ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 | 1996 | №2-4

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.95

В. А. Варданян

О реализации логических функций комбинационными схемами, тестируемыми относительно неисправностей задержек путей

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукуряном 25/I 1996)

В ([1,2]) было введено понятие "робастного теста" (robust test) для обнаружения неисправностей задержек путей (path delay fault) в комбинационных схемах. Неисправность задержки пути в комбинационной схеме называется робастно тестируемой, если существует пара тестовых наборов, в результате последовательного применения которых на входах схемы переходный сигнал распространяется вдоль данного пути до выхода схемы независимо от величины задержек на других путях в схеме. Следует отметить, что во время применения робастных тестов случайные паразитные сигналы или нежелательные переходы не могут приводить к ложным результатам тестирования. В ([3]) разработан теоретический аппарат для анализа и синтеза комбинационных схем, робастно тестируемых относительно неисправностей задержек всех путей в схеме. Такие схемы принято называть вполне RPDFT (robust path delay fault testable) схемами (см. ([3,4])).

Основная цель настоящей работы — исследование возможности реализации различных классов булевых функций в виде вполне PRDFT схем, являющихся комбинационными схемами глубины 2.

Подробные определения всех понятий, не приводимых ниже, можно найти в ([2-5]). Приведем некоторые обозначения и определения, необходимые для описания основных результатов работы. Пусть $E^n = \{0,1\}^n$ — множество вершин n-мерного единичного куба. Множество $E^{n,j}$ всех наборов $\widetilde{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E^n$, имеющих в точности j единиц в своих координатах, называется j-м слоем куба E^n, $0 \le j \le n$. Пусть $B(n)$ — множество всех булевых функций от n переменных, $S(n)$ — множество всех симметрических функций из $B(n)$. Отметим, что симметрическая функция полностью определяется заданием номеров тех слоев n-мерного куба, где функция принимает единичное значение.

Говорят, что почти все элементы множества $M(n)=\{a_1,\dots,a_n\}$ обладают некоторым свойством P, если доля элементов из $M(n)$, обладающих свойством P, стремится к единице при $n \Rightarrow \infty$.

Последовательность наборов $\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_s \in E^n$ называется цепью длины s (см. [6]), если для всех j, $1 \le j \le s-1$, $\tilde{a}_{j+1}$ получается из $\tilde{a}_j$ заменой некоторого нуля в его координатах на единицу. Пусть

$$L_n(k,m)=\bigcup_{i=k}^{m} E^{n,i}\ ,\ 0 \le k < m \le n .$$

Следующие леммы легко вытекают из леммы Анселя (см. [6]).

Лемма 1. *Множество* $L_n(k,n-k) \subseteq E^n$, $0 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$, *может быть покрыто множеством* $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ *попарно непересекающихся цепей, обладающих следующими свойствами:*

а) число цепей длины $n-2k+1$, *начинающихся на* $E^{n,k}$ *и оканчивающихся на* $E^{n,n-k}$, *равно* $\binom{n}{k}$;

б) число цепей длины $n-2s+1$, $k+1 \le s \le \lfloor n/2 \rfloor$, *начинающихся на* $E^{n,s}$ *и оканчивающихся на* $E^{n,n-s}$, *равно* $\binom{n}{s}-\binom{n}{s-1}$.

Лемма 2. *Если* $\lceil n/2 \rceil \le k < m \le n$ *(соответственно,* $0 \le k < m \le \lfloor n/2 \rfloor$*), то множество* $L_n(k,m) \subseteq E^n$ *может быть покрыто множеством* $\binom{n}{k}$ *(соответственно,* $\binom{n}{m}$*) попарно непересекающихся цепей, обладающих следующими свойствами:*

а) число цепей длины $m-k+1$, *начинающихся на* $E^{n,k}$ *и оканчивающихся на* $E^{n,m}$, *равно* $\binom{n}{m}$ *(соответственно,* $\binom{n}{k}$*);*

б) число цепей длины $m-k+1-j$, $1 \le j \le m-k$, *начинающихся на* $E^{n,k}$ *(соответственно,* $E^{n,k+j}$*) и оканчивающихся на* $E^{n,m-j}$ *(соответственно,* $E^{n,m}$*), равно* $\binom{n}{m-j}-\binom{n}{m-j+1}$ *(соответственно* $\binom{n}{k+j}-\binom{n}{k+j-1}$*).*

Лемма 3. *Если* $0 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$ *и* $\lceil n/2 \rceil \le m < n-k$ *(соответственно,* $n-k < m \le n$*), то множество* $L_n(k,m)$ *может быть покрыто множеством* $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ *попарно непересекающихся цепей, обладающих следующими свойствами:*

а) число цепей длины $m-k+1$, начинающихся на $E^{n,k}$ и оканчивающихся на $E^{n,m}$, равно $\binom{n}{k}$ (соответственно, $\binom{n}{m}$);

б) число цепей длины $m-k+1-j$, $1\le j\le n-m-k$ (соответственно, $1\le j\le m-n+k$), начинающихся на $E^{n,k+j}$ (соответственно, $E^{n,k}$) и оканчивающихся на $E^{n,m}$ (соответственно, $E^{n,m-j}$), равно $\binom{n}{k+j}-\binom{n}{k+j-1}$ (соответственно, $\binom{n}{m-j}-\binom{n}{m-j+1}$);

в) число цепей длины $n-2s+1$, $n-m+1\le s\le\lfloor n/2\rfloor$ (соответственно, $k+1\le s\le\lfloor n/2\rfloor$), начинающихся на $E^{n,s}$ и оканчивающихся на $E^{n,n-s}$, равно $\binom{n}{s}-\binom{n}{s-1}$.

Лемма 4. *Для всех k, $0\le k\le\lfloor n/2\rfloor$, множество $L_n(k,n-k)$ может быть покрыто множеством $\binom{n}{k}$ кубов размерности $n-2k$, таких, что каждый набор $\tilde{a}\in E^{n,k}\cup E^{n,n-k}$ будет покрыт единственным кубом.*

Теорема 1. *Существует класс функций $\Phi(n)\subseteq B(n)$, не имеющих вполне RPDFT-реализаций глубины 2, и*

$$|\Phi(n)|=2^{2^n-n-1}\sum_{s=2}^{n-1}\binom{n}{s}2^{-s(n-1)}$$

Следствие 1. *Имеется не менее $2^{(1-o(1))2^n}$ булевых функций, не имеющих вполне RPDFT-реализаций глубины 2.*

Пусть $S_{RPDFT}(n)$ множество функций из $S(n)$, имеющих вполне RPDFT-реализации глубины 2.

Теорема 2. *При $n\ge 11$,*

$$|S_{RPDFT}(n)|=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+5}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+5}\right)+\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{2\lfloor(n-1)/2\rfloor+5}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{2\lfloor(n-1)/2\rfloor+5}-(-1)^{\lfloor(n-1)/2\rfloor}\right)-\frac{2}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{\lfloor(n-1)/2\rfloor+4}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{\lfloor(n-1)/2\rfloor+4}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}n(n-3)-\lfloor(n-1)/2\rfloor^2+4\lfloor(n-1)/2\rfloor-6.$$

Следствие 2. *При $n\Rightarrow\infty$,*

$$|S_{RPDFT}(n)|\sim\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+5}+\frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{2\lfloor(n-1)/2\rfloor+5}.$$

С л е д с т в и е 3. *Почти все функции из $S(n)$ не имеют вполне RPDFT-реализаций глубины 2.*

В таблице приведены значения $|S(n)|$ и $|S_{RPDFT}(n)|$ для $1 \le n \le 10$.

n	$\lvert S(n)\rvert$	$\lvert S_{RPDFT}(n)\rvert$
1	4	2
2	8	6
3	16	14
4	32	26
5	64	50
6	128	83
7	256	153
8	512	241
9	1024	433
10	2048	665

О п р е д е л е н и е. *Булева функция $g(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ от $n+m$ переменных называется RPDFT-расширением для булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$, если удовлетворяет следующим условиям:*

а) g имеет вполне RPDFT-реализацию глубины 2.

б) существуют константы $\sigma_1,\dots,\sigma_m \in \{0,1\}$ такие, что $g(x_1,\dots,x_n,\sigma_1,\dots,\sigma_m) = f(x_1,\dots,x_n)$.

На основе лемм 1-4 предложены алгоритмы построения RPDFT-расширений для булевых и симметрических булевых функций, не имеющих вполне RPDFT-реализаций глубины 2.

Т е о р е м а 3. *Для любой функции $f \in B(n)$, не имеющей вполне RPDFT-реализаций глубины 2, можно построить RPDFT-расширение $g(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ такое, что $m \le 2$.*

Основные результаты работы представлены также в ([7]).

Автор выражает глубокую благодарность Ервaнду Зорьяну из AT&T Bell Laboratories (США) за полезные советы и большую поддержку.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении

Վ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Տրամաբանական ֆունկցիաների իրականացման մասին ճանապարհային հապաղումների անսարքությունների նկատմամբ ստուգելի կոմբինացիոն սխեմաների տեսքով

Կառուցված է բուլյան ֆունկցիաների մի լայն դաս, որոնց հնարավոր չէ իրականացնել ճանապարհային հապաղումների անսարքությունների նկատմամբ լրիվին ռոբաստ ստուգելի երկու-խորության կոմբինացիոն սխեմաների տեսքով:

Ստացված են ճշգրիտ և ասիմպտոտիկ բանաձևեր n փոփոխականի այն սիմետրիկ բուլյան ֆունկցիաների քանակի համար, որոնք ունեն ճանապարհային հապաղումների

անսարքությունների նկատմամբ լրիվին ռոբաստ ստուգելի երկու–խորության (լրիվին RPDFT) իրականացում: Ապացուցված է, որ համարյա բոլոր սիմետրիկ ֆունկցիաները չունեն այդպիսի ներկայացում:

Ներմուծված է բուլյան ֆունկցիայի ընդլայնման մի գաղափար (RPDFT–ընդլայնում) և ապացուցված է, որ ցանկացած բուլյան ֆունկցիա, որ չունի երկու խորության լրիվին RPDFT–իրականացում, կարելի է ընդլայնել ոչ ավել, քան երկու լրացուցիչ փոփոխականների միջոցով և ստանալ մի ֆունկցիա, որն ունի երկու–խորության լրիվին RPDFT–իրականացում:

ЛИТЕРАТУРА–ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G.L.Smith,* Proc. Int. Test Conf., 1985. [2] *C.L.Lin, S.M.Reddy,* IEEE Trans. Computer-Aided Design, CAD-6, №5 (1987). [3] *S.Devadas, K.Keutzer,* IEEE Trans. Computer-Aided Design, v.11, №1 (1992). [4] *S.Devadas, K.Keutzer,* IEEE Trans. Computer-Aided Design, v.11, №3 (1992). [5] *С.В.Яблонский,* Введение в дискретную математику, М., Наука, 1979. [6] *Ж.Ансель,* Киб. сб. Новая сер., М., Мир, вып. 5 (1968). [7] *V.A.Vardanian,* Proc. 14th IEEE VLSI Test Symposium, 1996.