

and their characteristics of sample's superconducting transition state have been observed. These changes are described in this research article and given their possible interpretations.

ГАРНИК МАНУКЯН

Российская Федерация, Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, аспирант кафедры моделирования
управляемых систем Высшей школы экономики и менеджмента

ГОАРИК ПЕТРОСЯН

Международный научно-образовательный центр, Национальная академия наук РА,
преподаватель, доцент, канд. физ.-мат. наук

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ УПРАВЛЕНИЯ ДОСТАВКАМИ

Данная работа посвящена построению и обоснованию адаптивной математической модели управления доставками. Реализована разработка оптимизационного математического метода маршрутизации транспорта с учетом различных ограничений и динамического изменения транспортной обстановки. Обосновано и осуществлено построение моделей маршрутизации в виде задачи оптимизации.

Ключевые слова: допустимый рейс, допустимый план доставок, расписания доставки, временной интервал, линейное расстояние, математическая модель управления доставками, задача маршрутизации транспорта, приближенные параметры графа транспортной доступности.

При решении в оперативном режиме задач по организации, планированию и управлению грузового автомобильного транспорта часто возникают ситуации, когда автотранспортная система представляет собой сложный механизм взаимодействия элементов. Осуществить адекватное описание функционирования такой сложной системы с помощью традиционного классического математического аппарата [1, 2] не представляется возможным, а проведение натурных испытаний требует больших затрат временных, денежных и людских ресурсов.

Одним из возможных путей преодоления данной проблемы является применение методов математического моделирования. Рассматривая системы доставки грузов с позиций организации и управления грузовыми перевозками, можно заметить, что любая транспортная система, каких бы она ни была размеров, представляет собой совокупность средств и путей сообщения, а также погрузочных и разгрузочных пунктов, подразделений анализа, планирования и управления процессами подготовки и доставки грузов [6].

В зависимости от таких признаков, как мощность осваиваемых грузопотоков, конфигурация транспортной схемы перевозок, количество пунктов погрузки и разгрузки, количество подвижного состава, закономерность влияния технико-эксплуатационных показателей на эффективность функционирования системы и автомобиля; необходимость определения порядка вхождения автомобиля в

систему, возможность применения определенного математического аппарата для описания функционирования систем, и в соответствии с иерархическим расположением все системы нижнего уровня подразделяются на: микро, особо малые, малые и средние транспортные системы [7-9]. Все вышеназванные автотранспортные системы доставки грузов объединены общим понятием: системы нижнего уровня (уровня маршрута). Общим признаком, объединяющим их в одну группу, является то, что там непосредственно осуществляется доставка груза, производится транспортная продукция, формируются затраты, негативно влияющие на конечную стоимость продукции, именно здесь транспортный процесс нуждается в адекватном управлении исполнением его операций. Еще одним объединяющим фактором является то, что эти системы могут и зачастую проектируются с помощью экономико-математических методов линейного программирования.

К перечисленным аспектам следует добавить то, что системы нижнего уровня являются, в свою очередь, начальными элементами, из которых складываются автотранспортные системы более высокого уровня.

Как правило, в состав средних систем входят элементы, которые могут представлять собой многофазные и многоканальные системы массового обслуживания. Поэтому модели таких систем во многих работах разрабатывались на основе теории вероятности, в частности, одного из ее разделов — теории массового обслуживания.

Особенностями функционирования средних систем являются следующие факторы:

- перевозка грузов осуществляется по радиальному маршруту, ветви которого начинаются и заканчиваются в одном центральном грузовом пункте, при этом автомобили взаимодействуют друг с другом через общие посты погрузки и разгрузки;
- необходимость последовательного выхода на линию автомобилей для исключения образования первоначальной очереди автомобилей;
- необходимость назначения очередной отправки автомобиля по одной из ветвей радиального маршрута в рамках их работы по расписанию таким образом, чтобы обеспечить ритмичное поступление автомобилей в грузовые пункты системы.

Центральный и периферийные пункты средних систем в силу сложившихся обстоятельств (планировки, механизации, режима работы и др.) имеют свой ритм работы, который может отличаться от ритма работы других участников транспортного процесса. В связи с этим появляются отдельные элементы системы, определяющие пропускную способность и, соответственно, ритм работы системы.

1. Первая математическая модель доставки грузов

Предложенные в статье математические модели оперируют с рейсами, как с основными сущностями. Таким образом, необходимо ввести понятие допустимого рейса, допустимого плана доставок (множества допустимых непересекающихся рейсов) и определить структуру данных понятий.

В качестве *допустимого плана доставок* примем множество пар *Routes* следующего вида: $(Route, \bar{v})$. здесь $\bar{v} \in Vehicles$, где *Vehicles* - множество транспортных средств, а *Route* представляет собой упорядоченную конечную последовательность пар вида (g, t) , где *g* - географическая точка, а *t* - время ее посещения.

Будем называть пару вида (g, t) , введенную выше, *элементом расписания доставки*.

Для простоты будем считать, что элементы расписания доставок любого рейса упорядочены по возрастанию времени посещения.

Для формализации соответствия между рейсами и обслуживающими их транспортными средствами введем отображение $f: Routes \rightarrow Vehicles$. Будем говорить, что $\bar{v} = f(Route)$, если они принадлежат одной паре из множества *Routes*. В виду того, что рейс может быть обслужен только одним транспортным средством и при этом одно транспортное средство может обслуживать несколько рейсов, данное отображение является неинъективным и несюръективным,

Пусть во множестве *Routes* содержится *t* элементов. Обозначим R_i множество доставок, точки загрузки и разгрузки которых попали в *i*-ый элемент *Routes*.

Сформулируем некоторые условия допустимости решения:

1. $R = \{R_i, i = 1, \dots, m\}, \cup_i R_i = S$, где *S* — множество заданий на доставку. $\forall i \neq j: R_i \cap R_j = \emptyset$, то есть объединение всех R_i полностью покрывает исходное множество доставок, и при этом одна доставка содержится в одном и только одном рейсе.

Сформулируем условия, которым обязана удовлетворять функция f :

2. Если $\bar{v} = f(R)$, то выполняются следующие два условия:

$$\begin{cases} \sum_{r \in R_i} w(r) \leq W(\bar{v}_i), \\ \sum_{r \in R_i} v(r) \leq V(\bar{v}_i). \end{cases}$$

3. Соответствие категории груза транспортному средству:

$$CV_{f(Routes_i)} \supseteq \bigcup_{r \in Route_i} CL_r.$$

4. Условия соответствия расписания:

$\forall i, \forall r \in R_i: L(r) \in TA(\bar{v}_i), D(r) \in TA(\bar{v}_i)$, где $D(r)$ и $L(r)$ — являются функциями, заданными на множестве доставок:

$D(r): S \rightarrow Time, L(r): S \rightarrow Time$. Здесь *Time* — временной интервал, для которого производится планирование.

Функции $D(r)$ и $L(r)$ показывают *момент разгрузки и загрузки* задания на доставку соответственно. Их физический смысл следующий: в момент времени $D(r)$ машина должна находиться под разгрузкой в пункте PD(r), а в момент $L(r)$ - под погрузкой в пункте PL(r).

Таким образом, на значения функций $D(r)$ и $L(r)$ можно наложить следующие ограничения:

5. $\forall i, \forall r \in R_i : D(r) \in TD(r), L(r) \in TL(r).$

Данные ограничения показывают, что транспортное средство может посещать пункт загрузки или разгрузки только в допустимый временной интервал.

Стоит отметить, что сущность, описываемая данной моделью, накладывает ограничение на вид функций $D(r)$ и $L(r)$, которые будут заданы при построении допустимого решения задачи в описываемом виде.

Для построения функций $D(r)$ и $L(r)$ необходимо ввести следующие обозначения.

Под *временем переезда* между двумя точками будем понимать функцию $G(t, u, v)$, показывающую, сколько времени необходимо затратить для переезда из пункта u в пункт v , осуществив выезд из u в момент времени t . Аналитический вид данной функции в текущей постановке неважен. Можно считать, что она задана таблично, хотя на практике для ее определения необходимо разрешить задачу поиска оптимального пути на графе дорог с учетом текущей дорожной обстановки. Данная функция не является симметричной в виду сложности городских транспортных сетей.

Также необходимо ввести в рассмотрение функции расстояния между двумя точками. Первая — это *линейное расстояние*, определяемое по формуле:

$$\rho(r_1, r_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Второе расстояние будем называть *географическим*. Оно должно определяться аналогично функции G , то есть по графу дорожной сети при решении задачи о поиске кратчайшего маршрута. Обозначим данную функцию $H(t, u, v)$. Очевидно, что значения G и H должны соответствовать одному и тому же маршруту.

В рамках данного исследования считается, что значения G и H определяются с учетом транспортной обстановки на момент выезда из пункта отправления u . При реализации разработанного алгоритма предполагалось использование внешней компоненты решения данной задачи. Данная компонента на основе статистических данных GPS навигации строит прогноз транспортной обстановки. Таким образом, удалось перейти от стохастической задачи к детерминированной. Однако на получение одного значения G и H на тестовых компьютерах уходило около 1 секунды процессорного времени, что вызвало необходимость минимизации количества обращений к данному сервису. Решение этой проблемы подробнее рассмотрено ниже.

Понятно, что транспортное средство не может мгновенно переместиться из одной точки в другую, поэтому при задании функций $D(r)$ и $L(r)$ необходимо учитывать тот факт, что точки в рейсе должны быть упорядочены в соответствии с порядком их прохождения машиной при выполнении заказов. Для указания порядка прохождения машиной точек в рейсе введем индекс j для элементов R_i , то есть состав рейса будет записываться следующим образом:

$R_i = \{R_i^j, j = 1, \dots, n_i\}$, где n_i — количество точек в рейсе, а j — порядок посещения точек.

Записав рейс не в виде множества заявок на доставку, а в виде упорядоченной по мере посещения транспортным средством упорядоченной последовательности точек доставки, получим рейс в виде:

$$RP = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}.$$

Здесь выполняется следующее условие:

$$\forall g_j \in RP \exists r \in R: g_j = PD(r) \text{ или } g_j = PL(r), \quad (1)$$

то есть все географические точки являются или точкой погрузки, или точкой разгрузки некоторого задания на доставку, попавшего в рейс.

Таким образом, обозначив t_{g_i} время посещения пункта g_i , получим, что этот момент времени совпадает либо с $D(r)$, либо с $L(r)$, где r — соответствующее задание на доставку.

Ввиду введенных обозначений можно сформулировать следующую формулу для определения t_{g_i} :

$$t_{g_i} = t_{g_{i-1}} + \tau_{g_i} + G(t_{g_{i-1}}, g_{i-1}, g_i). \quad (2)$$

Здесь τ - время пребывания в точке.

Учитывая описанные выше обозначения, можно задать вид функции $D(r)$ и $L(r)$:

$$\begin{cases} L(r_i) = t_{PL}(r_i), \\ D(r_i) = t_{PD}(r_i). \end{cases} \quad (3)$$

Будем называть *допустимым решением задачи маршрутизации транспорта* решение, удовлетворяющее описанным выше свойствам 1-4.

В качестве оптимального решения принимается допустимое решение, доставляющее минимум некоторому функционалу. Как правило, минимизируется функционал издержек на выполнение заказов. Такого рода функционал зависит от ряда параметров, подбор которых является темой для отдельного исследования. Однако основным источником издержек является, так называемая, транспортная работа, зависящая от суммарной длины пробега транспорта.

В настоящем исследовании за минимизируемый функционал примем суммарную длину всех рейсов. Подробнее аналитический вид и свойства данного функционала приведены ниже.

Таким образом, предложенная авторами **общая математическая модель управления доставками с динамическим набором ограничений** формулируется следующим образом:

$$\sum_{R \in Routes} \sum_{i=1}^{Count(RP_R)-1} \rho(g_i, g_{i+1}) \rightarrow \min; \quad (4)$$

$$\forall i \neq j: R_i \cap R_j = \emptyset; \quad (5)$$

$$\bar{v}_i = f(R_i) \Leftrightarrow \forall R_i \in Routes, \begin{cases} \sum_{r \in R_i} w(r) \leq W(\bar{v}_i), \\ \sum_{r \in R_i} v(r) \leq V(\bar{v}_i). \end{cases}; \quad (6)$$

$$CV_{f(Route_i)} \supseteq \bigcup_{r \in Route_i} CL_r; \quad (7)$$

$$\forall i, \forall r \in R_i, \bar{v}_i = f(R_i): L(r) = TA(\bar{v}_i), \quad D(r) = TA(\bar{v}_i); \quad (8)$$

$$\forall i, \forall r \in R_i: D(r) = TD(\bar{v}_i), \quad L(r) = TL(\bar{v}_i); \quad (9)$$

$$\forall g_j \in RP \quad \exists r \in R: \quad g_j = PD(r) \quad \text{или} \quad g_j = PD(r); \quad (10)$$

$$\forall s \in S \quad \exists R: PL(s) \in RP, \quad PD(s) \in RP. \quad (11)$$

Поставленная таким образом задача может не иметь допустимого решения при маленьком доступном парке транспортных средств.

3. Вторая математическая модель доставок грузов

Ввиду ограниченности транспортного парка, модель I не всегда имеет допустимое решение. Согласно требованиям экспертов, в таком случае также необходимо построить некоторый план доставок.

В этом случае необходимо принимать решение об исключении некоторых доставок из рассмотрения. Для решения этого вопроса допустимо вводить некоторую функцию полезности от посещения или непосещения точек доставок.

После опроса экспертов для унификации модели и в виду практической сложности было принято решение считать посещение каждой точки равно полезной для транспортной компании. Таким образом, решение задачи сводится к максимизации количества посещенных в ходе выполнения плана доставок точек.

Отдельно стоит отметить, что для полученного неполного плана доставок необходимо соблюсти выполнение всех ограничений модели I, кроме ограничения (11), гарантирующего обслуживание всех заказов на доставку.

Учитывая вышесказанное, математическая модель, используемая в этом случае, формализуется следующим образом:

$$\sum_{R \in Routes} Count(RP_R) \rightarrow max; \quad (12)$$

Здесь $Count(RP_R)$ означает количество географических точек, попавших в рейс R .

Данная математическая модель использует ограничения (5)-(10), то есть полученные рейсы удовлетворяют ограничениям расписания, грузоподъемности и возможности дозагрузки в процессе следования по маршруту.

4. Общая методология оптимизации в вышеуказанных моделях

Задачи маршрутизации с подобного рода ограничениями, как правило, решаются различными генетическими методами. Данные методы подразумевают наличие полностью определенного графа транспортной доступности (матрицы, содержащей время или расстояния переездов между географическими точками). С учетом вопросов прогнозирования транспортной обстановки на момент проезда машины граф транспортной доступности **нельзя считать детерминированным**. То есть его необходимо получать в ходе решения задачи.

Такой подход существенно увеличит время работы алгоритма, так как для n доставок необходимо решить $n(n-1)$ задач прогнозирования. При этом возникла

необходимость **минимизировать количество обращений к графу транспортной доступности.**

Для достижения этой цели предложен двухшаговый метод оптимизации, на первом шаге которого **можно использовать приближенные параметры графа транспортной доступности** (например, линейные расстояния, определение которых требует несравнимо меньших затрат ресурсов, чем решения, задачи прогнозирования). Этот подход, как показало тестирование полученного алгоритма решения, позволил сократить время получения решения с нескольких часов (потраченных на прогнозирование графа транспортной доступности, как показало профилирование) до 15 минут на входных данных, включающих 350 заявок на доставку.

В настоящем исследовании предлагается разбить процесс построения решения задачи маршрутизации с различными ограничениями на несколько этапов.

В процессе решения рассматриваемой задачи требуется разрешить следующие подзадачи:

1. определить количество рейсов, необходимых для обслуживания набора заявок на доставку;
2. определить, какие заявки на доставку должны быть обслужены в каждом из рейсов;
3. упорядочить доставки в рейсе, минимизируя оптимизационный функционал.

В рамках разрабатываемого метода решения задачи маршрутизации предполагается решать данные задачи отдельно. Таким образом, вначале будет определено предположительное количество необходимых для обслуживания набора заявок на доставку рейсов и распределение по ним точек доставки, а затем будет произведено упорядочивание точек внутри рейсов.

Поскольку в процессе решения задачи необходимо учитывать большое количество ограничений, в том числе ограничения по расписанию, то в процессе решения подзадач 2 и 3 возможно уточнение результатов решения предыдущих подзадач.

Такой подход делает построенный метод более гибким и позволяет рассмотреть большее число методов решения каждой из описанных подзадач для достижения лучших результатов. Представление задачи маршрутизации в виде нескольких подзадач позволяет производить гибкую настройку каждого из этапов решения и создавать адаптивные методы решения транспортной задачи с минимальными затратами на изменение для каждого пользователя с учетом его требований. Помимо этого, декомпозиция множества заявок на доставку позволяет существенно снизить размерность решаемой задачи.

Предлагаемая методология может позволить применять различные методы построения рейса в зависимости от вида и свойств каждого из полученных географических районов, обеспечивая, таким образом, индивидуальный подход для улучшения качества получаемых рейсов и времени решения задачи маршрутизации в целом.

Предлагаемое в исследовании разбиение процесса поиска решения на независимые друг от друга подзадачи предполагает возможность гибкой замены методов решения каждой из них.

Далее в рамках предложенной методологии строится и тестируется метод и алгоритм построения решения транспортной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crainic T.G., Laporte G.** Planning models for freight transportation: European Journal of Operational Research 1997; 97: 409-438.
2. **Toth P., Vigo D.** (Eds.). The vehicle routing problem, SIAM monographs on discrete mathematics and applications. — Philadelphia: SIAM, 2001.
3. **Sigurd M., Pisinger D., Sig M.** The pickup and delivery problem with time windows and precedences: Transportation Science 2004; 38: 197-209.
4. **Berger J., Barkaoui M., Braysy O.** A route-directed hybrid genetic approach for the vehicle routing problem with time windows: INFOR 2003; 41: 179-194.
5. **Chiang W.C., Russell R.A.** A reactive tabu search metaheuristic for the vehicle routing problem with time windows: INFORMS Journal on Computing 1997; 9: 417-430.
6. **Николин В.И., Мочалин С.М., Витвицкий Е.Е., Николин И.В.** Проектирование автотранспортных систем доставки грузов. — Омск. Изд-во СибАДИ, 2001. 187 с. Генетический алгоритм./ Jesse Russell, Ronald Cohn -М: Книга по Требованию, 2012.
7. **Логистика: Учебное пособие/ Т. И. Савенкова.** -М: Омега-Л, 2006, 256 с.
8. **Перцовский А.К.** Итеративно-имитационный метод построения решения задачи коммивояжера с массогабаритными ограничениями и временными окнами с учетом динамической транспортной обстановки. //RSDN Magazine №4 2012 г- М: К-Пресс, 2012. С. -3-4.
9. **Перцовский А.К.** Декомпозиция задачи маршрутизации с временными окнами. //RSDN Magazine №4 2012 г-М: К-Пресс, 2012. -С. 5-7.

ԳԱՌՆԻՎ ՄԱՆՈՒԿՑԱՆ

Ռուսաստանի Դաշնության առաջին նախագահ Բ. Ն. Ելցինի անվան Ուրալի դաշնային համալսարան,
Տնտեսագիտության և կառավարման բարձրագույն դպրոցի Կառավարվող համակարգերի մոդելավորման ամբիոնի ասպիրանտ

ԳՈՀԱՐԻՎ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՀՀ ԳԱԱ Գիտակրթական միջազգային կենտրոնի
դասախոս, դոցենտ, ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու

ԱՌԱՔՄԱՆ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՈՐՈՇ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼՆԵՐ

Հոդվածը նվիրված է առաքման կառավարման ադապտացիոն մաթեմատիկական մոդելի կառուցմանն ու հիմնավորմանը: Իրականացվել է տրանսպորտային երթուղիների օպտիմալացման մաթեմատիկական մեթոդի մշակումը՝ հաշվի առնելով տրանսպորտային իրավիճակում տարբեր սահմանափակումները և դինամիկ փոփոխությունները: Օպտիմալացման խնդրի տեսքով հիմնավորված և իրականացված է երթուղային մոդելների կառուցումը:

GARNIK MANUKYAN

Ural Federal University named after the first President of Russia BN Yeltsin
Graduate student of the chair of Modeling of Controlled Systems of the Graduate School of
Economics and Management

GOHARIK PETROSYAN

International Scientific-Educational Center of National Academy of NAS RA, Lecturer
Candidate of Mathematics, Associate Professor

ABOUT SOME MATHEMATICAL MODELS OF DELIVERY MANAGEMENT

The paper is devoted to the construction and validation of the adaptive mathematical model of delivery management. A mathematical optimization method development of transport routing was realized, taking into account various restrictions and dynamic changes in the transport situation. The construction of routing models has been substantiated and implemented in the form of optimization objective.

ГАРНИК МАНУКЯН

Российская Федерация, Уральский федеральный университет имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина, аспирант кафедры моделирования управляемых систем
Высшей школы экономики и менеджмента

**НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА**

Статья посвящена исследованию современных методов для решения задач маршрутизации транспорта. Приведен краткий обзор основных конструктивных классических алгоритмов, подробно описаны данные алгоритмы и их расширения. Рассмотрена оптимизация отдельного маршрута, эффективность которой подтверждена результатами вычислительного эксперимента, формализация задачи и разработка конкретных алгоритмов, которые в дальнейшем могут быть применены на практике. Также в статье приводится обзор некоторых численных методов решения транспортных задач.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта, перенос вершин, обмен рёбер между маршрутами, сбережение, время исполнения.

Проблема оптимизации поставок продукции всегда привлекала повышенное внимание экономистов, специалистов по логистике и математиков. Среди экономистов это обусловлено важностью транспортировки товаров и связанных с ней издержек (Бауэрсокс, Клосс, 2008, с. 47). Для математиков этот интерес вызван ее значительной сложностью. В литературе рассматриваемая задача известна как задача маршрутизации транспорта (Vehicle Routing Problem); ее не следует путать с транспортной задачей (иногда называемой задачей Монжа-Канторовича), которой посвящено много книг и работ, в том числе известная монография (Гольштейн, Юдин, 1969).

Задача маршрутизации транспорта (ЗМТ) является обобщением известной задачи коммивояжера и, следовательно, принадлежит к классу NP-полных