М. А. МНАЦАКАНЯН

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА В ОДНОМЕРНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Хотя метод сложения слоев Амбарцумяна начиная с 1940 г. нашел широкое применение в теории переноса излучения, однако одна разновидность этого метода, в которой к рассматриваемой конечной среде добавляется не конечный слой, а слой полубесконечной толщины и ищутся оптические характеристики конечного слоя, осталась вне внимания. Между тем, по крайней мере в случае одномерной задачи, а возможно и в некоторых многомерных задачах, она оказывается более эффективной. Во всяком случае, при этом устанавливаются интересные соотношения между оптическими характеристиками конечного и полубесконечного слоев.

Мы проиллюстрируем сказанное на хорошо известном примере монохроматического рассеяния в одномерной однородной среде. В этом примере, вместо функциональных уравнений [1—3], мы получаем систему двух линейных алгебраических уравнений. В принципе так же просто решается задача монохроматического рассеяния в анизотропной одномерной среде.

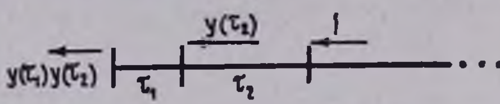
Заметим, что после своих исследований о рассеянии света в трехмерной среде В. А. Амбарцумян счел необходимым опубликовать применение метода сложения слоев к одномерной задаче [1, 3], обратив также внимание на доходящую почти до тривиальности простоту этого применения. В рассматриваемой задаче, конечно, ни в коем случае нельзя претендовать на новизну самих результатов. Тем не менее, мы публикуем данную заметку — с целью иллюстрации одного возможного подхода, применимого к гораздо более общим многомерным задачам [4].

I. ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

1. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть в однородной полубесконечной среде на глубине τ находится квант, движущийся влево, в направлении к выходу. После многократных рассеяний во всей среде

он с некоторой вероятностью $y(\tau)$ в конце концов выйдет из среды. Найдем эту вероятность.

Представим мысленно, что слой τ разбит на два слоя — τ_1 и τ_2. Тогда рассматриваемый квант должен выйти из полубесконечной среды, левой границей которой служит граница раздела слоев τ_1 и τ_2, с вероятностью



$y(\tau_2)$, а затем из полубесконечного слоя с глубины τ_1, с вероятностью $y(\tau_1)$. Следовательно,

$$y(\tau_1+\tau_2)=y(\tau_1)\,y(\tau_2),\quad y(0)=1. \tag{1}$$

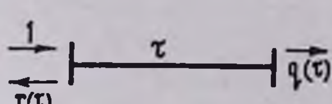
Отсюда находим

$$y(\tau)=e^{-k\tau}, \tag{2}$$

где k — постоянная, характеризующая свойства среды.

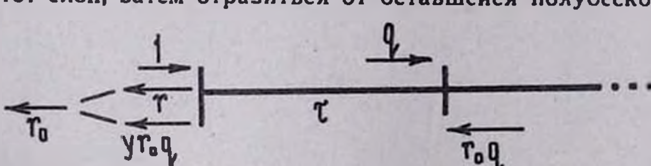
Введем еще коэффициент отражения от полубесконечной среды r_0 — вероятность того, что квант, падающий на полубесконечную среду, диффузно отразится от нее.

2. Обратимся теперь к задаче для слоя конечной толщины τ. Обозначим для него через $r(\tau)$ коэффициент отражения, а через $q(\tau)$ — коэффициент пропускания. Нашей целью является выразить их через r_0, то есть свести решение конечной задачи к решению полубесконечной.



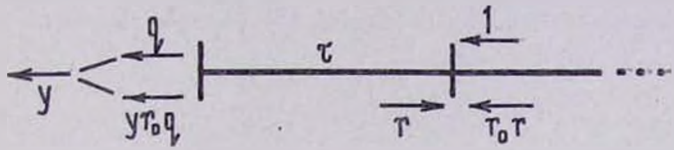
Выделим мысленно из полубесконечной среды слой толщины τ.

Квант, падающий на полубесконечную среду, диффузно отражается от нее с вероятностью r_0. С другой стороны, чтобы отразиться от среды, этот квант должен либо отразиться непосредственно от слоя τ, либо пройти через этот слой, затем отразиться от оставшейся полубесконечной среды и, падая на слой τ справа, в конце концов выйти из среды. Сказанное означает, что



$$r_0=r+qr_0y. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим квант на глубине τ в полубесконечной среде, движущийся влево. Он выйдет из среды с вероятностью $y(\tau)$. С другой стороны, чтобы выйти из среды, этот квант должен либо пройти непосредственно через слой τ, либо отразиться от этого слоя, затем от оставшегося полу-



бесконечного слоя и, падая на слой τ слева, в конце концов выйти из среды. Поэтому

$$y = q + rr_0 y. \tag{4}$$

Линейная система алгебраических уравнений (3—4) позволяет выразить коэффициенты отражения и пропускания для слоя конечной толщины через коэффициент отражения r_0 полубесконечного слоя:

$$r(\tau) = r_0 \frac{1 - e^{-2k\tau}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}, \tag{5}$$

$$q(\tau) = e^{-k\tau} \frac{1 - r_0^2}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}. \tag{6}$$

3. Величины r_0 и k сами определяются из тех же уравнений (5—6), если рассматривать последние для очень тонкого слоя.

При малых τ из (5—6) имеем

$$r(\tau) \approx r_0 \frac{2k\tau}{1 - r_0^2}, \quad q(\tau) \approx 1 - k\tau - 2k\tau \frac{r_0^2}{1 - r_0^2}.$$

С другой стороны, из физических соображений ясно, что при малых τ, если учитывать только однократно рассеянные кванты,

$$r(\tau) \approx \tau a, \quad q(\tau) \approx 1 - \tau + \tau x.$$

Здесь x и a — вероятности рассеяния поглощенного кванта соответственно по и против направления падения кванта. Вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния $\lambda = x + a$.

Сравнивая написанные для малых τ выражения друг с другом, легко получаем

$$k = \frac{a}{2} \frac{1 - r_0^2}{r_0}, \tag{7}$$

и квадратное уравнение относительно r_0: $ar_0^2 - 2(1 - x) r_0 + a = 0$, физическое решение которого есть

$$ar_0 = 1 - x - \sqrt{(1 - x)^2 - a^2}. \tag{8}$$

4. Перейдем теперь к случаю чистого рассеяния $\lambda=1$. Согласно (8), (7) и (2), $r_0=1$, $k=0$, $y(\tau)=1$, и каждое из уравнений (3—4) переходит в условие

$$r+q=1. \tag{9}$$

Решение задачи для чистого рассеяния можно, однако, получить предельным переходом $\lambda\to 1$ из решения (5—6). Устремляя $r_0\to 1$ и $k\to 0$ согласно (7), находим

$$r(\tau)=\frac{a\tau}{1+a\tau},\quad q(\tau)=\frac{1}{1+a\tau}. \tag{10}$$

5. Рассмотрим случай изотропного рассеяния $\alpha=x=\lambda/2$. Пусть в полубесконечной среде (простирающейся в бесконечность вправо) на глубине τ поглощен квант. Вероятность $p(\tau)$ выхода этого кванта из среды складывается из вероятности $\frac{\lambda}{2}\,y(\tau)$ того, что квант испустится влево и в конце концов выйдет из среды, и вероятности $\frac{\lambda}{2}\,r_0 y(\tau)$ того, что квант испустится вправо, затем отразится от расположенной правее полубесконечной среды и в конце концов выйдет из среды. Учитывая (2), получаем

$$p(\tau)=\lambda\,\frac{1+r_0}{2}\,e^{-k\tau}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь слой конечной толщины τ_0 и найдем вероятность $P(\tau)$ выхода кванта, поглощенного на глубине τ. Для этого добавим справа полубесконечный слой. Тогда вероятность выхода $p(\tau)$ кванта из суммарной полубесконечной среды, очевидно, равна

$$p(\tau)=P(\tau)+P(\tau_0-\tau)\,r_0 y(\tau_0). \tag{12}$$

Действительно, квант выйдет либо непосредственно из слоя τ_0, либо проникнув в добавленный полубесконечный слой (с вероятностью $P(\tau_0-\tau)$) и отразившись от него.

Добавим к рассматриваемому конечному слою полубесконечный слой слева. Тогда получим уравнение, отличающееся от (12) заменой τ на $\tau_0-\tau$. Складывая и вычитая эти два уравнения, получим отдельные уравнения для суммы $P(\tau)+P(\tau_0-\tau)$ и разности $P(\tau)-P(\tau_0-\tau)$. Найдя их и взяв от них полусумму, получим (сравни с [2], стр. 56):

$$P(\tau)=\lambda\,\frac{1+r_0}{2}\,\frac{1-r_0e^{-2k(\tau_0-\tau)}}{1-r_0^2e^{-2k\tau_0}}\,e^{-k\tau}. \tag{13}$$

Таким образом, не только задача об отражении и пропускании, но и нахождение внутреннего режима для конечного слоя также сводится к таковой для полубесконечной среды.

При чистом рассеянии из (12) следует $1=P(\tau)+P(\tau_0-\tau)$. Совершая, однако, в (13) предельный переход $\lambda\to 1$ и $k\to 0$ согласно (7), находим

$$P(\tau)=\frac{1+\tau_0-\tau}{2+\tau_0}.$$

6. Заметим, что составленные выше уравнения (3—4) соответствуют формальному переходу в функциональных уравнениях Амбарцумяна [1] к пределу при стремлении толщины добавляемого слоя к бесконечности. Естественно, что получаемые предельные уравнения будут выглядеть сравнительно просто: вместо системы двух нелинейных дифференциальных уравнений мы получаем систему двух линейных алгебраических уравнений. При этом величина $y(\tau) = e^{-k\tau}$ представляет собой предел отношения $q(\tau + \tau_2)/q(\tau_2)$ при $\tau_2 \to \infty$.

II. АНИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

1. Рассмотрим теперь более общий случай рассеяния в анизотропной среде. Такая постановка может оказаться формальной в задачах переноса излучения (разве лишь при наличии сильных магнитных полей), но она может быть интересна в вероятностных задачах о случайном блуждании. Свойство анизотропии среды состоит в следующем.

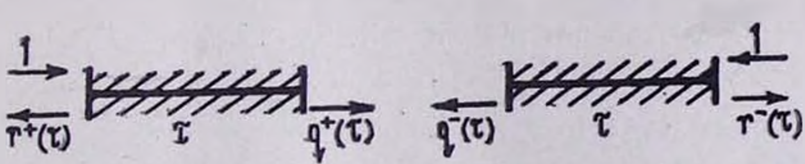
Если в среде поглощается квант, движущийся вправо, то он с вероятностью x^+ рассеивается в том же направлении и с вероятностью a^+ —влево. Если же поглощается квант, движущийся влево, то он с вероятностью x^- рассеивается в направлении падения и a^- — в обратном направлении. Вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния есть $\lambda^\pm = x^\pm + a^\pm$ (можно, в частности, принять $\lambda^+ = \lambda^-$).

Введем величины $y^+(\tau)$ и r_0^+, аналогичные $y(\tau)$ и r_0 из пункта 1.2, для одной ориентации полубесконечной анизотропной среды. Если полубесконечная среда имеет обратную ориентацию (перевернута), то для нее обозначим эти величины через $y^-(\tau)$ и r_0^-. Совершенно аналогично (1) и (2), рассматривая в отдельности каждую ориентацию, получаем

$$y^\pm(\tau) = e^{-k^\pm\tau}, \tag{14}$$

где постоянные $k^\pm$ характеризуют свойства среды в зависимости от ее ориентации. Знак (—) везде будет приписываться соответствующим величинам для перевернутой среды.

2. Обозначим через $r^\pm(\tau)$ коэффициенты отражения и $q^\pm(\tau)$ — коэффициенты пропускания для прямой и перевернутой анизотропной среды конечной толщины τ.



Рассуждения, аналогичные изотропному случаю, приводят к следующим линейным соотношениям для этих коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} r_0^+ &= r^+ + q^+ r_0^+ y^+ \\ y^+ &= q^- + r^- r_0^+ y^+ \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} r_0^- &= r^- + q^- r_0^- y^- \\ y^- &= q^+ + r^+ r_0^- y^- \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Решая первое уравнение из (15) со вторым из (16) и второе из (15) с первым из (16), находим

$$r^\pm(\tau) = r_0^\pm \frac{1 - e^{-2k\tau}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}, \tag{17}$$

$$q^\pm(\tau) = e^{-k^\mp \tau} \frac{1 - r_0^2}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}, \tag{18}$$

где введены обозначения $r_0^2 = r_0^+ r_0^-$, $2k = k^+ + k^-$.

Интересно заметить отсюда, что для слоя любой толщины

$$\frac{r^+(\tau)}{r^-(\tau)} = \frac{r_0^+}{r_0^-}, \qquad \frac{q^+(\tau)}{q^-(\tau)} = e^{(k^+ - k^-)\tau}.$$

Решения (17—18) выражают коэффициенты отражения и пропускания конечного слоя через коэффициент отражения $r_0^\pm$ полубесконечного слоя.

3. Чтобы определить постоянные $k^\pm$ и $r_0^\pm$, рассмотрим слой малой толщины τ. Из (17—18)

$$r^\pm(\tau) \approx r_0^\pm \frac{2k\tau}{1 - r_0^2}, \quad q^\pm(\tau) \approx 1 - \tau + \tau x^\pm.$$

С другой стороны, из физических соображений, для тонкого слоя

$$r^\pm(\tau) \approx \tau a^\pm, \qquad q^\pm(\tau) \approx 1 - x^\mp - a^\mp r_0^\pm.$$

Сравнивая их с предыдущими выражениями, получаем

$$r_0^\pm \frac{2k}{1 - r_0^2} = a^\pm, \qquad k^\pm = 1 - x^\mp - a^\mp r_0^\pm. \tag{19}$$

Легко видеть, что

$$r_0^+ / r_0^- = a^+ / a^-,$$

$$2k = k^+ + k^- = a^\pm \frac{1 - r_0^2}{r_0^\pm} = \frac{1}{r_0^\pm} [a^\pm - a^\mp (r_0^\pm)^2],$$

$$k^+ - k^- = a^+ - a^- = x^- - x^+.$$

Из двух последних соотношений, складывая их и вычитая, находим

$$k^\pm = \frac{1 - r_0^\pm}{2 r_0^\pm} (a^\pm + a^\mp r_0^\pm). \tag{20}$$

Сравнивая (20) с выражением для $k^{\pm}$ из (19), получаем квадратное уравнение $a^{\mp}(r_0^{\pm})^2 - (2 - x^+ - x^-) + a^{\pm} = 0$ относительно $r_0^{\pm}$, с решением

$$2a^{\mp} r_0^{\pm} = 2 - x^+ - x^- - \sqrt{(2 - x^+ - x^-)^2 - 4a^+ a^-}. \tag{21}$$

4. Рассмотрим случай чистого рассеяния в анизотропной среде. Положим для определенности $a^+ > a^-$. Из (21) при $\lambda^{\pm} = 1$ следует

$$r_0^+ = 1,\ r_0^- = a^-/a^+,\ k^+ = 0,\ \ k^- = a^+ - a^- = x^- - x^+. \tag{22}$$

Из (18) имеем

$$q^+(\tau) = e^{-k^-\tau}\frac{1 - r_0^-}{1 - r_0^- e^{-k^-\tau}} = \frac{1}{1 + A\,(e^{k^-\tau} - 1)}, \tag{23}$$

где обозначено $A \equiv \dfrac{1}{1 - r_0^-} = a^+/(a^+ - a^-) = a^+/k^-$.

С помощью $q^+(\tau)$ определяются и остальные коэффициенты:

$$q^-(\tau) = e^{k^-\tau}\, q^+(\tau),\ r^+ = 1 - q^+,\ r^- = 1 - q^-.$$

Заметим [3], что при чистом рассеянии анизотропная полубесконечная среда частично прозрачна в одном направлении: $q^-(\tau) \to 1 - r_0^-$ при $\tau \to \infty$. Это и понятно, так как для анизотропной среды коэффициенты отражения r_0^+ и r_0^- должны отличаться друг от друга и поэтому хотя бы один из них должен быть меньше единицы.

5. Легко найти также вероятности выхода кванта с некоторой глубины из слоя конечной толщины, вполне аналогично тому, как это было сделано для случая изотропной среды, по величинам $r_0^{\pm}$ и $y^{\pm}(\tau)$, характеризующим полубесконечную среду. Заметим, что в задаче о внутреннем режиме для конечного слоя фигурирует комбинация $Z(\tau) = r_0 y(\tau)$, а не $y(\tau)$ и r_0 в отдельности, в отличие от задачи нахождения коэффициентов отражения и пропускания.

6. Целью нашей заметки было проиллюстрировать на простейшем примере, как можно свести решение конечной задачи к решению той же задачи для полубесконечного слоя. Это удается сделать не только для отражения и пропускания, но и для внутреннего режима. Зная решение для полубесконечного слоя и функцию, характеризующую его, решение для конечного слоя находим из системы двух линейных алгебраических уравнений, в то время как в обычном методе сложения слоев конечная задача сводится к решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. Такая простота позволила нам без труда решить и задачу для анизотропной среды; обычным методом она сводится к очень «запутанной» системе нелинейных дифференциальных уравнений.

17 апреля 1972 г.

Մ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

ՄԻԱՉԱՓ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Ճառագայթման տեսության մեջ լայն կիրառություն ունեցող Համբարձումյանի շերտերի գումարման եղանակը ըստ երևույթին կարելի է կատարելագործել՝ եթե դիտարկել այն տարատեսակը, երբ ուսումնասիրվող շերտին ավելացվում է ոչ թե վերջավոր, այլ կիսանվերջ հաստության շերտ։ Համենայնդեպս դա թույլ է տալիս վերջավոր և կիսանվերջ շերտերի օպտիկական հատկությունների միջև ստանալ հետաքրքիր առնչություններ։ Նշված տեսակետից քննարկվում է միաչափ միջավայրում մոնոխրոմատիկ ճառագայթման տեղափոխման հայտնի խնդիրը՝ այն բերվում է երկու գծային հանրահաշվական հավասարումների։ Նմանապես պարզ է լուծվում խնդիրը միաչափ ոչ իզոտրոպ միջավայրի դեպքում։

M. A. MHATSAKANIAN

ON THE SOLUTION OF ONE-DIMENTIONAL TRANSPORT PROBLEN

Summary

Seems, Ambartsumian's shell-adding method can be perfected, if the variation of the method is considered when not a finite but infinite shell is added to the shell which optical characteristics we are interested in. The common case of monochromatic light transfer into an one dimentional homogen medium is discussed as an illustration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Ереван, 1961, стр. 263.
2. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, М., 1967.
3. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Ереван, 1961, стр. 278.
4. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 1974.