы предпочитаем путем [5], использующим ее связь с задачей для полубесконечного слоя [8,9]. Тем не менее, с целью иллюстрации оператора инвариантности в п. 7.3 мы найдем поверхностную функцию Грина для слоя конечной толщины. В п. 7.4 мы кратко остановимся на случае задачи о шаровом слое, а в п. 7.5—на нелинейной задаче.

7.1. Полубесконечная среда. Пусть $X(\tau)$—вероятность выхода из полубесконечной среды кванта, летевшего на глубине τ. В зависимости от того, двигался ли квант первоначально в сторону выхода из среды или обратно—в глубь среды, введем отдельные обозначения $Y(\tau)$ и $Z(\tau)$. Очевидно, что

$$Z(\tau) = Y(\tau)R, \tag{7.1.1}$$

а также что Z получается из Y формальной заменой направления движения кванта на обратное.

Согласно принципу обратимости оптических явлений; $X(\tau)$ определяет внутренний световой режим в полубесконечной среде при ее параллельном освещении.

Величина Y удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$-\frac{dY(\tau)}{d\tau} = GY(\tau) = Y(\tau)G, \;\; Y(0) = I, \tag{7.1.2}$$

следующим из (2.8) при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to 0$. Очевидно, что величина $X(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{dX(\tau)}{d\tau} = GX(\tau) = P(\tau) \tag{7.1.3}$$

с условием $X(0) = I$, если квант первоначально летит к выходу, и $X(0) = R$, если квант первоначально летит в глубь среды. Уравнение (7.1.3) вместе с (2.10) фактически представляет собой основное уравнение теории переноса без источников.

В ряде случаев (когда квант забывает свою предысторию до акта рассеяния) из соотношения коммутативности (7.1.2):

$$GY = YG \tag{7.1.4}$$

непосредственно следует элементарное выражение для Y.

Подставляя сюда выражение (1.4) для G, получаем

$$AY - YA = \varphi AY - Y\varphi A. \tag{7.1.5}$$

С учетом (2.9) и вводя обозначение F согласно

$$FA = AY, \tag{7.1.6}$$

находим

$$AY - YA = (\varphi F - P)A. \tag{7.1.7}$$

Рассмотрим следующие частные задачи.

7.2. Частные задачи. Одномерная среда

$$Y(\tau) = e^{-k\tau}, \; Z(\tau) = Re^{-k\tau}, \tag{7.2.1}$$

где k определяется из (3.1.7) или (3.3.5).

В *трехмерной задаче* при сферической индикатрисе рассеяния для диффузной части Y из (7.1.4) получаем

?

$$Y(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\frac{F(\tau, \eta) - F(\tau, \zeta)}{\eta - \zeta}, + \delta \qquad (7.2.2)$$

где

$$F(\tau, \eta) = \eta\int_0^1 X(\tau, \mu, \eta)d\mu/\mu. \qquad (7.2.3)$$

Заметим, что $Z(\tau, \eta, \zeta) = Y(\tau, \eta, -\zeta)$, $P(\tau, \eta) = X(\tau, \eta, 0)$.

При *полном перераспределении* по частотам в одномерной среде

$$Y(\tau, x, x') = \frac{\lambda}{2}\alpha(x')\ \varphi(x)\frac{F(\tau, x) - F(\tau, x')}{\alpha(x') - \alpha(x)}, \qquad (7.2.4)$$

где $F(\tau, x)$ дается выражением типа (7.2.3).

В трехмерной среде при *некогерентном рассеянии*

$$Y(\tau, \eta, \zeta; x, x')\left[\frac{\alpha(x')}{\zeta} - \frac{\alpha(x)}{\eta}\right] = \frac{\alpha(x')}{\zeta}P(\tau, \eta; x, x') -$$
$$- \frac{\lambda}{2}\int\alpha(x'')\ \varphi(\eta, x, x'')\ F(\tau, \zeta; x'', x')dx'', \qquad (7.2.5)$$

где* (7.2.6)

$$F(\tau, \zeta; x'', x') = \zeta\int Y(\tau, \eta, \zeta; x'', x')d\eta/\eta.$$

При *полном перераспределении* по частотам и сферической индикатрисе рассеяния в трехмерной среде

$$Y(\tau, z, z') = \frac{\lambda}{2}zH(z)\frac{F(\tau, z) - F(\tau, z')}{z - z'}a(z'). \qquad (7.2.7)$$

В случае *неоднородной одномерной* среды

$$Y(\tau) = \exp\left\{-\int_0^\tau k(t)dt\right\} = e^{-\langle k\rangle\tau}, \qquad (7.2.8)$$

где $\langle k\rangle$ — среднее значение k в слое.

7.3. Слой конечной толщины. Введем оператор инвариантности

$$G(\tau_0) = [I - \varphi(\tau_0)]A \qquad (7.3.1)$$

для слоя конечной толщины τ_0. Пусть с левой его границы выходит квант. Добавим к слою слева другой слой толщиной τ и обозначим через $x(\tau, \tau_0)$ вероятность выхода этого кванта через границу суммарного слоя $(\tau_0 + \tau)$.

Аналогично (2.8), очевидно, имеет место полугрупповое свойство

---

* При замене ζ на $-\zeta$ и $\tau = 0$ из (7.2.5) следует (5.2.3).

$$x(t+\tau,\ \tau_0) = y(t,\ \tau_0+\tau)\ x(\tau,\ \tau_0). \tag{7.3.2}$$

Из симметрии левой части относительно t и τ следует

$$y(t,\ \tau_0+\tau)\ x(\tau,\ \tau_0) = y(\tau,\ \tau_0+t)x(t,\ \tau_0). \tag{7.3.3}$$

Вводя обозначение

$$G(\tau_0) = -\frac{\partial y(0,\ \tau_0)}{\partial \tau} \tag{7.3.4}$$

устремив $t\to 0$, в частности, для $y(\tau,\ \tau_0)$ получаем уравнение

$$-\frac{\partial y(\tau,\ \tau_0)}{\partial \tau_0} = G(\tau_0+\tau)\ y(\tau,\ \tau_0) - y(\tau,\ \tau_0)\ G(\tau_0), \tag{7.3.5}$$

обобщающее соотношение коммутативности (7.1.4).

С другой стороны, из физических соображений, очевидно,

$$\frac{\partial y(\tau,\ \tau_0)}{\partial \tau_0} = \psi(\tau_0+\tau)Az(\tau,\ \tau_0). \tag{7.3.6}$$

Из сравнения (7.3.5) и (7.3.6) с учетом (7.3.1) и соотношения $y\varphi = p$ окончательно находим

$$y(\tau,\ \tau_0)A - Ay(\tau,\ \tau_0) = [p(\tau,\ \tau_0) - \varphi(\tau_0+\tau)F + \psi(\tau_0+\tau)\bar{F}]A. \tag{7.3.7}$$

Здесь введены величины F и $\bar{F}$, согласно обозначениям

$$FA = Ay,\quad \bar{F}A = Az. \tag{7.3.8}$$

Заменив в (7.3.7) направление ζ первоначального движения кванта на обратное, найдем выражение для z, переходящее в частности, при $\tau = 0$, в выражение для оператора отражения от конечного слоя:

$$Ar + rA = \varphi A\varphi^* - \psi A\psi^*. \tag{7.3.9}$$

Для изотропного монохроматического рассеяния из (7.3.7) имеем

$$\frac{\eta-\zeta}{\eta}y(\tau,\ \tau_0,\ \eta,\ \zeta) = p(\tau,\ \tau_0,\ \eta) - \frac{\lambda}{2}\varphi(\tau_0+\tau,\ \eta)\ F(\tau,\ \tau_0,\ \zeta) + \frac{\lambda}{2}\psi(\tau_0+\tau,\ \eta)\ \bar{F}(\tau,\ \tau_0,\ \zeta), \tag{7.3.10}$$

а для некогерентного рассеяния, $A = \dfrac{\alpha(x')}{\zeta}$:

$$\begin{aligned}\zeta\left[\frac{\alpha(x')}{\zeta} - \frac{\alpha(x)}{\eta}\right]y(\tau,\ \tau_0,\ \eta,\ \zeta,\ x,\ x') = \alpha(x')p(\tau,\ \tau_0,\ \eta,\ x,\ x') -\\ -\frac{\lambda}{2}\int\varphi(\tau_0+\tau,\ \eta,\ x,\ x'')\ \alpha(x'')\ F(\tau,\ \tau_0,\ \zeta,\ x'',\ x')dx'' +\\ +\frac{\lambda}{2}\int\psi(\tau_0+\tau,\ \eta,\ x,\ x'')\ \alpha(x'')\ \bar{F}(\tau,\ \tau_0,\ \zeta,\ x'',\ x')\ dx''.\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

При $\tau=0$ отсюда, в соответствии с (7.3.9), следует

$$\left(\frac{\alpha(x)}{\tau_1}+\frac{\alpha(x')}{\tau}\right)r(\tau_0, \tau_1, \tau, x, x')=\frac{\lambda}{2\tau}\int\Big[\varphi(\tau_0, \tau_1, x, x'')\,\alpha(x'')\,\varphi^*(\tau_0, \tau, x'', x')- \tag{7.3.12}$$

$$-\psi(\tau_0, \tau_1, x, x'')\,\alpha(x'')\,\psi^*(\tau_0, \tau, x'', x')\Big]\,dx''.$$

Любопытно отметить, что выводу частных результатов, аналогичных (7.3.10) и (7.3.12), недавно посвящены отдельные работы [11, 12].

7.4. Шаровой слой. Как и в случае плоскопараллельных слоев, нетрудно установить линейную связь между решениями соответствующих задач для шаровых слоев конечной и «полубесконечной» толщин. При этом в роли последних выступают шар и бесконечная среда с шаровой полостью.

Пусть радиус полости равен R. Аналогично случаю плоскопараллельного полубесконечного слоя здесь имеет место полугрупповое соотношение, по виду совпадающее с (7.3.3) для слоя толщины $\tau_0=R$:

$$X(t+\tau, R)=Y(t, R+\tau)\,X(\tau, R). \tag{7.4.1}$$

Поэтому справедливы аналоги (7.3.4—7.3.5): $G(R)\equiv-\dfrac{\partial Y(0, R)}{\partial\tau}$,

$$-\frac{\partial Y(\tau, R)}{\partial R}=G(R+\tau)\,Y(\tau, R)-Y(\tau, R)\,G(R), \tag{7.4.2}$$

где $G(R)=[I-\varphi(R)]A$. Аналогичные результаты справедливы и для второго случая полубесконечного слоя—шара. Подробное исследование задачи о шаровом слое будет дано в отдельной работе.

7.5. Нелинейная задача. Для нелинейных задач X зависит также от интенсивности излучения u. Вместо полугруппового свойства (2.8) теперь будем, очевидно, иметь

$$X(\tau_1+\tau_2,u)=Y[\tau_1, X(\tau_2, u)]. \tag{7.5.1}$$

Рассмотрим величину $Y(d\tau, u)$. Учитывая, что $Y(0, u)=u$, имеем

$$Y(d\tau, u)=u-G(u)d\tau, \tag{7.5.2}$$

где обозначено

$$G(u)=-\frac{\partial Y(0, u)}{\partial\tau}. \tag{7.5.3}$$

Устремляя в (7.5.1) поочередно $\tau_1\to 0$ и $\tau_2\to 0$, находим

$$\frac{\partial Y(\tau, u)}{\partial\tau}=-G[Y(\tau, u)], \tag{7.5.4}$$

$$\frac{\partial Y(\tau, u)}{\partial\tau}=-\frac{\partial Y(\tau, u)}{\partial u}G(u). \tag{7.5.5}$$

Из сравнения последних двух уравнений получаем

$$G\Big[Y(\tau,\ u)\Big] = \frac{\partial Y(\tau,\ u)}{\partial u}\, G(u). \tag{7.5.6}$$

Введем первообразную

$$V(u) = \int \frac{du}{G(u)}. \tag{7.5.7}$$

Тогда из (7.5.4) находим

$$\frac{dY(\tau,\ u)}{G(Y)} = -\, d\tau, \tag{7.5.8}$$

или, интегрируя по τ от 0 до τ,

$$V[Y(\tau,\ u)] = V(u) - \tau. \tag{7.5.9}$$

Вводя обратную функцию V^{-1}, окончательно имеем

$$Y(\tau,\ u) = V^{-1}\{V(u) - \tau\}. \tag{7.5.10}$$

Зная оператор G отсюда можно получить оператор Y, а также $Z(\tau,u) = Y[\tau, R(u)]$. Для линейных задач $X(\tau,\ u) = X(\tau)u$.

Մ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

ԿԻՍԱՆՎԵՐՋ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում առաջարկվում է կիսանվերջ միջավայրից դուրս եկող ճառագայթման վերաբերյալ զանազան խնդիրների լուծման նոր մեթոդիկա։ Փաստորեն կառուցված է պարզ մաթեմատիկական ապարատ, որը հիմնվում է ինվարիանտության G օպերատորի հասկացողության վրա, և ըստ էության իրենից ներկայացնում է ոչ այլ ինչ, եթե ոչ ինվարիանտության ապարատ՝ Համբարձումյանի սովորական իմաստով։ Որպես օրինակներ, դիտարկվում են տեղափոխման տեսության համարյա բոլոր հայտնի պարզագույն խնդիրները կիսատարածության վերաբերյալ։

M. A. MNATSAKANIAN

ON THE SOLUTION OF RADIATION TRANSFER PROBLEM IN SEMIINFINITE MEDIUMS

Summary

Here is presented the new methodic for the solution of the radiative transfer problem in semiinfinite shells. The common mathematical apparatus based on the introducing of the invariancy operator G is constructed in this article. In fact it is the Ambartsumian's invariancy in the usual sence. As illustrations nearly all the known ordinary tasks are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян,* Научные труды, т. 1, Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1960.
2. *В. В. Соболев,* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., ГИТЛ, 1956.
3. *В. В. Соболев,* Рассеяние света в атмосферах планет, М., «Наукс», 1972.
4. *В. В. Иванов,* Перенос излучения и спектры небесных тел, М., «Наука», 1969.
5. *М. А. Мнацаканян,* ДАН СССР, 225, № 5, 1049, 1975.
6. *М. А. Мнацаканян,* Сообщ. Бюраканской обсерватории, 46, 93, 1975.
7. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян,* Сообщ. Бюраканской обсерватории, 46, 101, 1975.
8. *М. А. Мнацаканян,* Астрофизика, 11, 659, 1975.
9. *М. А. Мнацаканян,* Астрофизика, 12, 451, 1975.
10. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян,* ДАН СССР, 217, № 3, 533, 1974.
11. *Э. Х. Даниелян,* Астрофизика, 12, 579, 1976.
12. *О. В. Пикичян,* Сообщ. Бюраканской обсерватории, в печати.