В. Ю. ТЕРЕБИЖ

ИОНИЗАЦИЯ В ДВИЖУЩИХСЯ ОБОЛОЧКАХ БОЛЬШОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

В настоящее время теория ионизационного равновесия оболочек, окружающих звезды, достаточно подробно разработана для наиболее часто встречающегося на практике случая, когда оптическая толщина среды в частотах субординатных континуумов τ_{ic}^{0} не превосходит единицы [1—3]. Так обстоит дело, например, в планетарных туманностях, оболочках звезд типа WR и ряда других нестационарных звезд. Как показал впервые В. А. Амбарцумян [1], в случае $\tau_{ic}^{0} \ll 1$ проблема сводится к рассмотрению отдельно диффузии L_c-излучения и излучения в спектральных линиях.

Задача сильно усложняется, когда ионизациями из возбужденных состояний нельзя пренебречь. Тогда степень ионизации зависит не только от величины падающего на оболочку потока от внешних источников излучения, но и от характера движения оболочки, поскольку от этого фактора зависит населенность возбужденных уровней [2]. При этом даже в случае $\tau_{ic}^{0} \lesssim 1$ роль ионизаций из возбужденных состояний может быть значительной [2, 3]. Теория ионизации в оболочках большой оптической толщины ($\tau_{ic}^{0} > 1$) важна при изучении ранних стадий эволюции планетарных туманностей и новых звезд.

В данной работе рассматривается диффузия излучения в движущейся плоскопараллельной среде, состоящей из атомов с тремя уровнями, причем третий уровень соответствует ионизованному состоянию. Согласно [3], такой подход возможен, если под статистическим весом третьего уровня понимать величину

$$g_3 = g^{+} \frac{(2\pi mkT_e)^{3/2}}{n_e h^3}, \tag{1}$$

а также ввести эффективные ширины $\Delta\nu_{13}$ и $\Delta\nu_{23}$. Считается далее, что электронная концентрация n_e постоянна в среде и настолько мала, что переходами под действием электронных ударов можно пренебречь. Оптическая толщина среды в частотах ν_{13}, ν_{12} и ν_{23} может быть произвольной.

I

Пусть на единицу площади одной из границ слоя падает πS_{ik} квантов за 1 *сек* в частоте ν_{ik} от внешних источников излучения. Если пренебречь отрицательным поглощением, то уравнения переноса излучения в частотах ν_{13} и ν_{23}, соответствующих континууму, имеют вид

$$\eta \frac{dI_{13}}{dz} = -\alpha_{13}(1+\varkappa) I_{13} + n_3 \frac{A_{31} h\nu_{13}}{4\pi\Delta\nu_{13}}, \qquad (2)$$

$$\eta \frac{dI_{23}}{dz} = -\alpha_{23} I_{23} + n_3 \frac{A_{32} h\nu_{23}}{4\pi\Delta\nu_{23}}, \qquad (3)$$

где I_{ik} — интенсивность полного излучения (прямого и диффузного), идущего на глубине z под углом $\arccos\eta$ к нормали; α_{ik} — объемный коэффициент поглощения

$$\alpha_{ik} = n_i \frac{B_{ik} h\nu_{ik}}{c\Delta\nu_{ik}}, \qquad (4)$$

а величина $\varkappa$ в уравнении (2) учитывает общее поглощение

$$\varkappa = \frac{\alpha'_{13}}{\alpha_{13}}, \qquad (5)$$

где α'_{13} — коэффициент общего поглощения за границей основной серии.

При рассмотрении излучения в спектральной линии следует учитывать характер движения среды. Если оболочка движется с градиентом скорости, то часть квантов, излучаемых данным объемом в линии, выходит из среды вследствие эффекта Допплера. Согласно теории движущихся оболочек звезд В. В. Соболева [2], можно принять

$$n_2 A_{21} - (1+\varkappa_1) n_1 B_{12} \rho_{12} \simeq n_2 A_{21} \frac{\beta}{3}, \qquad (6)$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\alpha'_{12}}{\alpha_{12}}, \qquad (7)$$

α'_{12} — коэффициент общего поглощения в спектральной линии;
ρ_{12} — плотность излучения в линии

$$\rho_{12} = \frac{1}{c}\int I_{12} d\omega, \qquad (8)$$

а величина β следующим образом выражается через градиент скорости $\frac{dv}{dz}$ и среднюю тепловую скорость атомов u в среде

$$\beta = \frac{1}{2u\alpha_{12}} \frac{dv}{dz}. \tag{9}$$

Вводя оптическую глубину за границей основной серии

$$\tau = \int_0^z \alpha_{13} dz \tag{10}$$

и обозначая $q = \alpha_{13}/\alpha_{12}$, получаем

$$\beta = \frac{q}{2u} \frac{dv}{d\tau}. \tag{11}$$

Обычно величина $\beta \ll 1$. Мы будем считать в дальнейшем, что β не меняется в оболочке.

Обратимся теперь к условиям стационарности. Для 1-го и 2-го уровня эти условия имеют вид

$$\begin{gathered} n_1 B_{12}\rho_{12} + n_1 B_{13}\rho_{13} = n_2 A_{21} + n_3 A_{31}, \\ n_2 A_{21} + n_2 B_{23}\rho_{23} = n_1 B_{12}\rho_{12} + n_3 A_{32}. \end{gathered} \tag{12}$$

Вводя здесь величины

$$K_{ik} = I_{ik} \frac{\Delta\nu_{ik}}{h\nu_{ik}}, \qquad C_{ik} = \frac{n_k A_{ki}}{4\pi\alpha_{ik}}, \tag{13}$$

получаем

$$\begin{gathered} C_{12} - \overline{K}_{12} = -q\,(C_{13} - \overline{K}_{13}), \\ C_{12} - \overline{K}_{12} = sC_{12}\,(C_{23} - \overline{K}_{23}), \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\overline{K}_{ik} = \int K_{ik} \frac{d\omega}{4\pi}. \tag{15}$$

При выводе второго из уравнений (14) мы воспользовались соотношением

$$\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{12}} = sC_{12}, \tag{16}$$

где постоянная

$$s = \frac{4\pi B_{23} h\nu_{23}}{cA_{21}\Delta\nu_{23}}. \tag{17}$$

Пусть далее p обозначает вероятность рекомбинации на первый уровень

$$p = \frac{A_{31}}{A_{31} + A_{32}}. \tag{18}$$

Тогда

$$\frac{\alpha_{13} C_{13}}{\alpha_{23} C_{23}} = \frac{p}{1-p} \tag{19}$$

и из соотношений (16) и (19) находим

$$C_{13} = \frac{ps}{q(1-p)} C_{12} C_{23}. \tag{20}$$

Перепишем еще уравнения переноса излучения, вводя величины C_{ik} и K_{ik}. Подставляя выражения (13) в (2), (3) и (6), получаем

$$\begin{gathered}
\eta \frac{dK_{13}}{d\tau} = C_{13} - (1+\varkappa) K_{13}, \\
\eta \frac{dK_{23}}{d\tau} = \frac{s}{q} C_{12} (C_{23} - K_{23}), \\
C_{12} = \left(1 + \varkappa_1 + \frac{\beta}{3}\right) \overline{K}_{12}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Уравнения (14), (20) и (21) представляют собой систему шести уравнений, служащих для нахождения функций $K_{ik}(\tau)$ и $C_{ik}(\tau)$. Для решения этой системы воспользуемся методом Эддингтона. Из первых двух уравнений (21) имеем

$$\frac{d^2 \overline{K}_{13}}{d\tau^2} = -3(1+\varkappa)\left[C_{13} - (1+\varkappa)\overline{K}_{13}\right], \tag{22}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{C_{12}} \frac{d\overline{K}_{23}}{d\tau}\right] = -\frac{3s^2}{q^2} C_{12} (C_{23} - \overline{K}_{23}). \tag{23}$$

Исключая из уравнений (14) и (20)—(23) величины C_{ik}, находим

$$\left.\begin{gathered}
\frac{d^2 \overline{K}_{13}}{d\tau^2} = \frac{3}{q}(1+\varkappa)\left(\varkappa_1 + \frac{\beta}{3}\right)\overline{K}_{12} + 3\varkappa(1+\varkappa)\overline{K}_{13} \\
\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{\overline{K}_{12}} \frac{d\overline{K}_{23}}{d\tau}\right] = -\frac{3s}{q^2}\left(\varkappa_1 + \frac{\beta}{3}\right)\overline{K}_{12} \\
\overline{K}_{23} = \frac{q(1-p)}{ps} \frac{\overline{K}_{13}}{\overline{K}_{12}} - \frac{\varkappa_1 + \frac{\beta}{3}}{ps}
\end{gathered}\right\} \tag{24}$$

Таким образом, мы получили систему трех уравнений, в которые входят только $\overline{K}_{ik}$. Из (24) нетрудно получить одно уравнение для функции $\overline{K}_{13}(\tau)$. Введем следующие обозначения:

$$\overline{K}_{13}(\tau) = S_{13} y(\tau), \tag{25}$$

$$a = \frac{1-p}{p}(1+\varkappa)^3 \left(\frac{\beta + 3\varkappa_1}{s S_{13}}\right)^2, \tag{26}$$

$$b = 3\varkappa(1+\varkappa). \tag{27}$$

Тогда искомое уравнение имеет вид

$$a \frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{y'' - by} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{y}{y'' - by}\right)\right] = -y'' + by. \tag{28}$$

Вид граничных условий для уравнения (28) зависит от конкретной задачи, которую необходимо решить.

Знание функции $y(\tau)$ позволяет определить степень возбуждения и ионизации атомов в среде. Из (13) имеем:

$$\frac{n_k}{n_1} = \frac{4\pi}{c} \frac{B_{1k}}{A_{k1}} \frac{h\nu_{1k}}{\Delta\nu_{1k}} C_{1k}, \qquad (k = 2,\ 3). \tag{29}$$

Полагая здесь $k = 3$ и подставляя C_{13} из уравнения (22), находим, что степень ионизации равна

$$\frac{n_3}{n_1}(\tau) = \frac{4\pi B_{13} h\nu_{13}}{c A_{31} \Delta\nu_{13}} S_{13}(1+\varkappa)\left[y(\tau) - \frac{1}{3(1+\varkappa)^2} y''(\tau)\right]. \tag{30}$$

Следует отметить, что в случае неподвижной оболочки (если не учитывать общее поглощение) из соотношений (26), (28) и (30) следует, что степень ионизации линейно зависит от оптической глубины τ. Этот вывод был сделан впервые В. А. Амбарцумяном [3].

II

Перейдем теперь к решению основного уравнения (28). Домножая его на выражение, стоящее в (28) в квадратных скобках, получаем

$$\frac{a}{2}\left[\frac{1}{y'' - by} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{y}{y'' - by}\right)\right]^2 = -\frac{y}{y'' - by} + A, \tag{31}$$

где A—произвольная постоянная. Введем в (31) функцию $\xi(y)$ согласно формуле

$$\frac{dy}{d\tau} = \xi(y). \tag{32}$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка для $\xi(y)$

$$\frac{a}{2}\left[\frac{\xi}{\xi\xi' - by}\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{\xi\xi' - by}\right)\right]^2 = -\frac{y}{\xi\xi' - by} + A. \tag{33}$$

Если в (33) обозначить

$$V(\xi) = \frac{y}{\xi\xi' - by}, \tag{34}$$

то для $V(\xi)$ получается уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{a}{2}\left[(1 + bV)\frac{dV}{d\xi}\right]^2 = A - V, \tag{35}$$

откуда

$$-2\sqrt{A - V}\left(1 + \frac{2Ab}{3} + \frac{b}{3}V\right) = D \pm \sqrt{\frac{2}{a}}\,\xi. \tag{36}$$

Таким образом, функция $V(\xi)$ может считаться известной. Перепишем (34) в виде

$$y\,dy = \frac{V(\xi)\,\xi\,d\xi}{1 + bV(\xi)}. \tag{37}$$

Отсюда следует

$$y^2 = 2\int\frac{V(\xi)\,\xi\,d\xi}{1 + bV(\xi)} + C. \tag{38}$$

Находя из соотношения (38) функцию $\xi(y)$ и подставляя ее в (32), можно найти $y(\tau)$. Однако удобнее представить решение в параметрическом виде. Пусть

$$g(\xi) = \sqrt{2\int\frac{V(\xi)\,\xi\,d\xi}{1 + bV(\xi)} + C}, \tag{39}$$

так что

$$y = g(\xi). \tag{40}$$

Дифференцируя (40) по τ, получаем

$$\frac{dy}{d\tau} = g'(\xi)\frac{d\xi}{d\tau} \quad \text{или} \quad \xi = g'(\xi)\frac{d\xi}{d\tau}, \tag{41}$$

что дает

$$\tau = \int g'(\xi)\frac{d\xi}{\xi} + B. \tag{42}$$

Итак, общее решение уравнения (28) представлено формулами (40) и (42), причем функции $g(\xi)$ и $V(\xi)$ должны находиться из соотношений (36) и (39).

III

Применим найденные формулы к случаю, когда среда представляет собой сферически-симметричную оболочку, толщина которой мала по сравнению с расстоянием от центральной звезды (модель Милна). Предположим, что общим поглощением за границей основной серии можно пренебречь. Тогда

$$a=\frac{1-p}{p}\left(\frac{\beta+3x_1}{s\,S_{13}}\right)^2 \tag{43}$$

и $b=0$. Находя из (36) функцию $V(\xi)$ и подставляя ее в (39), получаем

$$g(\xi)=\sqrt{\frac{2}{a}\left(-\frac{1}{8}\xi^4+\frac{A}{3}\xi^3+\frac{D}{2}\xi^2+C\right)}. \tag{44}$$

Рассмотрим случай, когда оптическая толщина оболочки за границей основной серии τ_{11}^0 велика. Принимая, что степень ионизации на внешней границе оболочки приближенно равна нулю, запишем граничные условия в виде

$$\left.\begin{aligned} &H_{13}(0)=\frac{1}{4}S_{13}, \quad H_{23}(0)=\frac{1}{4}S_{23},\\ &\overline{K}_{13}(\tau_{13}^0)=0, \; H_{23}(\tau_{13}^0)=\frac{1}{2}\overline{K}_{23}(\tau_{13}^0), \end{aligned}\right| \tag{45}$$

где

$$H_{ik}=\int\eta\,K_{ik}\,\frac{d\omega}{4\pi}. \tag{46}$$

Определение постоянных интегрирования приводит к следующим выражениям:

$$\left.\begin{aligned} &A=-\frac{3}{4}\left(1+\frac{S_{23}}{S_{13}}\right), \quad B=-\left[\int g'(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right]_{\xi=-\frac{3}{4}}\\ &C=0, \quad D=\frac{a}{3(1-p)}\left(1+\frac{\gamma}{\beta+3x_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где

$$\gamma=\frac{3ps}{2}\left(S_{13}+S_{23}\right). \tag{48}$$

Подставляя эти значения в формулы (40), (42) и (44), получаем решение в следующем окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned} &y = G(x), \\ &\tau = H\left(\frac{3}{4}\right) - H(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где функции $G(x)$ и $H(x)$ равны

$$G(x) = x\sqrt{-\sigma x^2 + \rho x + \frac{1}{\lambda^2}}, \tag{50}$$

$$H(x) = \frac{2}{x}G(x) - \frac{\rho}{2\sqrt{\sigma}}\arcsin\frac{\rho - 2\sigma x}{\sqrt{\rho^2 + \frac{4\sigma}{\lambda^2}}} -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\ln\left[\rho + \frac{2}{\lambda^2 x} + \frac{2}{\lambda x^2}G(x)\right], \tag{51}$$

а постоянные

$$\sigma = \frac{1}{4a}, \quad \rho = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{S_{23}}{S_{13}}\right), \quad \lambda = \sqrt{3(1-p)\frac{\beta + 3\varkappa_1}{\beta + 3\varkappa_1 + \gamma}}. \tag{52}$$

Найдем теперь оптическую толщину оболочки в частоте ν_{23}. Обозначая ее посредством τ_{23}^0, получаем из (16) и первого из уравнений (24)

$$\tau_{23}^0 \simeq \frac{s}{q}\int_0^{\infty} C_{12}(\tau)d\tau = \frac{3}{4}\frac{s\,S_{13}}{\beta + 3\varkappa_1}. \tag{53}$$

Если $\tau_{23}^0 \ll 1$, то, как это видно из (43), величина $a \gg 1$, так что σ и ρ малы по сравнению с λ^{-2}. При этих условиях функции G и H равны

$$\begin{aligned} &G(x) \simeq \frac{x}{\lambda}, \\ &H(x) \simeq \text{const} + \frac{\ln x}{\lambda}, \end{aligned} \tag{54}$$

Из (49) и (54) следует

$$y(\tau) \simeq \frac{3}{4\lambda}e^{-\lambda\tau}. \tag{55}$$

Подставляя (55) в (30), находим следующее выражение для степени ионизации в случае, когда оптическая толщина оболочки в субординатном континууме меньше 1:

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{4\pi B_{13} h\nu_{13}}{c A_{31} \Delta\nu_{13}} \frac{(3-\lambda^2) S_{13}}{4\lambda} e^{-\lambda\tau}, \tag{56}$$

где λ определяется формулой (52). Выражение (56) было получено ранее В. В. Соболевым [2].

В качестве примера по формулам (49)—(51) были вычислены значения функции $f(\tau) \equiv y(\tau) - \frac{1}{3} y''(\tau)$, определяющей, согласно (30), характер изменения степени ионизации в оболочке. При этом считалось, что центральная звезда излучает как абсолютно черное тело с температурой $T_* = 5 \cdot 10^4\,°$K; температура оболочки принималась равной $10^4\,°$K. Результаты вычислений, проведенных для значений $\overset{0}{\tau}_{23} = 0.01$; 1.0 и 10.0, представлены на рис. 1.

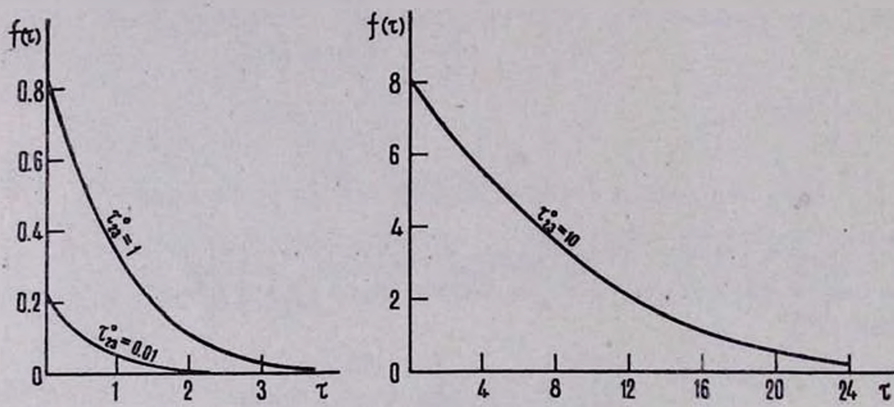

Рис. 1.
Նկ. 1.

Заметим, что при $\tau \gg 1$ (что соответствует малым значениям параметра x) независимо от величины $\overset{0}{\tau}_{23}$ для $y(\tau)$ получается выражение (55). Таким образом, в достаточно глубоких слоях среды степень ионизации экспоненциально падает с ростом τ.

IV

Приведенные выше формулы определяют зависимость степени ионизации от оптической глубины за границей основной серии τ. Для того чтобы связать степень ионизации с геометрической глубиной в оболочке, введем, следуя [4], предельную оптическую глубину в частоте ν_{13}, когда все атомы находятся в основном состоянии

$$\tau^* = \int_0^z \left(1 + \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_3}{n_1}\right) \alpha_{13} dz = \int_0^\tau \left(1 + \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_3}{n_1}\right) d\tau. \tag{57}$$

Воспользовавшись для нахождения функции $\frac{n_2}{n_1}(\tau)$ формулами (29), (21) и (24), а также учитывая выражение (30) для $\frac{n_3}{n_1}(\tau)$, из (57) получаем

$$\tau^* = \tau + \int_0^\tau (\delta y - \delta_1 y'')\, d\tau, \tag{58}$$

где постоянные

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{4\pi B_{13} h\nu_{13}}{c\Delta\nu_{13} A_{31}} S_{13}(1+\varkappa)\left[1 - \frac{A_{31}}{A_{21}} \frac{3\varkappa}{(1+\varkappa)(\beta + 3\varkappa_1)}\right], \\ \delta_1 &= \frac{4\pi B_{13} h\nu_{13}}{c\Delta\nu_{13} A_{31}} \frac{S_{13}}{3(1+\varkappa)}\left[1 - \frac{A_{31}}{A_{21}} \frac{3}{\beta + 3\varkappa_1}\right]. \end{aligned} \tag{59}$$

Поскольку функция $y(\tau)$ известна, состношение (58) определяет искомую зависимость $\tau = \tau(\tau^*)$, так что изменение степени ионизации с геометрической глубиной в оболочке может считаться известным. После нахождения температуры оболочки может быть также сделан расчет непрерывного спектра.

Следует отметить, что задача, подобная рассмотренной в данной статье, возникает и при изучении обычных звездных атмосфер, если не предполагать наличие в них локального термодинамического равновесия. В этом случае величина β означает долю фотонов, выходящих из атмосферы вследствие перераспределения по частотам.

23 марта 1968 г.

Վ. ՅՈՒ. ՏԵՐԵԲԻԺ

ԻՈՆԱՑՈՒՄԸ ՄԵԾ ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՇԱՐԺՎՈՂ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Քննարկվում է աստղերի սուբօրդինատային կոնտինուումների հաճախականությունների տիրույթում անթափանցելի՝ շարժվող թաղանթների իոնացման աստիճանը։ Այդ նպատակով դիտարկվում է երեք մակարդականի ատոմներից բաղկացած միջավայրում տեղի ունեցող ճառագայթման դիֆուզիան, ընդ որում երրորդ մակարդակը համապատասխանում է իոնացված վիճակին։ Միջավայրի շարժումը հաշվի է առնվում Վ. Վ. Սոբոլևի առաջարկած պայմանի օգնությամբ [2]։ Խնդրի լուծումը ստացված է այն ենթադրությամբ, որ բացասական կլանումը և էլեկտրոնային հարվածներով պայմանավորված անցումները կարելի է անտեսել։

V. Yu. TEREBIZH

THE IONISATION IN MOVING ENVELOPES OF LARGE OPTICAL THICKNESS

Summary

The question of the degree of ionisation in the moving star's envelopes, opaque for the frequencies of subordinate continuums, is studied. For this purpose the diffusion of the radiation in a medium, consisting of atoms having three levels, — the third level corresponding to the ionised state, — is considered. The movement of the medium is taken into account by applying the condition given by V. V. Sobolev [2]. The solution of the problem is obtained under the assumption that the stimulated emission and transitions, caused by electron encounters, may be neglected.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Изв. Пулк. обс., 13, № 114, 1, 1933.
2. *В. В. Соболев*, Движущиеся оболочки звезд, Изд. ЛГУ, 1947.
3. *V. A. Ambartsumian*, M. N., 95, 469, 1935.
4. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 39, 159, 1964.