Հոդվածը ներկայացվել է տպագրության 23.08.2019թ.,
ուղարկվել է գրախոսության 28.08.2019 թ., ընդունվել է տպագրության 05.09.2019թ.:
УДК 539.3

АРЕГ УНАНЯН
кандидат физико-математических наук
АНДРАНИК КАМАЛЯН
кандидат физико-математических наук

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НОРМАЛЬНОЙ СДВИГОВОЙ (SH) ВОЛНЫ В СЛАБО-НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

Аннотация

Исследуется влияния продольной слабой неоднородности материала, а также геометрической слабой неоднородности поверхностей упругого слоя на нормальную сдвиговую волну при разных механических граничных условиях. Показывается, что при защемленных гладких поверхностях изотропного упругого слоя возникает асимметричная локализация волновой энергии около серединной плоскости слоя. При механически свободных гладких поверхностях локализация волновой энергии происходит в приповерхностных зонах, но более интенсивно локализация появляется опять около серединной плоскости слоя. В обоих случаях вследствие воздействия неоднородности материала на нормальную волну появляются две новые приведенные частоты. В случае слабо-неоднородных механически свободных поверхностей появляются частотные зоны пропускания формированной волны (а также зоны частотного умолчания) и локализация в приповерхностных прослойках неоднородности.

Ключевые слова: *неоднородный волновод, неустойчивость нормальной волны, слабо-неоднородные поверхности, полоса частот.*

Введение

Имеются многочисленные исследования по распространению волн в неоднородных средах. Более подробно с характерными явлениями можно ознакомиться в монографиях [1÷4] и др., а в некоторых статьях последних лет [5÷10] и др. уже можно ознакомиться с аналогическими явлениями, обусловленными неоднородностью поверхностных условий и новых физикомеханических свойств материала волновода. Обсуждению вопросов моделирования структуры неоднородных волноводов, а также распространения нормальных волн в волноводах с продольной неоднородностью материала слоя посвящены работы [11÷14] и др., где рассматриваются случаи как непрерывной неоднородности материала волновода, так и слоистая периодическая структура волновода.

С развитием современной техники все более расширяется спектр исследований по высокочастотным колебаниям и распространения коротковолновых сигналов. С их помощью можно выявить эффекты взаимодействия с более чувствительными сигналами как слабой неоннородности материала волновода, так и эффекты геометрической неоднородности поверхностей волновода. Потерям устойчивости распространяющейся нормальной высокочастотной волны (монохроматический коротковолновой сигнал), будь это локализация волновой энергий, внутренний резонанс, появление запретных частотных зон или другое, посвящено много работ [15÷19] и др.

В настоящей работе исследуется характер превращения распространяющейся упругой чисто сдвиговой нормальной волны в изотропном упругом слое с продольной слабой неоднородностью материала или с геометрической слабой неоднородностью поверхностей упругого слоя при разных механических граничных условий.

1. Постановка задачи

Рассматриваются три модельные задачи о распространении чисто сдвиговой, горизонтально поляризованной, упругой нормальной волны $\vec{U}(x,y,t)=\{0;\ 0;\ \mathrm{w}(x,y,t)\}$ в изотропном упругом слабо-неоднородном слое-волноводе.

$$\mathrm{w}(x,y,t)=A_0\cdot\exp\left[i(k_0x-\omega_0t)\right], \tag{1.1}$$

сдвиговая компонента перемещении имеет вид, где A_0 - постоянная амплитуда, k_0 - волновое число, а ω_0 - частота предельной волны.

Очевидно, что в случае однородной упругой среды это объемная волна, которая одновременно есть и предельная поверхностная волна, локализованная по всей толщине слоя. Целью рассмотрения случая слабо-неоднородного слоя волновода является выявление возможной локализации волновой энергии в волноводе при разных типах слабой неоднородности (неоднородность материала или неоднородность поверхностей слоя).

Задача 1.1 Продольная неоднородность материала и жестко защемленные поверхности слоя-волновода

Пусть предельная волна (1.1) распространяется в изотропном, упругом продольно слабо-неоднородном слое $\{|x|<\infty;\ |y|\le h_0;\ |z|<\infty\}$ с закрепленными поверхностями $y=\pm h_0$.

Тогда в слое решается уравнение движения среды:

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}=\rho(x)\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

где механические напряжения согласно закона Гука запишутся в виде:

$$\sigma_{zx}(x,y,t)=G(x)\frac{\partial\mathrm{w}(x,y)}{\partial x};\quad \sigma_{zy}(x,y,t)=G(x)\frac{\partial\mathrm{w}(x,y)}{\partial y} \tag{1.3}$$

Здесь $G(x)$ - модуль сдвига материала, который, как и плотность материала - $\rho(x)$, не теряя общности, для продольно слабо-неоднородной среды вполне можно представить в виде:

$$G(x) = G_0\left[1+\varepsilon_1\sin(k_1x)+\delta_1\cos(k_1x)\right];$$
$$\rho(x) = \rho_0\left[1+\varepsilon_2\sin(k_1x)+\delta_2\cos(k_1x)\right]. \tag{1.4}$$

Здесь приняты обозначения:

$k_1 \triangleq \pi/a$ - число волнистости неоднородности материала слоя,

a - полушаг волнистости неоднородности материала слоя,

$\varepsilon_1;\ \varepsilon_2;\ \delta_1;\ \delta_2$ - малые амплитуды функций неоднородности, которые при слабой неоднородности материала удовлетворяют ограничению $\varepsilon_n^2+\delta_n^2 \ll 1$,

G_0 - модуль сдвига и ρ_0 - плотность соответственного однородного материала.

С учетом (1.3) и (1.4) получаем уравнение движения с переменными периодическими коэффициентами:

$$\begin{gathered}\left[1+\varepsilon_1\sin(k_1x)+\delta_1\cos(k_1x)\right]\Delta w + k_1\left[\varepsilon_1\cos(k_1x)-\delta_1\sin(k_1x)\right]\frac{\partial w}{\partial x} = \\ = c_t^{-2}\left[1+\varepsilon_2\sin(k_1x)+\delta_2\cos(k_1x)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{gathered}, \tag{1.5}$$

где $\Delta \triangleq \partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ - оператор Лапласа, а $c_{0t}^2 \triangleq G_0/\rho_0$ - скорость предельной сдвиговой волны.

На жестко защемленных плоскостях $y=\pm h_0$ граничные условия имеют вид:

$$\mathrm{w}(x,-h_0,t) = \mathrm{w}(x,+h_0,t) = 0. \tag{1.6}$$

Тогда волновое решение уравнения движения (1.5), удовлетворяющее граничным условиям защемлений (1.6), можно представить в виде ряда Фурье:

$$\mathrm{w}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{w}_n(x)\cdot\sin(\mu_n y)\cdot e^{i\omega_n t}, \tag{1.7}$$

где $\mu_n = \pi n/h_0$ - волновое число по толщине слоя, $n\in\mathbb{N}\triangleq\{1;2;...\}$ - натуральное число. Очевидно, что при данных граничных условиях нулевой формы не существует $\mathrm{w}_0(x)\equiv 0$.

Представление решения в виде (1.7) приводит уравнение движения (1.5) к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими переменными коэффициентами относительно амплитудных функций каждой последовательной n -ой моды волны:

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{w}_n''(x)+\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)\mathrm{w}_n(x)\right]+\\&+\varepsilon_1\sin(k_1x)\left[\mathrm{w}_n''(x)-(k_1\delta_1/\varepsilon_1)\,\mathrm{w}_n'(x)+\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)\mathrm{w}_n(x)\right]+\\&+\delta_1\cos(k_1x)\left[\mathrm{w}_n''(x)+(k_1\varepsilon_1/\delta_1)\,\mathrm{w}_n'(x)+\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)\mathrm{w}_n(x)\right]=0\end{aligned}\quad. \qquad (1.8)$$

Здесь $\eta_n^2 \triangleq \omega_n^2/(c_{0t}^2\mu_n^2)$ - обозначена приведенная фазовая скорость n -ой формы волны.

Очевидно, что из-за неоднородности материала процесс представляется взаимодействием трех связанных нормальных волновых мод, характеризуемых в уравнениях (1.8) соотношениями в прямых скобках. Исходя из того, что взаимодействие обусловлено функциями неоднородности $\varepsilon_1\sin(k_1x)$ и $\delta_1\cos(k_1x)$ из (1.4) , решения уравнений (1.8) с переменными периодическими коэффициентами естественно искать в общем виде разложения формами данных функций неоднородности:

$$\mathrm{w}_n(x)=a_{0n}+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left(a_{mn}\cos(k_mx)+b_{mn}\sin(k_mx)\right);\ \text{ при }\ n;m\in\mathbb{N}, \qquad (1.9)$$

где $k_m \triangleq mk_1=(m\pi/a)$ - волновое число по направлению распространения волны, соответствующей m -ой гармоники волны, а $\gamma \triangleq \max\left\{\sqrt{\varepsilon_i^2+\delta_i^2}\right\}$, i=1;2 - характеризирующий слабую неоднородность материала малый параметр.

Подставляя соотношения (1.9) в уравнение (1.8), получим бесконечную реккурентную систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных амплитуд $\{a_{mn};\ b_{mn}\}$, генерируемых вследствии взоимодействия распространяющихся нормальных волновых мод (волнового сигнала) и продольной слабой неоднородности материала.

$$\begin{aligned}&\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)a_{0n}+\mu_n^2\gamma\left[\left(\eta_n^2-\varepsilon_{12}\right)\left(\varepsilon_2/\gamma\right)\sin(k_1x)+\left(\eta_n^2-\delta_{12}\right)(\delta_2/\gamma)\cos(k_1x)\right]a_{0n}+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\left[\mu_n^2\left(\eta_n^2-1\right)-k_m^2\right]\cdot\left[\sin(k_mx)b_{mn}+\cos(k_mx)a_{mn}\right]+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)-k_m^2\right)\sin(k_mx)-(k_1\delta_1/\varepsilon_1)\,k_m\cos(k_mx)\right]\varepsilon_1\sin(k_1x)b_{mn}+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)-k_m^2\right)\sin(k_mx)+(k_1\varepsilon_1/\delta_1)\,k_m\cos(k_mx)\right]\delta_1\cos(k_1x)b_{mn}+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2\left(\varepsilon_{21}\eta_n^2-1\right)-k_m^2\right)\cos(k_mx)+(k_1\delta_1/\varepsilon_1)\,k_m\sin(k_mx)\right]\varepsilon_1\sin(k_1x)a_{mn}+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma^m\cdot\left[\left(\mu_n^2(\delta_{21}\eta_n^2-1)-k_m^2\right)\cos(k_mx)-(k_1\varepsilon_1/\delta_1)\,k_m\sin(k_mx)\right]\delta_1\cos(k_1x)a_{mn}=0\end{aligned}$$

(1.10)

В полученных соотношениях фигурируют характеризующие взаимодействие независимых нормальных гармоник коэффициенты $\nu_j;\ \alpha_j;\ \beta_j$ при распространении волнового сигнала в слое с продольной слабой неоднородностью (1.4)

$$\nu_m = \mu_n^2\left(\eta_n^2 - 1\right) - k_m^2; \quad (1.11)$$

$$\alpha_m = \mu_n^2\left(\varepsilon_2\eta_n^2 - \varepsilon_1\right) - \varepsilon_1 k_m^2; \quad (1.12)$$

$$\beta_m = \mu_n^2\left(\delta_2\eta_n^2 - \delta_1\right) - \delta_1 k_m^2 \quad (1.13)$$

С учетом того, что в нулевом приближении $\gamma^0 = 1$, с коэффициентом $k_0 = 0$ соответствует предельной форме по оси $0x$ в случае однородной среды, решение в нулевом приближений будет записано в виде:

$$\mathrm{w}_{0n}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}\sin(\mu_{0n}y)\cdot e^{i\omega_{0n}t} \quad (1.14)$$

Откуда соответственно следует, что в нулевом приближении слабо - неоднородный слой допускает только одну группу дискретных частот $\omega_{0n} = c_{0t}\left(\pi n/h_0\right)$ для распространяющейся сдвиговой волны с соответствующими числами формообразовании $\mu_n = \pi n/h_0$.

В первом же приближении $m = 1$ из решения (1.9) будем иметь:

$$\mathrm{w}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{0n} + \gamma a_{1n}\cos(k_1x) + \gamma b_{1n}\sin(k_1x)\right]\sin(\mu_{1n}y)\cdot e^{i\omega_0 t}. \quad (1.1.15)$$

Волновое число μ_{1n} и амплитуды первого приближения находим из трех связанных бесконечных систем уравнений:

$$\mu_n^2\left[\left(\eta_n^2 - 1\right) + \varepsilon_2\left(\eta_n^2 - \varepsilon_{12}\right)\sin(k_1x) + \delta_2\left(\eta_n^2 - \delta_{12}\right)\cos(k_1x)\right]a_{0n} = 0$$

(1.1.16)

$$\left[\mu_n^2\left(\eta_n^2 - 1\right) - k_1^2\right]\cdot b_{1n}\cdot\sin(k_1x) = 0 \quad (1.1.17)$$

$$\left[\mu_n^2\left(\eta_n^2 - 1\right) - k_1^2\right]\cdot a_{1n}\cdot\cos(k_1x) = 0. \quad (1.1.18)$$

Из условий существования нетривиальных решений систем (1.16)÷(1.18) получаем волновые числа формообразования первого приближения:

$$\mu_{1n} = \left(\pi n/h_0\right)\sqrt{\frac{1 + \varepsilon_2\sin(k_1x) + \delta_2\cos(k_1x)}{1 + \varepsilon_1\sin(k_1x) + \delta_1\cos(k_1x)}}\ . \quad (1.19)$$

Очевидно, что подкоренное выражение положительно определенное (тем более при слабой неоднородности материала, когда $\varepsilon_n^2 + \delta_n^2 \ll 1$). Следовательно, зон запретных частот в первом приближений не возникает.

Из условий соответствия гармоник находим амплитуды $\{a_{1n}\}$ и $\{b_{1n}\}$ первого приближения, выраженные через амплитуды волнового сигнала $\{a_{0n}\}$:

$$b_{1n} = \frac{\mu_{1n}^2\left(\varepsilon_2\left(\pi n/h_0\right)^2 - \varepsilon_1\right)}{\left(\left(\pi n/h_0\right)^2 - \left(\pi/a\right)^2\right) - \mu_{1n}^2} a_{0n}; \qquad a_{1n} = \frac{\mu_{1n}^2\left(\delta_2\left(\pi n/h_0\right)^2 - \delta_1\right)}{\left(\left(\pi n/h_0\right)^2 - \left(\pi/a\right)^2\right) - \mu_{1n}^2} a_{0n}$$

. (1.20)

Отсюда находим номера резонансных гармоник, при которых возникает внутренний резонанс:

$$n = \left(h_0/a\right)\sqrt{\frac{1+\gamma_1 \sin(k_1 x + \varphi_1)}{\gamma_\vartriangle \sin(k_1 x + \varphi_\vartriangle)}} \, . \tag{1.21}$$

Для короткой записи здесь введены обозначения:

$$\gamma_1 \triangleq \sqrt{\varepsilon_1{}^2 + \delta_1{}^2}\ ;$$

$$\varphi_\vartriangle \triangleq \arccos\frac{\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2 + \left(\delta_1 - \delta_2\right)^2}} = \arcsin\frac{\left(\delta_1 - \delta_2\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2 + \left(\delta_1 - \delta_2\right)^2}}\ ;$$

$$\gamma_\vartriangle \triangleq \sqrt{\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2 + \left(\delta_1 - \delta_2\right)^2}\ ; \qquad \varphi_1 \triangleq \arccos\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1{}^2 + \delta_1{}^2}} = \arcsin\frac{\delta_1}{\sqrt{\varepsilon_1{}^2 + \delta_1{}^2}}\ .$$

Из (1.21) легко получаются зоны неустойчивости гармоник (когда подкоренное выражение имеет отрицательное занчение):

$$a\left(2m - 1 - \varphi_\vartriangle/\pi\right) < x < a\left(2m - \varphi_\vartriangle/\pi\right); \qquad m = 0;1;2\ldots \tag{1.22}$$

Откуда следует, что при некотором выборе типа неоднородности среды подкоренные величины могут быть отрицательными и тогда соответствующие гармоники, потеряв устойчивость, представляются экспоненциальными функциями $\exp\left[\pm\mu_{1n}(\varepsilon_i;\delta_i;a/h_0)\cdot y\right]$.

А также находим номера резонансных гармоник

$$N_r = \left(h_0/a\right)\sqrt{\frac{1+\gamma_1 \sin(k_1 x_r + \varphi_1)}{\gamma_\vartriangle \sin(k_1 x_r + \varphi_\vartriangle)}}\ , \tag{1.23}$$

соответствующих значениям x_r из интервалов определения.

$$a\left(2m + 1 - \varphi_\vartriangle/\pi\right) > x_r > a\left(2m - \varphi_\vartriangle/\pi\right); \qquad m = 0;1;2\ldots \tag{1.24}$$

Во втором приближении: $m = 2$, решение представим в виде:

$$\mathrm{w}_2(x) = \mathrm{w}_1(x) + \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{2n} \cos(k_2 x) + b_{2n} \sin(k_2 x) \right] \sin(\mu_{2n} y) \cdot e^{i\omega_0 t}.$$

С учетом (1.15), (1.19) и (1.20), из (1.10) относительно постоянных a_{0n}, a_{2n} и b_{2n} будем иметь три бесконечные системы однородных арифметических уравнений. Из условия существования нетривиальных решений находим формообразующие числа во втором приближении:

$$\mu_n = (n\pi/h_0) \sqrt{\mathrm{N}(\varepsilon_i; \delta_i; k_1 x) / \mathrm{M}(\varepsilon_i; \delta_i; k_1 x)}, \tag{1.25}$$

где введены обозначения:

$$\mathrm{N}(\varepsilon_i; \delta_i; k_1 x) \triangleq \left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{\varepsilon_2 n^2 a^2 + \left(n^2 a^2 - h_0^{\,2}\right) \beta_{1n}}{n^2 a^2} \sin(k_1 x) + \\ \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_2 \beta_{1n} + \delta_2 \alpha_{1n}\right) + \dfrac{\delta_2 n^2 a^2 + \left(n^2 a^2 - h_0^{\,2}\right) \alpha_{1n}}{n^2 a^2} \cos(k_1 x) + \\ + \dfrac{n^2 a^2 \left(\delta_2 \beta_{1n} + \varepsilon_2 \alpha_{1n}\right) - 2h_0^2 \left(\delta_1 \beta_{1n} + \varepsilon_1 \alpha_{1n}\right)}{2n^2 a^2} \sin(2k_1 x) + \\ + \dfrac{2h_0^2 (\varepsilon_1 \beta_{1n} - \delta_1 \alpha_{1n}) - n^2 a^2 \left(\varepsilon_2 \beta_{1n} - \delta_2 \alpha_{1n}\right)}{2n^2 a^2} \cos(2k_1 x) \end{array} \right] \tag{1.26}$$

$$\mathrm{M}(\varepsilon_i; \delta_i; k_1 x) \triangleq \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \left(\varepsilon_1 \beta_{1n} + \delta_1 \alpha_{1n}\right) + \\ + 2\left(1 + \left(\varepsilon_1 - \beta_{1n}\right) \sin(k_1 x) + \left(\delta_1 - \alpha_{1n}\right) \cos(k_1 x)\right) + \\ + \left(\delta_1 \alpha_{1n} - \varepsilon_1 \beta_{1n}\right) \cos(2k_1 x) - \left(\delta_1 \beta_{1n} + \varepsilon_1 \alpha_{1n}\right) \sin(2k_1 x) \end{array} \right]$$

Из условий соответствии гармоник находим амплитуды a_{2n} и b_{2n}:

$$a_{2n} = \alpha_2\left(\varepsilon_i; \delta_i; (na/h_0)\right) a_{0n}; \qquad b_{2n} = \beta_2\left(\varepsilon_i; \delta_i; (na/h_0)\right) a_{0n};$$

$$a_{2n} = \frac{A_{21} B_1 - A_{11} B_2}{A_{21} A_{12} + A_{11} A_{22}} a_{0n}, \qquad b_{2n} = \frac{A_{22} B_1 + A_{12} B_2}{A_{11} A_{22} + A_{12} A_{21}} a_{0n}$$

$$A_{11} \triangleq \left\{ \varepsilon_1 k_2 k_1 \cos(k_1 x) - \delta_1 k_2 k_1 \sin(k_1 x) \right\}$$

$$A_{12} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \left[\left((n\pi/h_0)^2 - \mu_n^2 \right) - k_2^2 \right] + \varepsilon_1 \left(\left(\varepsilon_{21} (n\pi/h_0)^2 - \mu_n^2 \right) - k_2^2 \right) \sin(k_1 x) + \\ + \delta_1 \left((\delta_{21} (n\pi/h_0)^2 - \mu_n^2) - k_2^2 \right) \end{array} \right\}$$

$$B_1 \triangleq -\frac{1}{2} \left\{ \alpha_1 \delta_1 \left[\mu_n^2 (\delta_{21} \eta_n^2 - 1) - 2k_1^2 \right] - \beta_1 \varepsilon_1 \left[\mu_n^2 \left(\varepsilon_{21} \eta_n^2 - 1 \right) - 2k_1^2 \right] \right\}$$

$$A_{21} \triangleq \left\{ \begin{matrix} \left[\mu_n^2 \left(\eta_n^2 - 1 \right) - k_2^2 \right] + \delta_1 \left(\mu_n^2 (\delta_{21}\eta_n^2 - 1) - k_2^2 \right) \cos(k_1 x) - \\ -\varepsilon_1 \left(\mu_n^2 \left(\varepsilon_{21}\eta_n^2 - 1 \right) - k_2^2 \right) \sin(k_1 x) \end{matrix} \right\}$$

$$A_{22} \triangleq \left\{ \delta_1 k_2 k_1 \sin(k_1 x) + \varepsilon_1 k_2 k_1 \cos(k_1 x) \right\}$$

$$B_2 \triangleq -\frac{1}{2} \left\{ \beta_1 \delta_1 \left[\mu_n^2 (\delta_{21}\eta_n^2 - 1) - 2k_1^2 \right] + \alpha_1 \varepsilon_1 \left[\mu_n^2 \left(\varepsilon_{21}\eta_n^2 - 1 \right) - 2k_1^2 \right] \right\}$$

Во втором приближении волновое решение представится в виде:

$$\mathrm{w}_2(x) = \mathrm{w}_1(x) + \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \begin{bmatrix} 1 + \beta_2 \left(\varepsilon_i; \delta_i; (na/h_0) \right) \sin(k_2 x) \\ +\alpha_2 \left(\varepsilon_i; \delta_i; (na/h_0) \right) \cos(k_2 x) \end{bmatrix} \sin(\mu_{2n} y) e^{i\omega_0 t} .$$

(1.27)

Из полученных соотношений находим зоны запретных частот (номера тех гармоник, для которых имеет место неровенство):

$$\left| -b_n \pm \sqrt{b_n^2 - c_n} \right| > 1 \tag{1.28}$$

С введенными обозначениями

$$b_n \triangleq \frac{\left[(na/4h_0)^2 - 1 \right] \left((na/4h_0)^2 (\delta_2 - \delta_1) - \delta_1 \right)}{\gamma_1^2/4 + \left[\left((na/4h_0)^2 (\delta_2 - \delta_1) - \delta_1 \right) \right]^2 + \left[\left((na/4h_0)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \varepsilon_1 \right) \right]^2};$$

$$c_n \triangleq \frac{\left[(na/4h_0)^2 - 1 \right]^2 - \left[\left((na/4h_0)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \varepsilon_1 \right) \right]^2 - \delta_1^2/4}{\gamma_1^2/4 + \left[\left((na/4h_0)^2 (\delta_2 - \delta_1) - \delta_1 \right) \right]^2 + \left[\left((na/4h_0)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \varepsilon_1 \right) \right]^2} . \tag{1.29}$$

Из соотношений (1.25) и (1.26) легко получаются зоны неустойчивости гармоник (когда подкоренное выражение имеет отрицательное занчение), откуда следует, что при некотором выборе типа неоднородности среды подкоренные величины могут быть отрицателными и тогда соответствующие гармоники, потеряв устойчивость, представляются экспоненциальными функциями $\exp\left[\pm \mu_{2n}(\varepsilon_i; \delta_i; a/h_0) \cdot y \right]$.

Численный анализ полученных амплитудно-фазовых искажений будет приведен с другими случаями граничных условий.

Задача 1.2 Продольная неоднородность материала и механически свободные поверхности слоя-волновода

Пусть предельная нормальная волна распространяется в изотропном, упругом, по законам неоднородности (1.4) продольно слабо-неоднородном слое

$\{|x| < \infty;\ |y| \le h_0;\ |z| < \infty\}$ с механически свободными поверхностями $y = \pm h_0$:

$$\left.\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=-h_0} = \left.\frac{\partial \mathrm{w}(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=+h_0} = 0 . \tag{1.30}$$

Поступая аналогично случаю закрепленных поверхностей, волновое решение уравнения движения, удовлетворяющее граничным условиям механически свободных поверхностей, (1.30) можно представить в виде:

$$\mathrm{w}(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{w}_n(x) \cdot \cos(\mu_n y) \cdot e^{i\omega_n t} , \tag{1.31}$$

где опять $\mathrm{w}_n(x)$ представляется в виде (1.9) и следовательно характер амплитудно-фазовых искажений по распространению волнового сигнала будет такой же, как в случае закрепленных границ слоя.

В отличие от случая волновода с закрепленными границами в данном случае решение нулевого приближения получается в виде:

$$\mathrm{w}_0(x,y,t) = a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos(\mu_{0n} y) \cdot e^{i\omega_{0n} t} , \tag{1.32}$$

где $a_{00} = \mathrm{w}_0(x, \pm h_0, t)$ - значения деформации сдвига на поверхностях.

С учетом того, что характер изменения по направлению распространения волнового сигнала опять характеризуется уравнением (1.8), волновое поле в волноводе в случае механически свободных поверхностей в следующих приближениях получается в следующих описаниях.

В первом приближении учета неоднородности материала решение получается в виде:

$$\mathrm{w}_1(x) = a_{00} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{1n} \cos(k_1 x) + b_{1n} \sin(k_1 x) \right] \cos(\mu_{1n} y) \cdot e^{i\omega_0 t}, \tag{1.33}$$

где определяющие волновые характеристики число волнообразования μ_{1n} и амплитуды гармоник a_{1n} и b_{1n} описываются соотношениями (1.19) и (1.20) соответственно.

Во втором приближении волновое поле представляется в виде:

$$\mathrm{w}_2(x) = \mathrm{w}_1(x) + \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \begin{bmatrix} \alpha_2\left(\varepsilon_i; \delta_i; (na/h_0)\right) \cos(k_2 x) + \\ + \beta_2\left(\varepsilon_i; \delta_i; (na/h_0)\right) \sin(k_2 x) \end{bmatrix} \cos(\mu_{2n} y) e^{i\omega_0 t} . \tag{1.34}$$

Здесь определяющие волновые характеристики число волнообразования μ_{2n} и амплитуды гармоник a_{2n} и b_{2n} описываются соотношениями (1.25), (1.26) и (1.28), (1.29) соответственно.

Задача 2. Однородность материала и шероховатые механически свободные поверхности слоя-волновода

Пусть предельная волна (1.1) распространяется в изотропном, упругом однородном слое-волноводе $\{|x|<\infty;\ h_-(x)\le y\le h_+(x);\ |z|<\infty\}$ с механически свободными шероховатыми поверхностями $y=h_\pm(x)$ соответственно

$$h_\pm(x)=\pm h_0\left(1+\varepsilon_\pm\sin\left(\chi^\pm x\right)+\delta_\pm\cos\left(\chi^\pm x\right)\right), \tag{2.1}$$

где $2h_0$ - базовая толщина слоя, $\varepsilon_\pm$ и $\delta_\pm$ максимальные отклонения от плоскостей $y=\pm h_0$ (высоты шероховатости) и малые величины $h_0\gg\sqrt{\varepsilon_\pm^2+\delta_\pm^2}$ по отношению базовой толщины слоя. $\chi^\pm=2\pi/\lambda_\pm$ характеризует волнистость на соответствующих поверхностях, а $\lambda_\pm$ - шаг неровностей (длина волн) на поверхностях.

Тогда в волноводе переменной толщины при распространении n - ой гармоники $\mathrm{w}_n(x,y,t)=A_{0n}(y)\cdot\exp\left[n\cdot i(k_0x-\omega_0t)\right]$ нормального волнового сигнала решается уравнение движения однородной среды, которое методом разделения переменных приводит краевую задачу к виду системы уравнений:

$$\begin{cases}X_n''(x)+n^2k_0^2\cdot X_n(x)=0\\ Y_n''(y)+n^2k_0^2\left(\omega^2k_0^{-2}c_{0t}^{-2}-1\right)Y_n(y)=0\end{cases} \tag{2.2}$$

с граничными условиями на механически свободных шероховатых поверхностях $y=h_\pm(x)$:

$$\begin{cases}h_+'(x)X_n'(x)Y_n(h_+(x))+X_n(x)Y_n'(h_+(x))=0\\ h_-'(x)X_n'(x)Y_n(h_-(x))+X_n(x)Y_n'(h_-(x))=0.\end{cases} \tag{2.3}$$

Учитывая слабую неоднородность поверхностей волновода (2.1), решения системы уравнений (2.2) можно представить в виде:

$$\mathrm{w}(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)\cdot\left[a_n\sin(\mu_ny)+b_n\cos(\mu_ny)\right]\cdot e^{i\omega_nt}\,. \tag{2.4}$$

Здесь $nk_0\alpha_0\triangleq\mu_n=nk_0\alpha_0\triangleq\sqrt{\eta_0^2-1}$ - приведенное волновое число, $\alpha_0\triangleq\sqrt{\eta_0^2-1}$ - волновой коэффициент по толщине слоя, $\eta_0^2\triangleq\left(\omega_0^2/k_0^2c_{0t}^2\right)$ - приведенная фазовая скорость распространяющейся нормальной волны, ω_0 - частота предельной волны, $c_{0t}=\sqrt{G_0/\rho_0}$ - скорость сдвиговой объемной волны, G_0 - модуль сдвига материала, ρ_0 - плотность материала, k_0 - волновое число нормальной волны, $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ - длина нормальной волны.

Учитывая характер неоднородности поверхностей волновода (2.1) и вид граничных условий (2.3), решение первого уравнения системы (2.2) нужно представить в виде:

$$X_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\gamma_+^m a_{mn}\cos(\chi_m^+ x + \varphi_+) + \gamma_-^m b_{mn}\cos(\chi_m^- x + \varphi_-)\right), \qquad (2.5)$$

где $h_0 \gg \gamma_\pm \triangleq \sqrt{\varepsilon_\pm^2 + \delta_\pm^2}$ - нормирующий амплитудный множитель, $\chi_0^\pm \triangleq \chi^\pm = 2\pi/\lambda_\pm$ и $\chi_m^\pm \triangleq 2m\pi/\lambda_\pm$ - волновые числа поверхностных неровностей, $\varphi_\pm \triangleq -\arccos\left(\delta_\pm/\gamma_\pm\right) = -\arcsin\left(\varepsilon_\pm/\gamma_\pm\right)$ - начальные фазовые сдвиги поверхностных неоднородностей, $\lambda_\pm$-длина шага волнистости на поверхностях волновода, а a_{mn} и b_{mn} постоянные амплитуды, определяющиеся из граничных условий (2.3) соответственно.

Подставляя решение (2.5) в первое уравнение системы (2.2), получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\gamma_+^m\left(k_0^2 - \left(\chi_m^+\right)^2\right)a_{mn}\cos(\chi_m^+ x + \varphi_+)\right] + \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_-^m\left(k_0^2 - \left(\chi_m^-\right)^2\right)b_{mn}\cos(\chi_m^- x + \varphi_-) = 0, \qquad (2.6)$$

откуда для нулевого приближения получаем решение:

$$\mathrm{w}_0(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[1 - \frac{n^2k_0^2 - \left(\chi_0^+\right)^2}{n^2k_0^2 - \left(\chi_0^-\right)^2}\right]a_{0n}\cos(\chi_0^+ x + \varphi_+)\cos(\mu_{0n}y)\cdot e^{i\omega_{0n}t}\cdot$$

Здесь те же числа гармоник $\mu_{0n} = \pi n/h_0$ и те же частоты гармоник $\omega_{0n} = c_{0t}\left(\pi n/h_0\right)$.

Учет неоднородности поверхностей уже в первом приближении приводит к искажению как фазовой функции распространения нормальной волны, так и коэффициента формообразования по толщине волновода.

$$X_0(x) = \left(\frac{\left(\chi_-\right)^2 - \left(\chi_+\right)^2}{k_0^2 - \left(\chi_+\right)^2}\right)\left[a_{00}\cos(\chi_+ x + \varphi_+) - \left(\frac{k_0^2 - \left(\chi_+\right)^2}{k_0^2 - \left(\chi_-\right)^2}\right)b_{00}\cos(\chi_- x + \varphi_-)\right] \qquad (2.7)$$

$$A_+(x) \triangleq h_0\chi_+\gamma_+\cos\left(\chi_+ x + \varphi_+\right)\times$$

$$\times\left[-\chi_+ a_{00}\sin(\chi_+ x + \varphi_+) + \chi_-\left(\frac{k_0^2 - \left(\chi_+\right)^2}{k_0^2 - \left(\chi_-\right)^2}\right)b_{00}\sin(\chi_- x + \varphi_-)\right]$$

$$B_+(x) \triangleq \left[a_{00}\cos(\chi_+ x + \varphi_+) - \left(\frac{k_0^2 - \left(\chi_+\right)^2}{k_0^2 - \left(\chi_-\right)^2}\right)b_{00}\cos(\chi_- x + \varphi_-)\right]$$

$$A_-(x) \triangleq -h_0\chi_-\gamma_- \cos\left(\chi_- x+\varphi_-\right)\times$$

$$\times\left[-\chi_+ a_{00}\sin(\chi_+ x+\varphi_+)+\chi_-\left(\frac{k_0^2-(\chi_+)^2}{k_0^2-(\chi_-)^2}\right)b_{00}\sin(\chi_- x+\varphi_-)\right]$$

$$B_-(x)=B_+(x)\triangleq\left[a_{00}\cos(\chi_+ x+\varphi_+)-\left(\frac{k_0^2-(\chi_+)^2}{k_0^2-(\chi_-)^2}\right)b_{00}\cos(\chi_- x+\varphi_-)\right]$$

$$\left[A_+(x)\mu_n h_0+\mu_n B_+(x)\right]a_n+\left[A_+(x)-\mu_n^2 h_0 B_+(x)\right]b_n=0$$

$$\left[-A_-(x)\mu_n h_0+\mu_n B_-(x)\right]a_n+\left[A_-(x)+\mu_n^2 h_0 B_-(x)\right]b_n=0$$

$$\mu_n\left\{\mu_n^2 h_0^2+1\right\}\cdot\left\{B_-(x)A_+(x)+A_-(x)B_+(x)\right\}=0 \tag{2.8}$$

$$\mathrm{w}_0(x,y,t)=b_0\left[\left(\frac{(\chi_-)^2-(\chi_+)^2}{k_0^2-(\chi_+)^2}\right)\left[\cos(\chi_+ x+\varphi_+)-\left(\frac{k_0^2-(\chi_+)^2}{k_0^2-(\chi_-)^2}\right)\cos(\chi_- x+\varphi_-)\right]\right]\cdot e^{i\omega_0 t}$$

$$\sin\left[\mu_n(h_+(x)-h_-(x))\right]=0\,; \qquad \mu_n=2n\pi\big/\left[h_+(x)-h_-(x)\right]$$

$$\mu_n B_-(x)\cos(\mu_n h_-(x))a_n-\mu_n B_-(x)\sin(\mu_n h_-(x))b_n=0\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biryukov**, S.V., **Gulyaev**, Y.V., **Krylov**, V., **Plessky**, V., Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, 388p.
2. **L Brekhovskikh,** Waves in Layered Media 2e, Applied mathematics and mechanics, Vol. 16, Elsevier Science, 2012, 520p.
3. **D. Royer, E. Dieulesaint,** Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation, Springer Science & Business Media, 2000, 374p.
4. **Bakirtas** I. et **Maugin G. A.,** Ondes de surface SH pures en elasticite inhomogene, Journal de Mechanique Theoretique et Appliquee, v. 1, № 6, 1982, p. 995–1013.
5. **Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р**. О существовании “стоячей” поверхностной волны вдоль периодически неровной поверхности. Докл. АН Армении, 1992, т. 93, №2, с.63-67
6. **Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р.** Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих средах. Акустический журн. 1996, т.42, №2, с 179-182
7. **Potel C., Bruneua M., N'Djomo L.C.F., Leduc D., Elkettani M.E., Izbicki J.-L.**; Shear horizontal acoustic waves propagating along two isotropic solid plates bonded with a non-dissipative adhesive layer: Effects of the rough interfaces, Jour. Of Appl. Physics vol. 118, (2015),
8. **M. V. Predoi, M. Castaings, B. Hosten,** and **C. Bacon**, “Wave propagation along transversely periodic structures,” J. Acoust. Soc. Am. 121, 1935–1952 (2007).
9. **T. Krasnova, P. A. Jansson**, and **A. Bostrom**, “Ultrasonic wave propagation in an anisotropic cladding with a wavy interface,” Wave Motion41, 163–177 (2005)
10. **Belyankova T.I., KalinchukV.V., Tukodova O.M.**, “Peculiarities of the Surface SH-Waves Propagation in the Weakly Inhomogeneous Pre-stressed Piezoelectric Structures”, In book: Advanced Materials, pp.413-429.

11. **Avetisyan A.S.,** “On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness, Proc. of NAS Armenia, ser. Mechanics, vol. 68, №2, (2015), pp.29-42.

12. **Avetisyan A.S., Sarkisyan S.V**. About electromagnetoelastic vibrations and waves propagation in nonhomogeneous media. //Mechanical Modeling of New Electromagnetic Materials. Stockholm. 1990. p. 387-393

13. **Аветисян А.С.,Камалян А.А**. О распространении электроупругого сдвигового сигнала в неоднородном пьезодиэлектрическом слое класса 6mm. Докл. НАН Армении 2014, т 114, №2, с.108-115

14. **Piliposian G. T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K. B**., Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium, International Journal Wave Motion, Elsevier publisher, v. 49, iss. 1, January, 2012, pp. 125-134

15. **Lobkist O. I., Chimenti D. E.,** Elastic guided waves in plates with rough surfaces, Appl. Phys. Lett. (1996), vol. **69**, pp. 3486-3502.

16. **Golub M.V.** and **Zhang C**., In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks, J. Acoust. Soc. Am. Vol.137, Issues 1, 2015, 238.

17. **Gasparyan D.K., Ghazaryan K.B**., Shear waves in functionally graded electro-magneto-elastic media, (2014), vol 3, Issue 10, Int. Journal of Eng. Research and Technology, pp. 769-776.

18. **Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposyan G.T**., Internal resonances in a periodic magneto-electro-elastic structure, J. Appl. Phys., (2014), vol. 116, 044107

19. **Vashishth A.K.,** Vishakha Gupta, Wave propagation in transversely isotropic porous piezoelectric materials, Int. J. of Solids and Structures, (2009), vol. 46, pp. 3620-3632.

20. **Гачкевич А., Казарян К., Терзян С**. Сдвиговые волны в анизотропной однонаправленно Û периодической структуре. В сб. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Тр. VIII межд. конф. Горис-Степанакерт. Ереван, Чартарагет, 2014, с.138-146

21. **Белубекян М.В.** О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности. Докл. АН Арм ССР, т. 90, №2, 1990, с.71-74

ԱՐԵԳ ՀՈՒՆԱՆՅԱՆ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու
ԱՆԴՐԱՆԻԿ ՔԱՄԱԼՅԱՆ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու

ՍԱՀՔԻ ՆՈՐՄԱԼ ԱԼԻՔԻ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԹՈՒՅԼ-ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏՈՒՄ

Մեխանիկական տարբեր եզրային պայմանների դեպքում ուսումնասիրվում են առաձգական շերտի նյութի երկայնական թույլ անհամասեռության, ինչպես նաև շերտի մակերևույթների թույլ անհարթությունների ազդեցությունները նորմալ ալիքի տարածման վրա: Ցույց է տրվում, որ իզոտրոպ առաձգական շերտի կոշտ ամրակցված հարթ մակերևույթների դեպքում ալիքի էներգիայի ասիմետրիկ տեղայնացումը տեղի է ունենում շերտի միջին հարթության մոտ: Մեխանիկորեն ազատ հարթ մակերևույթի դեպքում ալիքի էներգիայի տեղայնացումը տեղի է ունենում մերձմակերևութային գոտիներում, բայց ավելի ինտենսիվորեն այն կրկին տեղայնացվում է շերտի միջին մակերևույթի մոտ: Երկու դեպքում էլ նորմալ ալիքի վրա նյութի անհամասեռության ազդեցության պատճառով առաջանում են երկու նոր, փոխկապակցված հաճախություններ:

Մեխանիկորեն ազատ, թույլ մակերեսային անհարթությունների դեպքում առաջանում են ալիքի թույլատրելի հաճախականությունների գոտիներ (ինչպես նաև հաճախականությունների լռելյան գոտիները), և ալիքային էներգիայի տեղայնացումը տեղի է ունենում մերձմակերևութային գոտիներում:

AREG HUNANYAN
PhD in Physical and Mathematical Sciences
ANDRANIK KAMALYAN
PhD in Physical and Mathematical Sciences

INSTABILITY OF A NORMAL SHEAR (SH) WAVE IN A WEAKLY INHOMOGENEOUS ELASTIC LAYER

The article studies the effects of longitudinal weak heterogeneity of the material, as well as the geometric weak heterogeneity of the elastic layer surfaces on the normal shear wave, under various mechanical boundary conditions. It is shown, that in case of hard-clamped smooth surfaces of an isotropic elastic layer, the asymmetric localization of the wave energy occurs near the middle plane of the layer. In case of mechanically free smooth surfaces, the localization of the wave energy occurs in the near-surface zones. But more intensively the localization appears again near the middle plane of the layer. In both cases, due to the material inhomogeneity influence on the normal wave, two new cramped frequencies appear. In case of weakly inhomogeneous mechanically free surfaces, the frequency transmission zones of the formed wave (as well as frequency default zones) and localization in the near-surface layers of heterogeneity appear.

Հոդվածը ներկայացվել է տպագրության 02.09.2019թ.,
ուղարկվել է գրախոսության 05.09.2019թ., ընդունվել է տպագրության 20.09.2019թ.:

ՀՏԴ 517.911/958

GRIGOR BARSEGIAN
Doctor of Physics and Mathematics

INITIATING STUDIES OF ZEROS OF SOLUTIONS OF SOME BASIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

Despite the fact that the zeros of solutions of ordinary differential equations were widely studied, we were not able to find publications concerning zeros of solutions of the basic equations $x' = f(x,t)$. A recent *principle of zeros* giving bounds for the number of zeros of real functions permits to initiate similar studies.

Also, we consider some large systems of equations; both autonomous and non-autonomous. Particularly we study the well-known system of equations $x' = P(x,y)$, $y' = G(x,y)$, where $P(x,y)$ and $G(x,y)$ are arbitrary polynomials. For an arbitrary solution $(x(t), y(t)), 0 \leq a \leq t \leq b < \infty$, of this system we give upper bounds for the number of zeros of $x(t)$ and/or $y(t)$ occurring on the segment $[a,b]$.

MSC2010: 34A26, 34A30, 34A40, 34A99, 35B05.

Keywords: *Zeros of solutions of equations.*