ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 108 2008 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.23

А. Г. Камалян

Индексная факторизация матриц-функций

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 19/VIII 2007)

Ключевые слова: *матрица-функция, частные индексы, факторизация*

1°. Данная работа является естественным продолжением статьи [1], где приведены некоторые структурные свойства ядер теплицевых операторов. Здесь на основе результатов [1] для широких классов матриц-функций (далее м.-ф.) порядка $n \times n$, определенных на замкнутом контуре Γ комплексной плоскости, вводится понятие частных индексов, представляющих из себя набор n элементов множества $\dot{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ (с естественной упорядоченностью). М.-ф. G, имеющие конечные частные индексы $\varkappa_1 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n$, допускают представление вида

$$G(t) = G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t) \qquad (t \in \Gamma), \tag{1}$$

где $\Lambda(t) = diag[t^{\varkappa_1}, \dots, t^{\varkappa_n}]$, м.-ф. $G_+^{\pm 1}$ аналитичны во внутренней области контура, м.-ф. $G_-^{\pm 1}$ аналитичны во внешней области контура (включая ∞) и кроме того м.-ф. $G_\pm$ обладают дополнительными граничными свойствами. Представления такого типа мы называем индексной факторизацией м.-ф. G. Понятие индексной факторизации естественно в том смысле, что если м.-ф. G допускает факторизацию Винера–Хопфа, то G допускает и индексную факторизацию, которая в данном случае совпадает с факторизацией Винера–Хопфа.

Пусть Ω^+ многосвязная область комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, граница Γ которой представляет из себя совокупность конечного числа замкнутых непересекающихся жордановых спрямляемых кривых. Через Ω^- будем обозначать дополнение к $\bar{\Omega}^+$ в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, а через $L_p^{\pm}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, подпространство функций из L_p $(= L_p(\Gamma))$, совпадающих почти всюду на Γ с угловыми предельными значениями функций из класса Смирнова $E_p^{\pm}$ области $\Omega^{\pm}$. Множество функций из L_p^-, исчезающих в бесконечности, будем обозначать через $\mathring{L}_p^-$. Оператор, проектирующий прямую сумму $\mathcal{L}_p = L_p^+ \dot{+} \mathring{L}_p^-$ на L_p^+ $(\mathring{L}_p^-)$ параллельно $\mathring{L}_p^-$ (L_p^+), обозначим через $\mathcal{P}_{\pm}$. Условимся также пространство вектор-столбцов (матриц) порядка n $(n \times m)$ с элементами из линейного пространства X обозначать через X^n $(X^{n\times m})$, а действие проекторов $\mathcal{P}_{\pm}$ в $\mathcal{L}_p^n$ $(\mathcal{L}_p^{n\times m})$ понимать покомпонентно.

Следуя [2], под правой факторизацией (далее $WH(r,p)$-факторизация) м.-ф. G в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ относительно контура Γ будем понимать представление вида (1), где $G_{\pm} \in \left(L_p^{\pm}\right)^{n\times n}$, $(G_{\pm})^{-1} \in \left(L_q^{\pm}\right)^{n\times n}$ $(q = p/(p-1))$, $\Lambda(t) = diag\left[t^{\varkappa_1}, \dots, t^{\varkappa_n}\right]$, $\varkappa_1 \leqslant \dots \leqslant \varkappa_n$ — целые числа. Как известно (см. [2]), числа $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$ определяются однозначно и называются правыми частными p-индексами. В данной работе эти числа мы будем называть $WH(r,p)$-частными индексами м.-ф. G. Факторизация более общего типа, допускающая наличие бесконечных индексов, введена и рассмотрена в [3,4].

2°. Пусть G м.-ф. порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Γ принимают конечные комплексные значения, $\mathcal{D}_p^+$ — пространство всех в.-ф. (вектор-функций) $\varphi_+ \in \left(L_p^+\right)^n$ таких, что $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, $\mathcal{D}_p^-$ — пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in \left(L_p^-\right)^n$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_- = G\varphi$. Пусть $T_p(G)$ — оператор Теплица с областью определения $\mathcal{D}_p^+$, действующий по формуле $T_p(G)\varphi_+ = \mathcal{P}_+(G\varphi_+)$, а τ_a^+ $(a \in \mathbb{C})$ и τ_a^- $(a \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ операторы сдвига, действующие на функцию (соответственно на в.-ф. и м.-ф.) f по формулам $(\tau_a^+ f)(t) = (t-a)f(t)$, $\tau_a^- = -\frac{1}{a}\tau_a^+\left(\tau_0^+\right)^{-1}$. В частности предполагается, что $\tau_\infty^- = \left(\tau_0^+\right)^{-1}$. Обозначим через $\mathcal{N}_{p,j}^+$ $(j \in \mathbb{Z})$ ядра операторов $T_p\left(\left(\tau_0^+\right)^{-j} G\right)$. Если $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j}^+$, то в.-ф. $\varphi_- = \left(\tau_0^+\right)^{-j+1} G\varphi_+$ назовем j-двойственной к φ_+. Множество в.-ф. j-двойственных к элементам множества $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}_{p,j}^+$ назовем j-двойственным множеством к $\mathcal{M}$. Подпространство, j-двойственное к $\mathcal{N}_{p,j}^+$, будем обозначать через $\mathcal{N}_{p,j}^-$. Следуя [1], подпространство $\hat{\mathcal{N}}_{p,j}^{\pm} = \mathcal{N}_{p,j}^{\pm} + \left(\tau_0^+\right)^{\pm 1} \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$ будем называть $(p,j)_{\pm}$-наследственным подпространством, а его произвольное прямое дополнение $\mathcal{M}_{p,j}^{\pm}$ в $\mathcal{N}_{p,j+1}^{\pm}$ $(p,j)_{\pm}$-индексным подпространством м.-ф. G. Для числа $\hat{n} := \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \dim \mathcal{M}_{p,j}^+$ справедливо неравенство $\hat{n} \leqslant n$ (см. [1]). Наряду с $\mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$, $\mathcal{M}_{p,j}^{\pm}$ для любого $z_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ определим подпространство $\mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z_{\pm}) = \left\{\varphi_{\pm}(z_{\pm});\ \varphi_{\pm} \in \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}\right\}$, $\mathcal{M}_{p,j}^{\pm}(z_{\pm}) = \left\{\varphi_{\pm}(z_{\pm});\ \varphi_{\pm} \in \mathcal{M}_{p,j}^{\pm}\right\}$. Если для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ $\dim \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z_{\pm}) < \max\limits_{z\in\Omega^{\pm}} \dim \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z)$, то $z_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ назовем s-точкой м.-ф. G. Множество s-точек в $\Omega^{\pm}$ не более чем счетно (см. [1]). В [1] доказывается также справедливость равенств:

$$\dim \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z^{\mp}) = \dim \mathcal{M}^{+}_{p,j} = \dim \mathcal{M}^{-}_{p,j}\,, \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

$$\mathcal{N}^{\pm}_{p,j}(z_{\pm}) + \mathcal{M}^{\pm}_{p,j}(z_{\pm}) = \mathcal{N}^{\pm}_{p,j+1}(z_{\pm})\,, \qquad j \in \mathbb{Z},\ z_{\pm} \in \Omega^{\pm}. \tag{3}$$

Из этих равенств следует, что числа $n_- := \dim\left(\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{+}_{p,j}(z)\right)$, $n_+ := n - \dim\left(\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{+}_{p,j}(z)\right)$ одинаковы для всех $z \in \Omega^+$, не являющихся s-точкой м.-ф. G.

Функцию $\mu_p : \hat{\mathbb{Z}} \to \mathcal{N}_0$ ($\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$) определим с помощью равенств $\mu_p(j) = \dim \mathcal{M}^{+}_{p,j}$ ($j \in \mathbb{Z}$) и $\mu_p(\pm\infty) = n_{\pm}$. Условимся $\varkappa_{\pm\infty,1} = \cdots = \varkappa_{\pm\infty,n_{\pm}} = \pm\infty$ называть $\pm$ бесконечными (r_+, p)-частными индексами м.-ф. G. Пусть $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\} = \{j \in \mathbb{Z};\ \mu_p(j) > 0\}$, $\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_s$ и $\mu_p(\eta_i) = n_i$ ($i = 1, \ldots, s$). Числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\hat{n}}$, определенные равенствами $\varkappa_1 = \cdots = \varkappa_{n_1} = \eta_1$, $\varkappa_{n_1+1} = \cdots = \varkappa_{n_1+n_2} = \eta_2$, $\ldots$, $\varkappa_{n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}+1} = \cdots = \varkappa_{\hat{n}} = \eta_s$, будем называть конечными (r_+, p)-частными индексами. В случае $\hat{n} = n$ будем говорить, что м.-ф. G допускает конечную (r_+, p)-индексацию.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *М.-ф. G порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Γ принимают конечные комплексные значения, имеет ровно n (r_+, p)-частных индексов, т.е. $n_- + \hat{n} + n_+ = n$. Кроме того, если $\mu_p(-\infty) = 0$, то для любого $k \in \mathbb{Z}$*

$$\dim \mathcal{N}^{\pm}_{p,k} = \sum_{j<k} (k - j)\mu_p(j). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ все значения (r_+, p)-частных индексов м.-ф. G, $\eta_0, \eta_{s+1} \in \mathbb{Z}$ и $\eta_0 \leqslant \eta_1$, $\eta_{s+1} > \eta_s$. Из равенства (3) следует, что $n_- = \dim \mathcal{N}_{p,\eta_0}(z)$, $n_+ = n - \dim \mathcal{N}_{p,\eta_{s+1}}(z)$, как только z не является s-точкой м.-ф. G. Из (2) следует также, что $\mathcal{N}^{+}_{p,\eta_{s+1}}(z) = \mathcal{N}^{+}_{p,\eta_0}(z) + \mathcal{M}^{+}_{p,\eta_1}(z) + \cdots + \mathcal{M}^{+}_{p,\eta_s}(z)$ ($z \in \Omega^+$). Отсюда, пользуясь равенством (2), получим $n_- + \hat{n} + n_+ = n$. Если $\mu_p(-\infty) = 0$, то $\mathcal{N}^{+}_{p,\eta_-} = \{0\}$. Тогда в силу теоремы 7 из [1] для $\eta_{\ell<k\leqslant\eta_{\ell+1}}$ ($\ell = 1, \ldots, k$) имеет место равенство

$$\mathcal{N}^{+}_{p,k} = \mathcal{M}^{+}_{p,\eta_1} + \tau_0^+ \mathcal{M}^{+}_{p,\eta_1} + \cdots + \left(\tau_0^+\right)^{k-\eta_1-1} \mathcal{M}^{+}_{p,\eta_1} + \mathcal{M}^{+}_{p,\eta_2} + \cdots + \tau^{k-\eta_\ell-1} \mathcal{M}^{+}_{p,\eta_\ell}.$$

Формула (4) является следствием последнего равенства.

3°. В работе [1] доказано, что подпространство $\mathcal{M}^{-}_{p,j}$ является $(p, j)_-$-индексным подпространством тогда и только тогда, когда оно является $(j+1)$-двойственным множеством к некоторому $(p, j)_+$-индексному подпространству.

Если $\xi_1 < \cdots < \xi_s$ все конечные значения (r_+, p)-частных индексов м.-ф. G, а $\mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_k}$ произвольные $(p,\xi_k)_{\pm}$-индексные подпространства, то $\mathcal{M}^{\pm}_p = \mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_1} + \cdots + \mathcal{M}^{\pm}_{p,\xi_s}$ будем называть $p_{\pm}$-индексными пространствами м.-ф. G. Если $\mathcal{M}^{-}_{p,\xi_k}$ $(k = 1, \ldots, s)$ являются $(\xi_k + 1)$-двойственными к $\mathcal{M}^{+}_{p,\xi_k}$, то $p_{\pm}$-индексные пространства м.-ф. будем называть двойственными.

Замечание 1. В [1] доказывается (см. теоремы 3 и 4), что м.-ф. Φ^+ (Φ^-), столбцы которого являются базисом p_+ (p_-)-индексного пространства $\mathcal{M}^+_p$ $(\mathcal{M}^-_p)$ м.-ф. G, обладают тем свойством, что для любой точки $z \in \bar{\Omega}^+$ $(z \in \Omega^-)$ и ненулевого $v \in \mathbb{C}^n$ в.-ф. $(\tau_z^+)^{-1}\Phi^+ v$ $\left((\tau_z^-)^{-1}\Phi^- v\right)$ не принадлежит $\mathcal{D}^+_p$ $(\mathcal{D}^-_p)$.

Скажем, что м.-ф. G допускает (r_+, p)-индексную факторизацию, если G допускает представление (1), где $G_{\pm}$ и Λ удовлетворяют следующим условиям: а) $G_{\pm} \in (L^{\pm}_p)^n$; б) для любых $z \in \bar{\Omega}^+$, $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ в.-ф. $(\tau_z^+)^{-1} G_+ v$ не принадлежит $\mathcal{D}^+_p$; в) для любых $z \in \Omega^-$, $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ в.-ф. $(\tau_z^-)^{-1} G_- v$ не принадлежит $\mathcal{D}^-_p$; г) $\Lambda(t) = diag\,[t^{\varkappa_1}, \ldots, t^{\varkappa_n}]$, где $\varkappa_1 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n$ — целые числа.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть м.-ф. G имеет конечную (r_+, p)-индексацию и $\mathcal{M}^{\pm}_p$ некоторые двойственные $p_{\pm}$-индексные пространства м.-ф. G. Тогда м.-ф. G допускает (r_+, p)-индексную факторизацию (1), где числа $\varkappa_1 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n$ совпадают с (r_+, p)-частными индексами м.-ф. G, а столбцы м.-ф. $G_{\pm}$ являются базисом $\mathcal{M}^{\pm}_p$.*

Доказательство. Пусть (r_+, p)-частные индексы $\varkappa_1 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n$ м.-ф. G принимают значения $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ с кратностями $n_1, \ldots, n_s$ соответственно, $\mathcal{M}^{\pm}_p = \mathcal{M}^{\pm}_{p,\eta_1} + \cdots + \mathcal{M}^{\pm}_{p,\eta_s}$, где $\mathcal{M}^{\pm}_{p,\eta_k}$ $(k = 1, \ldots, s)$ являются $(p, \eta_k)_{\pm}$-индексными подпространствами м.-ф. G, а $G^+_{k,1}, \ldots, G^+_{k,n_k}$ некоторые базисы $\mathcal{M}^+_{p,\eta_k}$. Тогда в.-ф. $G^-_{i,k} = (\tau_0^+)^{-\eta_i} G G^+_{i,k}$ $(i = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, n_i)$ являются базисом $\mathcal{M}^-_{p,\eta_k}$. В силу замечания представление (1) с м.-ф. $\Lambda(t) = [t^{\varkappa_1}, \ldots, t^{\varkappa_n}]$, $G_{\pm} = [G^{\pm}_{11}, \ldots, G^{\pm}_{1,n_1}, G^{\pm}_{21}, \ldots, G^{\pm}_{s,m}]$ является (r_+, p)-индексной факторизацией м.-ф. G.

Замечание 2. В случае $0 < \tilde{n} < n$ для м.-ф. $G_{\pm}$, составленных из базисов $p_{\pm}$-индексных пространств, остается справедливым равенство $GG_+ = G_-\Lambda_{\varkappa}$. При этом $G_{\pm} \in (L^{\pm})^{n \times \tilde{n}}$ и $G_{\pm}$ удовлетворяют условиям б) и в) с заменой n на $\tilde{n}$.

Теорема 3. *Пусть м.-ф. G допускает (r_+, p)-индексную факторизацию (1) и $\mu_p(-\infty) = 0$. Тогда м.-ф. G допускает конечную (r_+, p)-индексацию с (r_+, p)-частными индексами, совпадающими с числами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$. Кроме того столбцы м.-ф. $G^{\pm}$ являются базисом некоторых $p_{\pm}$-двойственных индексных пространств.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что из условия б) следует, что $\det G(0) \neq 0$ и потому $\dim \mathcal{N}^+_{p,\varkappa_n+1}(0) = n$. Но тогда $n_+ = 0$, т.е. м.-ф. G допускает конечную (r_+, p)-индексацию. Пусть (r_+, p)-частные индексы $\chi_1 \leqslant \cdots \leqslant \chi_n$

м.-ф. G принимают значения $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ и $G = X_- \Lambda_\chi X_+^{-1}$ является (r_+, p)-индексной факторизацией, построенной в теореме 2. Из теоремы 7 [1] следует существование полиномиальной матрицы Q такой, что $G_+ = X_+ Q$. Нетрудно видеть, что из условия б) и равенства $G_- = X_- \Lambda_\chi Q \Lambda_\varkappa^{-1}$ следует, что $\det Q(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$, т.е. $\det Q$ является отличной от нуля постоянной. Пусть $Q = \left(q_{ij}^+\right)_{i,j=1}^n$, $X_-^{-1} G = \left(q_{ij}^-\right)_{i,j=1}^n$. Тогда

$$\left(\tau_0^+\right)^{\varkappa_j - \chi_i} q_{ij}^- = q_{ij}^+ \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Пользуясь разложением Лапласа и равенством (5), нетрудно убедиться, что $\varkappa_i \geqslant \chi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Учитывая, что $Q^{-1} = G_+ X_+^{-1}$ также является полиномиальной матрицей из симметричных соображений, получим, что $\Lambda_\chi = \Lambda_\varkappa$. Подставляя в (5) $\chi_i = \varkappa_j$, можем заключить, что $q_{ij}^+ = 0$ для $j < i$ и $deg q_{ij}^+ \leqslant \varkappa_j - \varkappa_i$ для $j \geqslant i$. Отсюда следует, что м.-ф. Q^{-1} допускает блочно-треугольное представление $Q^{-1} = (H_{ij})_{i,j=1}^n$, где $H_{ij} = 0$ при $i > j$ и $deg H_{ij} \leqslant \eta_j - \eta_i$ при $i \leqslant j$. Пусть $G_{11}^+, \ldots, G_{1,n_1}^+, G_{21}^+, \ldots, G_{s,n_s}^+$ столбцы м.-ф. G^+, $X_{11}^+, \ldots, X_{1,n_1}^+, X_{21}^+, \ldots, X_{s,n_s}^+$ столбцы м.-ф. X^+, $G_i^+ = \left[G_{i,1}^+, \ldots, G_{i,n_i}^+\right]$, $\alpha_i^+ = \left[X_{i,1}^+, \ldots, X_{i,n_i}^+\right]$. Очевидно, что $X_i^+ = G_1^+ H_{1i} + G_2^+ H_{2i} + \cdots + G_i^+ H_{ii}$. Отсюда нетрудно заметить, что в.-ф. $G_{i,r}^+$ $(r = 1, \ldots, n_i)$ принадлежат N_{p,η_i+1}^+, но не принадлежат $\hat{N}_{p,\eta_i}^+$. Из равенства $n_i = \dim\left(\mathcal{N}_{\eta_{i+1}}^+ / \hat{\mathcal{N}}_{\eta_i}^+\right) = \dim span\left\{G_{i,1}^+, \ldots, G_{i,n_i}^+\right\}$ следует, что $span\left\{G_{i,1}^+, \ldots, G_{i,n_i}^+\right\}$ является $(\eta_i, p)_+$-индексным подпространством.

Следствие 1. *Пусть для м.-ф. G $\mu_p(-\infty) = 0$ и $G = G_- \Lambda_\varkappa G_+^{-1}$, $G = G'_- \Lambda_{\varkappa'} \left(G'_+\right)^{-1}$ две различные (r_+, p)-индексные факторизации м.-ф. G. Тогда $\Lambda_\varkappa = \Lambda_{\varkappa'}$ и существует невырожденная полиномиальная м.-ф. $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ с $q_{ij} = 0$ при $j < i$, $deg q_{ij} \leqslant \varkappa_j - \varkappa_i$ при $j \geqslant i$ и такая, что $G'_+ = G_+ Q$, $G'_- = G_- \Lambda_\varkappa Q \Lambda_{\varkappa'}^{-1}$. Обратно, если $G'_\pm$ определены по данным формулам, а представление $G = G_- \Lambda_\varkappa G_+^{-1}$ является (r_+, p)-индексной факторизацией м.-ф. G, то представление $G = G'_- \Lambda_\varkappa \left(G'_+\right)^{-1}$ также является (r_+, p)-индексной факторизацией м.-ф. G.*

4°. Установим связь между $WH(r,p)$-факторизацией и (r_+, p)-индексной факторизацией.

Теорема 4. *Пусть м.-ф. G допускает $WH(r,p)$-факторизацию $(1 < p < \infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения: м.-ф. G допускает конечную (r_+, p)-индексацию, причем ее (r_+, p)-частные индексы совпадают с $WH(r,p)$-частными индексами; $WH(r,p)$-факторизация м.-ф. G одновременно является и (r_+, p)-индексной факторизацией; произвольная (r_+, p)-индексная факторизация G является $WH(r,p)$-факторизацией.*

Доказательство. Пусть представление (1) является $WH(r,p)$-факторизацией м.-ф. G, $WH(r,p)$-частные индексы $\varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ принимают значения η_j $(j = 1, \ldots, k)$ с кратностью n_j, $G_{i,j}^+$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n_i)$ столбцы м.-

ф. G_+ и $\eta_1 < \cdots < \eta_k < \eta_{k+1}$, где η_{k+1} произвольное целое число. Нетрудно заметить, что $\mathcal{N}_{p,j}^+ = \{0\}$ при $j \leqslant \eta_1$ и система в.-ф. $\left\{\left(\tau_0^+\right)^\ell G_{m,j}^+\right\}$ ($m = 1, \ldots, i$; $j = 1, \ldots, n_m$; $\ell = 0, \ldots, j - \eta_m - 1$) является базисом $\mathcal{N}_{p,j}^+$ при $\eta_i < j < \eta_{i+1}$ ($i = 1, \ldots, k$). Отсюда следует, что $\mathcal{N}_{p,j+1}^+ = \hat{\mathcal{N}}_{p,j}^+$ при $j \in \mathbb{Z} \setminus \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ и $\mathcal{N}_{p,\eta_s+1}^+ = \hat{\mathcal{N}}_{p,\eta_s}^+ + span\left\{G_{s,1}^+, \ldots, G_{s,n_s}^+\right\}$ ($s = 1, \ldots, k$). Таким образом, числа $\varkappa_1 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n$ являются (r_+, p)-частными индексами, а $\mathcal{M}_{p,\eta_s}^\pm = span\left\{G_{s,1}^\pm, \ldots, G_{s,n_s}^\pm\right\}$ — $(\eta_s + 1)$-двсйственными индексными подпространствами м.-ф. G. Из теоремы 2 следует, что (1) является также (r_+, p)-индексной факторизацией. Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 2.2 [2] и следствия 1.

Замечание 3. При некоторых ограничениях на м.-ф. G (см. замечание 1 [1]) нетрудно доказать, что условие в) (r_+, p)-индексной факторизации выполняется автоматически и для $z \in \Gamma$. Заметим также (см. замечание 2 [1]), что аналогичным образом могут быть введены понятия (r_-, p), $(\ell_\pm, p)$-частных индексов и (r_-, p), $(\ell_\pm, p)$-индексной факторизации.

Ереванский государственный университет

А. Г. Камалян

Индексная факторизация матриц-функций

Понятие частных индексов обычно ассоциируется с факторизацией Винера – Хопфа. В статье понятие частных индексов введено на основе структурных свойств ядер теплицевых операторов. Вводится также понятие индексной факторизации матрицы-функции. Для матриц-функций, допускающих факторизацию Винера – Хопфа, индексная факторизация совпадает с факторизацией Винера – Хопфа.

Ա. Հ. Քամալյան

Մատրից - ֆունկցիաների ինդեքսային ֆակտորիզացիա

Մասնավոր ինդեքսների գաղափարն ընդհանրապես սահմանվում է Վիներ – Հոփֆի ֆակտորիզացիայի գաղափարի հետ միաժամանակ: Հոդվածում մասնավոր ինդեքսները ներմուծված են տյոպլիցյան օպերատորների կորիզների կառուցվածքային հատկությունների հիման վրա: Ներմուծվում է նաև մատրից-ֆունկցիայի ինդեքսային ֆակտորիզացիայի գաղափարը: Վիներ – Հոփֆի ֆակտորիզացիա թույլ տվող մատրից-ֆունկցիաների համար ինդեքսային ֆակտորիզացիան համընկնում է Վիներ – Հոփֆի ֆակտորիզացիայի հետ:

A. H. Kamalyan

Indice Factorization of Matrix Functions

The concept of partial indices of matrix functions is usually associated with the Wiener-Hopf factorization. In this paper the concept of partial indices is entered on the base of structural properties of kernels of Teoplitz operators. The concept of indice factorization of matrix functions is also entered. For matrix functions which are admitting Wiener-Hopf factorization, the indice factorization coincides with Wiener-Hopf factorization.

Литература

1. *Камалян А. Г.* - ДНАН Армении. 2007. Т. 107. N4. С. 316-322

2. *Litvinchuk G. S., Spitkovskii I. M.* Factorisation of Measurable Matrix Function Akademie — Verlag, Berlin, 1987.

3. *Спитковский И. М.* - ДАН СССР. 1986. Т. 286. N 13. С. 559-562

4. *Спитковский И. М.* - Мат. сборник. 1988. Т. 135. Вып. 4. С. 533-550.