

Р. П. СААКЯН

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПАДАЮЩЕГО ТЕЛА

Свободно падающее тело отклоняется к востоку. Это явление объясняется вращением Земли вокруг своей оси. Как известно, движущиеся тела на Земле получают добавочное Кориолисово ускорение. Дело в том, что и точки поверхности Земли и падающие тела вследствие обращения вокруг оси вращения Земли имеют „ускорение инерции“. Из разниц этих ускорений образуется данное добавочное ускорение. Однако известно, что ось вращения Земли в свою очередь имеет движение, которое должно влиять на движение падающего тела.

В работе [1] показано, что вследствие движения точки поверхности Земли, вращения Земли вокруг своей оси и под воздействием других тел в движении падающего тела возникает добавочное ускорение

$$S = 2 \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \bar{\omega} \right] + [\bar{\omega} [\bar{r} \bar{\omega}]] + \left[\bar{r} \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right],$$

где $\bar{\omega}$ определяется в виде

$$\bar{\omega} = \left[\bar{i} \frac{d\bar{i}}{dt} \right],$$

— \bar{i} —единичный вектор, направленный по направлению ускорения центра масс системы.

Исследование [1] показывает, что в $\bar{\omega}$ важную роль играет ускорение точки поверхности под воздействием Солнца. Поэтому мы в данной статье сделали попытку определить отклонение падающего тела с учетом влияния Солнца. Вычисления показывают, что влияние Солнца на это движение, главным образом, выражается ускорением инерции, возникающим под воздействием Солнца. Поэтому при решении данной задачи учитывалось только ускорение инерции, а ускорением возмущения тяготения, вызванным Солнцем, мы пренебрегли. Оказывается, что несмотря на то, что в уравнении движения падаю-

щего тела непосредственно ускорение возмущения тяготения Солнца отсутствует, влияние его на движение падающего тела мы учитываем через ускорение инерции.

Рассмотрим движение материальной точки P под действием силы тяжести Земли, находящейся под углом φ северной широты и на высоте H от поверхности Земли.

Подвижную координатную систему, жестко связанную с Землей, выбираем следующим образом: ось Oz_2 направляем по отвесу (кажущаяся вертикаль) вверх, ось Ox_2 — в плоскости меридиана к югу, ось Oy_2 — по параллели к востоку. O — положение наблюдателя.

Выберем невращающуюся неподвижную координатную систему $OXYZ$. Плоскость XOY совместим с экваториальной плоскостью Земли, ось OX направим в сторону точки весеннего равноденствия, ось OY направим вправо, ось OZ — параллельно оси вращения Земли на север (рис. 1). Плоскость эклиптики назовем плоскостью x_1Oy_1 координатной системы $Ox_1y_1z_1$, ось абсцисс которой совпадает с осью OX . Угол между эклиптической и экваториальной плоскостью обозначим через ϵ_0 (рис. 2). Часовой угол радиуса-вектора \vec{a} , направленный против вращения часовой стрелки, обозначим h . Значение $h = 0$ соответствует верхней кульминации Солнца. Обозначим через β угол между OX и R , определяющий положение Солнца при годичном движении.

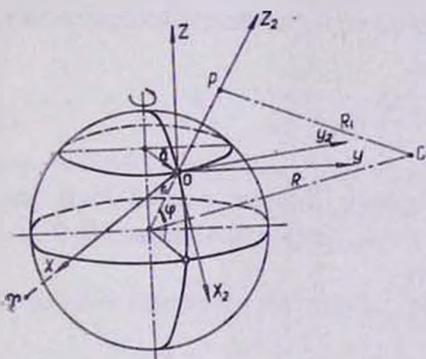


Рис. 1.
'вж. 1.

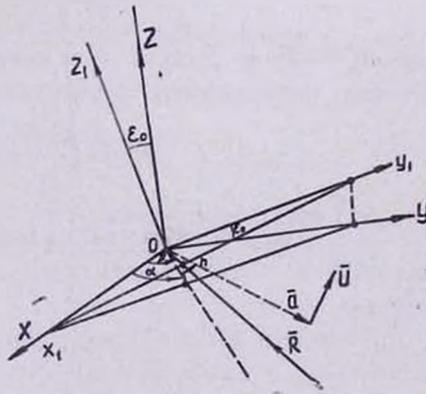


Рис. 2.
'вж. 2.

Точка O является также началом отсчета основной вращающейся координатной системы. Согласно [1], основной вращающейся координатной системой считается система, имеющая угловую скорость

$$\vec{\omega} = \left[\vec{i} \frac{d\vec{i}}{dt} \right]$$

по отношению к неподвижной системе, где \vec{i} — единичный вектор, направленный противоположно ускорению центра масс системы,

а оси имеют направление векторов \bar{i} , $\frac{d\bar{i}}{dt}$, $\bar{\omega}$, составляющих правую систему. В той же работе [1] показывается, что при решении уравнения движения, ошибка, образуемая от пренебрежения малых величин одного и того же порядка, гораздо меньше при использовании основной вращающейся системы по сравнению с другими системами. Поэтому решим уравнение падающего тела в основной вращающейся системе.

Составим уравнение движения падающего тела по отношению к точке поверхности O . Уравнение движения точки O поверхности относительно центра Земли в невращающейся координатной системе выразится уравнением

$$\frac{d^2 \bar{r}_0}{dt^2} = -\omega_0^2 \bar{a}, \quad (1)$$

где \bar{r}_0 — радиус-вектор Земли для данной широты φ , \bar{a} — радиус-вектор точки O , считая от оси вращения Земли, ω_0 — угловая скорость вращения Земли.

Уравнение падающего тела относительно центра Земли в невращающейся координатной системе выразится в виде

$$\frac{d^2 \bar{\rho}}{dt^2} = -G \frac{m_0}{\rho^3} \bar{\rho} + F, \quad (2)$$

где m_0 — масса Земли, F — возмущающее ускорение Солнца и других тел, определяемое формулой

$$F = G \frac{M}{R^3} \bar{R} - G \frac{M}{R_1^3} \bar{R}_1 + F_0, \quad (3)$$

$\bar{\rho}$ — радиус-вектор, соединяющий центр Земли с точкой P . В формуле (3) R — расстояние между центрами Земли и Солнца, R_1 — расстояние от точки P до центра Солнца.

Разность (2) и (1) даст уравнение движения падающего тела по отношению к точке поверхности

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \omega_0^2 \bar{a} - G \frac{m_0}{\rho^3} \bar{\rho} + G \frac{M}{R^3} \bar{R} - G \frac{M}{R_1^3} \bar{R}_1 + F_0. \quad (4)$$

Так как точка поверхности имеет криволинейное движение, а падающее тело имеет некоторую скорость по отношению к точке поверхности, то в относительном движении возникает добавочное ускорение

$$S = 2 \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \bar{\omega} \right] + [\bar{\omega} [r \bar{\omega}]] + \left[\bar{r} \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right]. \quad (5)$$

Уравнение движения (4) в подвижной координатной системе выразится в виде

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \omega_0^2 \bar{a} - G \frac{m_0}{r^3} \bar{\rho} + 2 \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \bar{\omega} \right] + [\bar{\omega} [\bar{r} \bar{\omega}]] + \left[\bar{r} \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right] + G \frac{M}{R^3} \bar{R} - G \frac{M}{R_1^3} \bar{R}_1 + F_0. \quad (6)$$

Если в (5) $\bar{\omega}$ принять за угловую скорость основной вращающейся системы, то Δ будет являться частью инерционного ускорения, образующегося в результате вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца, а $\frac{d\bar{r}}{dt}$ будет скоростью падающего тела по отношению к точке поверхности в указанной системе.

Как было указано выше, угловая скорость $\bar{\omega}$ вращения основной вращающейся координатной системы по отношению к системе XYZ определяется выражением

$$\bar{\omega} = \left[\bar{i} \frac{d\bar{i}}{dt} \right],$$

где

$$\bar{i} = - \frac{\bar{g}}{|\bar{g}|}.$$

\bar{g} — ускорение центра масс системы в инерциальной системе координат, которое определяется в виде

$$\bar{g} = - \omega_0^2 \bar{a} - G \frac{M}{R^3} \bar{R} - G \frac{m_1}{r_1^3} \bar{r}_1 - f. \quad (7)$$

Здесь учтены ускорение, образующееся вследствие вращения Земли вокруг своей оси, а также действие Солнца, Луны и других тел.

Учитывая, что в формуле (7) слагаемое

$$G \frac{m_1}{r_1^3} \bar{r}_1 + f \quad (8)$$

является малой величиной по отношению к двум остальным слагаемым, им можно пренебречь. Иначе говоря, пренебрегаем действием Луны и других тел на падающее тело. Таким образом, для определения единичного вектора \bar{i} находим следующее приближенное выражение

$$\bar{i} = \frac{\bar{a} + K\bar{R}}{|\bar{a} + K\bar{R}|}, \quad (9)$$

где

$$K = G \frac{M}{\omega_0^2 R^3}.$$

Итак, в отличие от уравнения падающего тела

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = g_0 + 2 \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \bar{\omega}_0 \right] + [\bar{\omega}_0 [\bar{r} \bar{\omega}_0]], \quad (10)$$

известного из курса теоретической механики, получено уравнение (6) движения падающего тела в основной вращающейся координатной системе. Сопоставление уравнений движения (10) и (6) показывает, что в уравнении (10) не учитывается действие криволинейного движения центра Земли на падающее тело.

Учитывая, что в (6) слагаемое

$$[\bar{\omega} [\bar{r} \bar{\omega}]] + \left[\bar{r} \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right] + G \frac{M}{R^3} \bar{R} - G \frac{M}{R_1^3} \bar{R}_1 + F_0$$

есть величина того же порядка, что и возмущающее ускорение Луны пренебрегаем им. Следовательно, дифференциальное уравнение движения падающего тела приближенно можно представить в виде

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \omega_0^2 \bar{a} - G \frac{m_0}{\rho^3} \bar{\rho} + 2 \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \bar{\omega} \right]. \quad (11)$$

Подставляя в (11) выражение векторного произведения

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt} \bar{\omega} \right] = \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \left[\bar{i} \frac{d\bar{i}}{dt} \right] \right] = \bar{i} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} \right) - \frac{d\bar{i}}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \bar{i} \right),$$

получаем

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \omega_0^2 \bar{a} - G \frac{m_0}{\rho^3} \bar{\rho} + 2\bar{i} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} \right) - 2 \frac{d\bar{i}}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \bar{i} \right). \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение движения (12) получено в основной вращающейся координатной системе \bar{i} , $\frac{d\bar{i}}{dt}$, $\bar{\omega}$. Эту систему назовем системой *хуз*. Приведем уравнение (12) к системе дифференциальных уравнений первого порядка и учитывая, что

$$i_x = |\bar{i}| = 1, \quad i_y = 0, \quad i_z = 0; \quad \left(\frac{d\bar{i}}{dt} \right)_x = 0, \quad \left(\frac{d\bar{i}}{dt} \right)_y = \left| \frac{d\bar{i}}{dt} \right|, \quad \left(\frac{d\bar{i}}{dt} \right)_z = 0,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= W_x, & \frac{dy}{dt} &= W_y, & \frac{dz}{dt} &= W_z, \\ \frac{dW_x}{dt} &= \omega_0^2 a_x - Gm_0 \rho_x (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)^{-\frac{3}{2}} + 2 \left| \frac{d\bar{i}}{dt} \right| W_y, \\ \frac{dW_y}{dt} &= \omega_0^2 a_y - Gm_0 \rho_y (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)^{-\frac{3}{2}} - 2 \left| \frac{d\bar{i}}{dt} \right| W_x, \\ \frac{dW_z}{dt} &= \omega_0^2 a_z - Gm_0 \rho_z (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right\} (13)$$

x, y, z — проекции радиуса-вектора \bar{r} , W_x, W_y, W_z — проекции скорости $\frac{d\bar{r}}{dt}$ в той же системе xyz .

Для упрощения задачи примем движение Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца за равномерное. Линейная скорость точки O $\bar{V} = \frac{d\bar{R}}{dt}$ вследствие вращения Земли вокруг Солнца находится в плоскости эклиптики, а скорость той же точки вследствие вращения Земли вокруг своей оси $\bar{U} = \frac{d\bar{a}}{dt}$ находится в экваториальной плоскости и направлена в сторону вращения Земли.

Углы β и h выразим через угловые скорости ω_1 и ω_0 , где

$$\omega_1 = \frac{V}{R}, \quad \omega_0 = \frac{U}{a}$$

модули угловых скоростей.

Имеем

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

где T_1 — период годового обращения Земли, T_0 — период обращения Земли вокруг своей оси.

Угол β определяется по формуле

$$\beta = \beta_0 + \omega_1 t, \tag{14}$$

где $\beta_0 = \omega_1 t_1$ — начальная фаза, а t_1 — день проведения опыта. При $t_1 = 0$ Солнце находится в точке γ (рис. 2).

Угол h определяется по формуле

$$h = h_0 + \omega_0 t, \tag{15}$$

где h_0 — начальная фаза, а $t = 0$ — час дня проведения опыта.

Угол α является проекцией угла β на плоскости экватора. Значение α_0 соответствует начальной фазе β_0 .

Из рис. 2 получим

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta \cos \varepsilon_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \varepsilon_0}}, \quad \cos \alpha = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \varepsilon_0}} \quad (16)$$

Проектируя векторы \bar{a} и \bar{u} на координатные оси системы XYZ , находим

$$\left. \begin{aligned} a_X &= a \cos(\alpha_0 + h), & U_X &= -U \sin(\alpha_0 + h), \\ a_Y &= a \sin(\alpha_0 + h), & U_Y &= U \cos(\alpha_0 + h), \\ a_Z &= 0, & U_Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Проектируя векторы \bar{R} и \bar{V} на оси системы $x_1 y_1 z_1$, и, переходя к системе XYZ (табл. 1), получим

$$\left. \begin{aligned} R_X &= -R \cos \beta & V_X &= V \sin \beta, \\ R_Y &= -R \sin \beta \cos \varepsilon_0, & V_Y &= -V \cos \beta \cos \varepsilon_0, \\ R_Z &= -R \sin \beta \sin \varepsilon_0, & V_Z &= -V \cos \beta \sin \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Введем обозначения углов между осями $x_1 y_1 z_1$ новой системы и XYZ старой системы координат (см. табл. 2).

Таблица 1

	Ox	Oy	Oz
Ox_1	1	0	0
Oy_1	0	$\cos \varepsilon_0$	$\sin \varepsilon_0$
Oz_1	0	$-\sin \varepsilon_0$	$\cos \varepsilon_0$

Таблица 2

	Ox	Oy	Oz
Ox	α_1	β_1	γ_1
Oy	α_2	β_2	γ_2
Oz	α_3	β_3	γ_3

Направляющие косинусы осей Ox , Oy и Oz относительно системы XYZ определяются следующим образом.

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= i_x, & \cos \beta_1 &= i_y, & \cos \gamma_1 &= i_z \\ \cos \alpha_2 &= \frac{\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\right)_X}{\left|\frac{d\bar{i}}{dt}\right|}, & \cos \beta_2 &= \frac{\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\right)_Y}{\left|\frac{d\bar{i}}{dt}\right|}, & \cos \gamma_2 &= \frac{\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\right)_Z}{\left|\frac{d\bar{i}}{dt}\right|}, \\ \cos \alpha_3 &= \frac{\omega_x}{|\omega|}, & \cos \beta_3 &= \frac{\omega_y}{|\omega|}, & \cos \gamma_3 &= \frac{\omega_z}{|\omega|}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Выразим новые координаты через старые. Применяя формулы преобразования координат при вращении, имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= X \cos \alpha_1 + Y \cos \beta_1 + Z \cos \gamma_1, \\ y &= X \cos \alpha_2 + Y \cos \beta_2 + Z \cos \gamma_2, \\ z &= X \cos \alpha_3 + Y \cos \beta_3 + Z \cos \gamma_3, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Имея в виду значения

$$\begin{aligned} a &= r_0 \cos \varphi, \\ \bar{\rho} &= \bar{r}_0 + \bar{r}, \\ r_{OX} &= r_0 \cos \varphi \cdot \cos (\alpha_0 + h), \\ r_{OY} &= r_0 \cos \varphi \cdot \sin (\alpha_0 + h), \\ r_{OZ} &= r_0 \sin \varphi, \end{aligned}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} a_x &= r_0 [\cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_1 + \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_1] \cos \varphi, \\ a_y &= r_0 [\cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_2 + \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_2] \cos \varphi, \\ a_z &= r_0 [\cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_3 + \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_3] \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= x + r_0 [\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_1 + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_1 + \\ &\quad + \sin \varphi \cos \gamma_1] \\ \rho_y &= y + r_0 [\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_2 + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_2 + \\ &\quad + \sin \varphi \cos \gamma_2], \\ \rho_z &= z + r_0 [\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_3 + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_3 + \\ &\quad + \sin \varphi \cos \gamma_3]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Определим проекции вектора $\bar{\omega}$ в системе XYZ. Производная по времени (9) дает

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{\bar{U} + K\bar{V}}{|\bar{a} + K\bar{R}|} - \frac{\bar{a} + K\bar{R}}{|\bar{a} + K\bar{R}|} \cdot \frac{(\bar{U} + K\bar{V}) \cdot (\bar{a} + K\bar{R})}{|\bar{a} + K\bar{R}|^2}. \quad (23)$$

Подставляя в $\bar{\omega} = \left[\bar{i} \frac{d\bar{i}}{dt} \right]$ значения (9) и (23), имеем

$$\bar{\omega} = \frac{(\bar{a} + K\bar{R}) \times (\bar{U} + K\bar{V})}{|\bar{a} + K\bar{R}|^2},$$

или в проекциях

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{(a_y + KR_y)(U_z + KV_z) - (a_z + KR_z)(U_y + KV_y)}{|\bar{a} + K\bar{R}|^2}, \\ \omega_y &= \frac{(a_z + KR_z)(U_x + KV_x) - (a_x + KR_x)(U_z + KV_z)}{|\bar{a} + K\bar{R}|^2}, \\ \omega_z &= \frac{(a_x + KR_x)(U_y + KV_y) - (a_y + KR_y)(U_x + KV_x)}{|\bar{a} + K\bar{R}|^2}. \end{aligned} \right\}$$

Из (17) и (18) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_x + KR_x}{KR} &= \lambda \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) - \cos \beta, \\ \frac{a_y + KR_y}{KR} &= \lambda \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) - \sin \beta \cos \varepsilon_0, \\ \frac{a_z + KR_z}{KR} &= -\sin \beta \sin \varepsilon_0, \\ \frac{U_x + KV_x}{KR} &= -\omega_0 \lambda \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) + \omega_1 \sin \beta, \\ \frac{U_y + KV_y}{KR} &= \omega_0 \lambda \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) - \omega_1 \cos \beta \cos \varepsilon_0, \\ \frac{U_z + KV_z}{KR} &= -\omega_1 \cos \beta \sin \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь постоянная λ определяется формулой

$$\lambda = \frac{r_0}{KR} = \frac{r_0 \omega_0^2 R^2}{GM} \quad (26)$$

Имея в виду (9) и (19), получим

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{a_x + KR_x}{|\bar{a} + K\bar{R}|}, \\ \cos \beta_1 &= \frac{a_y + KR_y}{|\bar{a} + K\bar{R}|}, \\ \cos \gamma_1 &= \frac{a_z + KR_z}{|\bar{a} + K\bar{R}|}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Так как

$$\left| \frac{d\bar{i}}{dt} \right| = |\bar{\omega}|,$$

$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt} \right)_x = \omega_y i_z - \omega_z i_y,$$

$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\right)_Y = \omega_Z i_X - \omega_X i_Z,$$

$$\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\right)_Z = \omega_X i_Y - \omega_Y i_X,$$

то из (19) получим

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \cos \gamma_1 \cos \beta_3 - \cos \beta_1 \cos \gamma_3, \\ \cos \beta_2 &= \cos \alpha_1 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_3, \\ \cos \gamma_2 &= \cos \beta_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_3 &= \frac{\omega_X}{\sqrt{\omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2}}, \\ \cos \beta_3 &= \frac{\omega_Y}{\sqrt{\omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2}}, \\ \cos \gamma_3 &= \frac{\omega_Z}{\sqrt{\omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где проекции $\bar{\omega}$ определяются формулами (24).

В подвижной координатной системе $x_2 y_2 z_2$ начальные условия (при $t = 0$) будут следующие

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= 0, & y_2 &= 0, & z_2 &= H, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0, & \frac{dy_2}{dt} &= 0, & \frac{dz_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Направляющие косинусы осей системы $x_2 y_2 z_2$ в системе XYZ имеют вид (табл. 3).

Таблица 3

	OX	OY	OZ
Ox_2	$\sin \varphi \cos (\alpha_0 + h)$	$\sin \varphi \sin (\alpha_0 + h)$	$-\cos \varphi$
Oy_2	$-\sin (\alpha_0 + h)$	$\cos (\alpha_0 + h)$	0
Oz_2	$\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h)$	$\cos \varphi \sin (\alpha_0 + h)$	$\sin \varphi$

По формулам преобразования координат имеем

$$\left. \begin{aligned} X &= x_2 \sin \varphi \cos (\alpha_0 + h) - y_2 \sin (\alpha_0 + h) + z_2 \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h), \\ Y &= x_2 \sin \varphi \sin (\alpha_0 + h) + y_2 \cos (\alpha_0 + h) + z_2 \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h), \\ Z &= -x_2 \cos \varphi + z_2 \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Подставляя значения (31) в (20) и учитывая начальные условия (30), получим

$$\begin{aligned}
 x^0 &= H[\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \cos \alpha_{10} + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \cos \beta_{10} + \\
 &\quad + \sin \varphi \cos \gamma_{10}], \\
 y^0 &= H[\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \cos \alpha_{20} + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \cos \beta_{20} + \\
 &\quad + \sin \varphi \cos \gamma_{20}], \\
 z^0 &= H[\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \cos \alpha_{30} + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \cos \beta_{30} + \\
 &\quad + \sin \varphi \cos \gamma_{30}].
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{H} \frac{dx^0}{dt} &= -\omega_0 \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \cos \alpha_{10} + \omega_0 \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \times \\
 &\quad \times \cos \beta_{10} + \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \frac{d \cos \alpha_{10}}{dt} + \\
 &\quad + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \frac{d \cos \beta_{10}}{dt} + \sin \varphi \frac{d \cos \gamma_{10}}{dt},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{H} \frac{dy^0}{dt} &= -\omega_0 \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \cos \alpha_{20} + \omega_0 \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \times \\
 &\quad \times \cos \beta_{20} + \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \frac{d \cos \alpha_{20}}{dt} + \\
 &\quad + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \frac{d \cos \beta_{20}}{dt} + \sin \varphi \frac{d \cos \gamma_{20}}{dt},
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{H} \frac{dz^0}{dt} &= -\omega_0 \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \cos \alpha_{30} + \omega_0 \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) + \\
 &\quad \times \cos \beta_{30} + \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h_0) \frac{d \cos \alpha_{30}}{dt} + \\
 &\quad + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h_0) \frac{d \cos \beta_{30}}{dt} + \sin \varphi \frac{d \cos \gamma_{30}}{dt}.
 \end{aligned}$$

Пользуясь значениями

$$x_2 = X \sin \varphi \cos (\alpha_0 + h) + Y \sin \varphi \sin (\alpha_0 + h) - Z \cos \varphi,$$

$$y_2 = -X \sin (\alpha_0 + h) + Y \cos (\alpha_0 + h),$$

$$z_2 = X \cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) + Y \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) + Z \sin \varphi,$$

$$X = x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3,$$

$$Y = x \cos \beta_1 + y \cos \beta_2 + z \cos \beta_3,$$

$$Z = x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3,$$

получим

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x [\sin \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_1 + \sin \varphi \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_1 - \\
 &- \cos \varphi \cos \gamma_1] + y [\sin \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_2 + \sin \varphi \sin (\alpha_0 + h) \times \\
 &\times \cos \beta_2 - \cos \varphi \cos \gamma_2] + z [\sin \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_3 + \\
 &+ \sin \varphi \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_3 - \cos \varphi \cos \gamma_3], \\
 y_2 &= x [-\sin (\alpha_0 + h) \cos \alpha_1 + \cos (\alpha_0 + h) \cos \beta_1] + \\
 &+ y [-\sin (\alpha_0 + h) \cos \alpha_2 + \cos (\alpha_0 + h) \cos \beta_2] + \\
 &+ z [-\sin (\alpha_0 + h) \cos \alpha_3 + \cos (\alpha_0 + h) \cos \beta_3], \\
 z_2 &= x [\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_1 + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_1 + \\
 &+ \sin \varphi \cos \gamma_1] + y [\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_2 + \\
 &+ \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) \cos \beta_2 + \sin \varphi \cos \gamma_2] + \\
 &+ z [\cos \varphi \cos (\alpha_0 + h) \cos \alpha_3 + \cos \varphi \sin (\alpha_0 + h) \times \\
 &\times \cos \beta_3 + \sin \varphi \cos \gamma_3].
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Полученные величины смещений x_2 и y_2 в (34) являются отклонениями от вертикали падающего тела соответственно к югу и к востоку.

Решения уравнений (11)* сведены в табл. 4**, а решения уравнения (10) и данные наблюдений приведены в табл. 5 [3].

Таблица 4

Широта	Высота (м)	Отклонение y_2 (мм)				
		B_0 h_0	0°	90°	180°	270°
50°53'	158,5	0°	27.62	22.15	27.62	31.93
		90°	27.62	23.61	27.61	30.97
		180°	27.62	24.46	27.62	30.36
		270°	27.62	23.61	27.62	30.98

Из таблицы 4 видно, что отклонение падающего тела от вертикали зависит не только от угловой скорости вращения Земли, но

* Числовые примеры по уравнению (11) решены на электронно-вычислительной машине Раздан-2 методом Рунге-Кутты [2] в вычислительном центре НИИ Автоматики г. Кировакана.

** Применяемые постоянные: радиус Земли — $r_0 = 6,37 \cdot 10^8$ см, масса Земли — $m_0 = 5,96 \cdot 10^{27}$ гр, расстояние центра Земли от Солнца — $R = 1,495 \cdot 10^{13}$ см, масса Солнца — $M = 1,97 \cdot 10^{33}$ гр, гравитационная постоянная — $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³/гр. сек², период обращения Земли вокруг своей оси — $T_0 = 23^h 56^m 4^s$, 091, период годичного обращения Земли $T_1 = 366, 2422$ T_0 , угол наклона эклиптики — $\epsilon_0 = 23^\circ 27'$.

Таблица

Наблюдатель	Место опытов	Широта	Число опытов	Высота (м)	Отклонение Δ (м.м)	
					Вычисленное	Наблюденное
Гуглиемини, 1791	Боловья	40°30'	16	78.3	11.3	19±2.5
Бенценберг, 1802	Гамбург	53°33'	31	76.34	8.7	9.0±3.6
Бенценберг, 1804	Шлеебуш	51°25'	29	85.1	10.4	11.5±2.9
Рейх, 1831	Фрейбурп	50°53'	106	158.5	27.5	28.3±4.0
Холл, 1902	Кэмбридж	42°22',8	948	23.0	1.77	1.5±0.05
Фламмарнон, 1903	Париж	48°50',8	144	68.0	8.1	6.3
Хаген, 1912	Рим	41°54'	66	22.95	0.899	0.899±0.02

и от положения Солнца в момент проведения опыта. Данные показывают, что отклонения падающего тела, полученные по формуле (11) отличаются от отклонений, вычисленных по формуле (10), на 0—20%/%. Эту разницу можно объяснить тем, что в формуле (10) не учитывается влияние Солнца.

Кировоаваканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

17 апреля 1970 г.

Ռ. Պ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՎԱՅՐ ԸՆԿՆՈՂ ՄԱՐՄՆԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Քննարկված է Երկրագնդի պտտման առանցքի կորագիծ շարժման ազդեցությունը վայր ընկնող մարմնի շարժման վրա:

[1] աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ Երկրագնդի պտտման հետևանքով և այլ մարմինների ազդեցության շնորհիվ վերոհիշյալ շարժման մեջ առաջանում է լրացուցիչ արագացում՝

$$s = 2 \left[\frac{dr}{dt} \bar{\omega} \right] +$$

որտեղ՝

$$\bar{\omega} = \left[i \frac{di}{dt} \right].$$

— i միավոր վեկտոր է՝ ուղղված սիստեմի զանգվածի կենտրոնի արագացման ուղղությամբ:

Պարզվում է, որ $\bar{\omega}$ -ի մեջ Արեգակի ձգողական ուժի արագացումը կարևոր դեր է կատարում: Հաշվումները ցույց են տալիս, որ Արեգակի ազդեցությունը սովորական շարժման վրա զլխավորապես արտահայտվում է ինտեգրի լրացուցիչ արագացման միջոցով [1], Այդ պատճառով խնդրի լուծման ժամանակ հաշվի է առնված վերջին արագացումը, իսկ Արեգակի ձգողական ուժի խանգարող արագացումը արհամարհված է:

Շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը ոչ պտտողական կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ արտահայտված է (4)-ով, իսկ հիմնական պտտողական կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ՝ (6)-ով [1], որը իր էությունով տարբերվում է հայտնի (10) հավասարումից: Հավասարում (6)-ը մոտավորությամբ զրված է (11)-ի տեսքով:

(11) հավասարման լուծման արդյունքները բերված են աղյուսակ 4-ում, իսկ (10)-ի լուծման արդյունքները և դիտումների սովյալները՝ աղյուսակ 5-ում:

Աղյուսակ 4-ից երևում է, որ ընկնող մարմնի շեղումը կախված է ոչ միայն Երկրագնդի պտտման արագությունից, այլ նաև, փորձը կատարելու պահին Արեգակի դիրքից: Այդ սովյալները ցույց են տալիս, որ (11) հավասարումով գտնված շեղումները տարբերվում են (10) հավասարումով գտնված շեղումներից 0—20%-ով, որը բացատրվում է նրանով, որ բանաձև (10)-ում Արեգակի ազդեցությունը հաշվի չի առնված:

4 և 5 աղյուսակներից երևում է, որ (11) բանաձևով գտնված արդյունքները շեն հակասում դիտումների սովյալներին:

R. P. SAHAKIAN

ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF FALLING BODIES

S u m m a r y

The influence of curvilinear motion of the Earth's rotation axis on the motion of falling bodies is considered.

In paper [1] it was shown that because of the rotation of the Earth and the influence of other bodies an additional acceleration appears in the motion of falling bodies

$$s = 2 \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \bar{\omega} \right] +$$

where

$$\bar{\omega} = \left[i \frac{di}{dt} \right],$$

and $-i$ is an unit vector directed towards the acceleration of the system's mass.

It has become evident that in ω the acceleration of the gravity force of the Sun plays an important part. Calculations show that the influence of the Sun on this motion is mainly expressed by the additional acceleration of the inertia [1]. For this reason in the solution of the problem the last acceleration was taken into account but the disturbing acceleration of the gravity force of the Sun was neglected.

The differential equation of the motion for the non-rotary coordinate system is expressed by (4), and for the fundamental rotary coordinate system—by (6) [1], which differs from the well-known equation (10). The equation (6) is written with approximation in the form of (11).

The results of the solution of equation (11) are given in Table 4, and the results of the solution of equation (10) and observational data—in Table 5.

It is seen from Table 4 that the deviation of the falling bodies depends not only upon the velocity of the Earth's rotation, but also upon the position of the Sun at the time of experiments.

The data show that the deviations found by the equation (11) differ from those of (10) by 0–20%, which may be the result of the neglect of the influence of the Sun.

The Tables 4 and 5 show that the results obtained from equation (11) are not in discordance with observational data.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Саакян. Об ускорении инерции, возникающем в относительном движении под воздействием внешних сил, 1969 г, Ереван.
2. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова, Численные методы анализа, М., 1963 г.
3. Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье, Курс теоретической механики. Том 2, М., 1955 г.

