Р. С. ВАРДАНЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН

# ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Применение метода самосогласованных оптических глубин, введенного в теорию переноса излучения В. А. Амбарцумяном [1, 2], дало возможность строго рассмотреть ряд нелинейных задач [3—5].

Следует отметить, что можно расширить круг применимости идеи о самосогласовании, связанном также с разными другими параметрами, характеризующими оптические свойства среды и состояние поля излучения.

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть плоско-параллельный слой равномерно заполнен атомами, которые могут находиться в двух состояниях—основном и ионизованном. Обозначим через $E_0 = h\nu_0$ энергию активации отдельного атома, через $z_0$ полную геометрическую толщину слоя, а через $n$—число атомов в 1 $см^3$. Последнее постоянно в среде.

Пусть среда сверху освещена излучением, распределение которого по направлениям и частотам описывается интенсивностью $I_\nu^0(r)$. Тогда в каждой точке среды с геометрической глубиной $z$ создается определенное поле излучения $I_\nu(z, r)$, распределение атомов по состояниям и распределение свободных электронов по энергиям.

Обозначим через $n_1 = n_1(z)$ и $n^+ = n^+(z)$ концентрацию неионизованных и ионизованных атомов соответственно на глубине $z$.

При этом

$$n_1(z) + n^+(z) = n. \tag{1}$$

Обозначим также через $n_e(\nu, z)\,d\nu$ число свободных электронов в 1 $см^3$ на глубине $z$ с энергиями $E = h(\nu - \nu_0) \leqslant E \leqslant h(\nu - \nu_0) + h_0\,d\nu$.

Ввиду предположения об отсутствии дважды и более ионизованных атомов имеем

$$\int_{\nu_0}^{\infty} n_e(\nu, z)\,d\nu = n^+(z). \tag{2}$$

Будем предполагать, что имеет место максвелловское распределение свободных электронов по энергиям с некоторой температурой $T_e$, постоянной для всей среды и зависящей от интегральных характеристик состояния поля излучения.

Такое предположение обусловлено большей подвижностью свободных электронов по сравнению с ионами.

Согласно сделанному предположению,

$$n_e(\nu, z) = n^+(z) f(\nu, T_e), \tag{3}$$

где

$$f(\nu, T_e) = \frac{8\pi m^2 h}{(2\pi mkT_e)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{h(\nu-\nu_0)}{kT_e}} (\nu - \nu_0). \tag{4}$$

Уравнение переноса имеет следующий вид:

$$\eta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} = -I_\nu k_\nu [n_1 - \varphi(\nu, T_e)(n^+)^2] + \frac{1}{2} \varphi_4(\nu, T_e)(n^+)^2; \tag{5}$$

с условиями

$$I_\nu(0, \eta) = I_\nu^0(\eta), \quad \text{при} \quad \eta > 0 \quad \text{и} \quad I_\nu(z_0, \eta) = 0, \quad \text{при} \quad \eta < 0. \tag{6}$$

Условие стационарности дает

$$-\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{k_\nu}{h\nu} S_\nu [n_1 - \varphi_1(\nu, T_e) n^{+2}]\, d\nu + \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\varphi_4(\nu, T_e)}{h\nu} n^{+2}\, d\nu -$$

$$- n_1 n^+ \psi_1(T_e) + n^{+2} \psi_3(T_e), \tag{7}$$

где

$$S_\nu = \int_{-1}^{1} I_\nu\, dr; \qquad \psi_3(T_e) = \psi_2(T_e) + \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\varphi_4(\nu, T_e)}{h\nu} d\nu,$$

$k_\nu$ — коэффициент поглощения, приходящийся на один неионизованный атом;

$$\varphi(\nu, T_e) = \varphi_1(\nu, T_e) + \varphi_2(\nu, T_e) + \varphi_3(\nu, T_e), \text{ притом:}$$

$\varphi_1(\nu, T_e)\, n^{+2}$ — учитывает отрицательное поглощение,
$\varphi_2(\nu, T_e)\, n^{+2}$ — учитывает поглощение свободными электронами,
$\varphi_3(\nu, T_e)\, n^{+2}$ — учитывает вынужденные свободно-свободные переходы с излучением,
$\psi_1(T_e)\, n_1 n^+$ — учитывает электронные удары первого рода,
$\psi_2(T_e)\, n^{+2}$ — учитывает электронные удары второго рода,
$\varphi_4(\nu, T_e)\, n^{+2}$ — учитывает рекомбинации электронов на ионах.

$\varphi_4(\nu, T_e)$ можно представить в виде $\varphi_4(\nu, T_e) = \beta_1(\nu) f(\nu, T_e)$, где $\beta_1(\nu)$ — эффективное поперечное сечение захвата электрона с энергией $h\nu$ на основной уровень.

При решении задачи значение электронной температуры $T_e$ будем считать заданным. После решения задачи (при всех значениях этого параметра $T_e$) его можно определить из условия баланса энергии свободных электронов.

Займемся формальным решением уравнений (5), (7) при произвольных функциях $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$, $\psi_1$, $\psi_2$.

Представим функции $\varphi(\nu, T_e)$ и $\psi(\nu, T_e)$ в виде

$$\varphi(\nu, T_e) = \bar{\varphi}(T_e) + [\varphi(\nu, T_e) - \bar{\varphi}(T_e)], \tag{8}$$

$$\varphi_1(\nu, T_e) = \bar{\varphi}_1(T_e) + [\varphi_1(\nu, T_0) - \bar{\varphi}_1(T_e)], \tag{9}$$

где функции $\varphi - \bar{\varphi}$ и $\varphi_1 - \bar{\varphi}_1$ должны удовлетворять требованию

$$\| \varphi - \bar{\varphi} \|_{C,(0<\nu<\infty)} = \min, \tag{10}$$

$$\| \varphi_1 - \bar{\varphi}_1 \|_{C,(0<\nu<\infty)} = \min. \tag{11}$$

Из условий (10) и (11) следует

$$\bar{\varphi}(T_e) = \frac{1}{2}[\min_{\nu\in(0,\infty)} \varphi(\nu, T_e) + \max_{\nu\in(0,\infty)} \varphi(\nu, T_e)], \tag{12}$$

$$\bar{\varphi}_1(T_e) = \frac{1}{2}[\min_{\nu\in(0,\infty)} \varphi_1(\nu, T_e) + \max_{\nu\in(0,\infty)} \varphi_1(\nu, T_e)]. \tag{13}$$

Целесообразность представления функций $\varphi$ и $\varphi_1$ в виде (8) и (9) будет ясна из дальнейшего изложения.

Рассмотрим следующее уравнение относительно функции $F(\nu, z, \eta, \varepsilon, T_e)$:

$$\eta \frac{\partial F}{\partial r} = -Fk_\nu[n_1 - \bar{\varphi}(T_e) n^{+2}] + \varepsilon F[\varphi - \bar{\varphi}]k_\nu n^{+2} + \frac{1}{2}\varphi_4(\nu, T_e) n^{+2}; \tag{14}$$

с условиями

$$F(\nu, 0, \eta, \varepsilon, T_e) = I_\nu^0(\eta) \text{ при } \eta > 0 \text{ и } F(\nu, z_0, \eta, \varepsilon, T_e) = 0 \text{ при } \eta < 0. \tag{15}$$

Связь между $n_1$, $n^+$ и $F$ дается соотношениями

$$-U[n_1 - \bar{\varphi}_1 n^{+2}] + \varepsilon V n^{+2} - \psi_1 n_1 n^+ + \psi_2 n^{+2}; \tag{16}$$

и

$$n_1 + n^+ = n, \tag{17}$$

где

$$U = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{k_\nu}{h\nu} d\nu \int_{-1}^{1} F d\eta; \tag{18}$$

$$V = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{k_\nu}{h\nu} d\nu. \tag{19}$$

Очевидно, что

$$F(\nu, z, \eta, 1, T_e) = I_\nu (z, \eta, T_e). \tag{20}$$

Представим функции $F$, $U$, $V$, $n_1$, $n^+$ в виде разложения по степеням $\varepsilon$:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \varepsilon^k, \tag{21}$$

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \varepsilon^k, \tag{22}$$

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \varepsilon^k, \tag{23}$$

$$n_1 = \sum_{k=0}^{\infty} n_{1k} \varepsilon^k, \tag{24}$$

$$n^+ = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^+ \varepsilon^k. \tag{25}$$

Для функции $F_0$ получаем

$$\eta \frac{\partial F_0}{\partial z} = - k_\nu F_0 [n_{10} - \bar{\varphi} n_0^{+2}] + \frac{1}{2} \varphi_4 n_0^{+2}, \tag{26}$$

$$- U_0 [n_{10} - \bar{\varphi}_1 n_0^{+2}] + n_0^{+2} \psi_3 - n_{10} n_0^+ \psi_1 = 0, \tag{27}$$

где

$$U_0 = U(z, 0, T_e) = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{k_\nu}{h\nu} d\nu \int_{-1}^{1} F dr. \tag{28}$$

Займемся определением функции $F_0$.

Следуя методу самосогласованных оптических глубин, введем $y$ посредством соотношения

$$dy = k_0 [n_{10} - \bar{\varphi}(T_e) n_0^{+2}] dz, \tag{29}$$

$$y = k_0 \int_0^z [n_{10} - \bar{\varphi}(T_e) n_0^{+2}] dz, \tag{30}$$

$$u_0 = k_0 \int_0^{z_0} [n_{10} - \overline{\varphi}(T_e)\, n_0^{+2}]\, dz, \tag{31}$$

где $k_0 = k_{\nu_0}$.

$y_0$ пока не определено.

Обозначив $F_0(\nu, z, \eta, T_e) = F_0^*(\nu, y, \eta, T_e)$, а $U_0(z, \eta, T_e) = U_0^*(y, \eta, T_e)$, вместо (26) получим

$$\eta \frac{\partial F_0^*}{\partial y} = -\overline{k}_\nu F_0^* + \frac{1}{2}\varphi_4 \frac{n_0^{+2}}{k_0 [n_{10} - \overline{\varphi} n_0^{+2}]}, \tag{32}$$

где $\overline{k}_\nu = \dfrac{k_\nu}{k_0}$.

Решение уравнения (32) с условиями (15) (при $\varepsilon = 0$) сводится к решению следующего интегрального уравнения относительно функции

$$U_0^*(y, T_e) = \int_0^\infty \frac{k_\nu}{h_\nu} d\nu \int_0^1 I_\nu^0(\eta)\, e^{-\frac{\overline{k}_\nu y}{\eta}} d\eta + \int_0^{y_0} \frac{n_0^{+2}}{k_0[n_{10} - \overline{\varphi} n_0^{+2}]} K_0(|y - y_1|)\, dy_1 \tag{33}$$

где ядро $K_0(x)$ имеет следующий вид

$$K_0(x) = \int_0^\infty \frac{k_\nu \varphi_4(\nu, T_e)}{h\nu} E_i(\overline{k}_\nu x)\, d\nu. \tag{34}$$

Из (17) и (27) $n_{10}$ и $n_0^+$ выражается через $U_0$

$$n_0^+ = \frac{-U_0 + n\psi_1 - \sqrt{D}}{2[\overline{\varphi}_1 U_0 + \psi_1 + \psi_3]}, \tag{35}$$

$$n_{10} = n - \frac{-U_0 + n\psi_1 - \sqrt{D}}{2[\overline{\varphi}_1 U_0 + \psi_1 + \psi_3]}, \tag{36}$$

где $D = (U_0 - n\psi_1)^2 - 4U_0 n[\overline{\varphi}_1 U_0 + \psi_1 + \psi_3]$.

Подставляя их выражения в (33), получим интегральное уравнение собственно гаммерштейнова типа относительно функции

$$U_0^*(y, y_0, T_e) = \int_0^\infty \frac{k_\nu}{h\nu} d\nu \int_0^1 I_\nu^0(\eta)\, e^{-\frac{\overline{k}_\nu y}{\eta}} d\eta + \int_0^{y_0} \Phi(U_0^*)\, K_0(|y - y_1|)\, dy_1. \tag{37}$$

В случае $\psi_1 = 0$ выражение для $\Phi(U_0^*)$ принимает следующий простой вид:

$$\Phi(U_0^*) = \frac{U_0^*}{[\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_1] U_0^* + \psi_3}. \tag{38}$$

Для определения значения параметра $y_0$ нужно пользоваться соотношением

$$z_0 = \int_0^{y_0} \frac{dy}{k_0 [n_{10} - \bar{\varphi}(T_e) n_0^{+2}]}, \tag{39}$$

где вместо $n_{10}$ и $n_0^+$ нужно подставить их выражения из (35) и (36) через $U_0^*$, причем $U_0^* = U_0^*(y, y_0, T_e)$ — решение уравнения (38).

Воспользовавшись соотношениями (21), (24), (25) и уравнениями (14), (17), относительно функции $F_1(\nu, z, \eta, T_e)$ получаем следующее уравнение

$$\eta \frac{\partial F_1}{\partial z} = -k_\nu F_1 [n_{10} - n_0^{+2} \bar{\varphi}] + n_1^+ [k_\nu F_0 (1 + 2\bar{\varphi} n_0^+) + \varphi_4 n_0^+] \tag{40}$$

с условиями

$$F_1(\nu, 0, \eta, T_e) = 0 \text{ при } \eta > 0 \text{ и } F_1(\nu, z_0, \eta, T_e) = 0 \text{ при } \eta < 0. \tag{41}$$

Используя соотношения (22), (24), (25), (17) и уравнение (16), получим

$$n_1^+ = \frac{U_1 [n_{10} - 2n_0^{+2} \bar{\varphi}_1] - V_0 n_0^{+2}}{2n_0^+ \psi_3 + n_0^+ \psi_1 - n_{10} \psi_1 - 2\bar{\varphi}_1 U_0 n_0^+}. \tag{42}$$

Переходя в уравнении (40) к аргументу $y$ посредством соотношения (29) и подставляя вместо $n_1^+$ его выражение через $U_1^*(y, T_e)$ (причем $U_1^*(y, T_e) = U_1(z, T_e)$), получаем следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $F_1^*(y, T_e) = F_1(z, T_e)$

$$\eta \frac{\partial F_1^*}{\partial y} = -\bar{k}_\nu F_1^* + W_1 U_1^* + W_2 \tag{43}$$

с условиями

$$F_1^*(\nu, 0, \eta, T_e) = 0 \text{ при } \eta > 0 \text{ и } F_1^*(\nu, y_0, \eta, T_e) = 0 \text{ при } \eta < 0, \tag{44}$$

где

$$W_1(y, \nu, \eta, T_e) = \frac{[n_{10} - n_0^{+2} \bar{\varphi}_1][\bar{k}_\nu F_0 (1 + 2\bar{\varphi} n_2^+) + \varphi_4 n_0^+]}{k_0 [n_{10} - n_0^{+2} \bar{\varphi}] [2n_0^+ \psi_2 + n_0^+ \psi_1 - n_{10} \psi_1 + 2\bar{\varphi}_1 n_0^+ U_0^+]}, \tag{45}$$

$$W_2(y, \nu, \eta, T_e) = \frac{[\varphi - \bar{\varphi}]\,\bar{k}_\nu F_0 n^{+2}}{k_0\,[n_{10} - n_0^{+2}\bar{\varphi}]} -$$

$$- \frac{V_0 n_0^{+2}\,[k_\nu F_0 (1 + 2\bar{\varphi} n_0^+) + \varphi_4 n_0^+]}{k_0\,[n_{10} - n_0^{+2}\bar{\varphi}]\,[2\psi_3 n_0^- + n_0^+ \psi_1 - n_{10}\psi_1 - 2\varphi_1 n_0^- U_0^+]}. \qquad (46)$$

Уравнение (43) с условиями (44) эквивалентно следующему линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$U_1^*(y, T_e) = g_1(y, T_e) + \int_0^{y_0} U_1^*(y, T_e)\, K_1(y, |y - y_1|)\, dy_1, \qquad (47)$$

где

$$K_1(x, y) = \int_0^\infty \frac{k_\nu}{h\nu}\, d\nu \int_0^1 W_1(x, \nu, \eta, T_e)\, e^{-\frac{\bar{k}_\nu y}{\eta}}\, \frac{d\eta}{\eta}, \qquad (48)$$

$$g_1(y, T_e) = \int_0^{y_0} dy_1 \int_0^\infty \frac{k_\nu}{h\nu}\, d\nu \int_0^1 W_2(y, \nu, \eta, T_e)\, e^{-\frac{\bar{k}_\nu |y - y_1|}{\eta}}\, \frac{d\eta}{\eta}. \qquad (49)$$

Отметим, что определение функций $F_k(y, T_e) = F_k(z, T_e)$ $k \geqslant 2$ также сводится к решению линейных уравнений Фредгольма второго рода.

Из (20) и (21) следует

$$I_\nu(z, \eta, T_e) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\nu, z, \eta, 1, T_e) \approx F_0 + F_1, \qquad (50)$$

или, переходя к аргументу $y$, имеем

$$I_\nu^*(y, \eta, T_e) \approx F_0^*(\nu, y, \eta, T_e) + F_1^*(\nu, y, \eta, T_e). \qquad (51)$$

Напомним, что при решении задачи значение электронной температуры $T_e$ считалось неизвестным. Для определения $T_e$ можно пользоваться следующим соотношением, выражающим условие баланса энергии свободных электронов во всей среде

$$\int_0^{y_0} \frac{dy}{n_{10} - \bar{\varphi} n_0^{+2}} \left\{ \int_{\nu_0}^\infty k_\nu S_\nu \left[ \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right)(n_1 - \varphi_1 n^{+2}) + n^{+2}(\varphi_3 - \varphi_3) \right] d\nu + \right.$$

$$\left. + [n^{+2}\psi_3 - n_1 n^+ \psi_1]\, h\nu_0 \right\} = 0. \qquad (52)$$

В заключение авторы выражают благодарность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение и ценные замечания.

Институт физических исследований
АН АрмССР
Институт математики и механики
АН АрмССР

15 апреля 1968 г.

Ռ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

## ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՍՊԵԿՏՐՈՒՄ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՄԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Դիտարկվում է հարթ-զուգահեռ շերտում անընդհատ սպեկտրում ճառագայթման տեղափոխման ոչ գծային խնդիրը, եթե միջավայրը կազմող ատոմները ունեն երկու՝ հիմնական և իոնացված վիճակներ։ Խնդրի լուծման համար կիրառվում է Համբարձումյանի՝ ինքնահամաձայնեցված օպտիկական խորությունների մեթոդը։*

R. S. VARDANIAN, N. B. YENGIBARIAN

## ON ONE PROBLEM OF THE RADIATION TRANSFER IN CONTINUUM

### S u m m a r y

The non-linear problem of the radiation transfer in the plane-parallel layers, when the layers consist of atoms with two energetic levels—basic and ionisation, is considered.

For solution of the problem Ambarzumian's mothod of self-coordinated optical depths is aplicated.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 39, 159, 1964.
2. *В. А. Амбарцумян*, Сб. Теория звездных спектров, М., 1966.
3. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 297, 1965.
4. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 2, 31, 1966.
5. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 3, 281, 1967.