ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.444

А. М. Григорян

Векторные алгоритмы вычисления двумерного дискретного преобразования Хартли

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 10/VIII 1993)

Рассматривается метод вычисления двумерного дискретного преобразования Хартли (ДДПХ), основанный на векторном представлении. Получены алгоритмы, которые эффективнее известных алгоритмов Брейсуэлла [1], а также алгоритма Бауссакта и Холта [2].

Пусть $f=\{f_{n,m}\}$ произвольная двумерная последовательность на квадратной решетке размерами $N\times N$, $X_{N,N}=\{(p, s);\ p, s=0\div N-1\}$, где $N>1$ целое. ДДПХ последовательности f в каждом отсчете $(p, s) \in X_{N,N}$ есть

$$H_{p,s}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} f_{n,m}\mathrm{Cas}(np+ms), \tag{1}$$

где ядром преобразования является действительная периодическая функция $\mathrm{Cas}(x)=\mathrm{cas}(2\pi x/N)=\cos(2\pi x/N)+\sin(2\pi x/N)$.

Несмотря на то, что ядра преобразований Хартли и Фурье определяются разными периодическими фукциями $\mathrm{cas}\,(2\pi x/N)$ и $\exp\,(2\pi i x/N)$ соответственно, форма связи координат (n, m) квадратной решетки с отсчетами (p, s) области определения спектра одинакова и диофантова, т. е. вида $np+ms$. Поэтому для ДДПХ можно использовать определенную для двумерного преобразования Фурье векторную форму представления [3]. Действительно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Каждая спектральная составляющая $H_{p,s}$ двумерной последовательности f в отсчете (p, s) представляется вектором

$$\mathbf{H}_{p,s}=\mathrm{col}(f_{p,s,0},\ f_{p,s,1}, \ldots, f_{p,s,N-1}), \tag{2}$$

для которого выполняется соотношение

$$H_{\overline{kp},\overline{ks}} = \sum_{t=0}^{N-1} f_{p,s,t}\,\mathrm{Cas}(kt),\quad k=0\div N-1, \tag{3}$$

где $(\overline{kp}, \overline{ks})=(kp \bmod N,\ ks \bmod N)$.

Нетрудно убедиться, что для этого компоненты вектора (2) нужно определить по формуле

$$f_{p,s,t} = \sum\{f_{n,m};\ \{(n,\ m);\ np+ms=t \bmod N\}\},\tag{4}$$

Таким образом, одномерное N-точечное ДПХ над вектором полностью определяет ДДПХ во всех отсчетах соответствующей циклической группы

$$T=T_{p,s}=\{(\overline{kp},\ \overline{ks});\ k=0\div N-1\}.\tag{5}$$

Следовательно, если семейство групп $\sigma_{N,N}=(T_{p,s};\ (p,\ s)\in J)$ для некоторого множества индексов $J\subseteq X$ есть неприводимое покрытие решетки X, тогда для определения полного ДДПХ достаточно выполнить $\mathrm{card}\,\sigma_{N,N}$ одномерных N-точечных ДПХ. Такое покрытие имеет следующее построение ([4,5]). Пусть множество $B_N=\{n\in[0,\ N-1];\ \text{НОД}\ (n,\ N)>1\}$, а $\beta(p)$ функция, равная числу таких элементов $s\in B_N$, которые взаимно просты с p и $ps\leqslant N$. Пусть далее $\Phi(N)$ функция Эйлера, т. е. функция, равная числу положительных целых чисел меньше N и взаимно простых с N.

Теорема 2. Для заданного целого $N>1$:

(1) семейство циклических групп

$$\sigma_{N,N}=(T_{p,s})_{(p,s)\in J}\tag{6}$$

с множеством образующих

$$J=\bigcup_{s=0}^{N-1}(1,\ s)\cup\Big(\bigcup_{p\in B_N}(p,\ 1)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\substack{p,s\in B_N\\ \text{НОД}(p,s)=1,\ ps<N}}(p,\ s)\Big)\tag{7}$$

есть неприводимое покрытие решетки $X_{N,N}$;

(2) неприводимое покрытие решётки $X_{N,N}$ имеет мощность

$$\mathrm{card}\ \sigma_{N,N}=2N-\Phi(N)+\sum_{p\in B_N}\beta(p).\tag{8}$$

Следствие 1. Для вычисления $N\times N$-точечного ДДПХ достаточно выполнить умножений в количестве

$$M_{N,N}=(\mathrm{card}\,\sigma_{N,N})M_N,\tag{9}$$

где через M_N обозначено число умножений, необходимых для вычисления одномерного N-точечного ДПХ.

Из определения функции Эйлера нетрудно получить неравенство $\Phi(N)\geqslant\Sigma\{\beta(p);\ p\in B_N\}$, так что $\mathrm{card}\,\sigma_{N,N}\leqslant 2N$. Причем знак равенства имеет место только в отдельных случаях. Например, если N имеет вид LM, где L и M взаимно простые числа, то $\mathrm{card}\,\sigma_{N,N}=2N$ только при $N=6$. Для N вида L^r, где L простое и $r>1$, такое равенство не имеет места. Для сравнения отметим, что известный алгоритм Брейсуэлла использует 2N одномерных N-точечных ДПХ ([1]). Так, для $N=2^r$, $r>1$, Брейсуэллом получена оценка умножений

$$M^{B}_{N,N}=2N^2(r-2)+4N.\tag{10}$$

Из теоремы 2 прямо следует, что в этом случае $\mathrm{card}\,\sigma_{N,N}=3N/2$ и

$$M_{N,N}=3N/2M_N\leqslant 3N^2/4(r-3)+3N,\tag{11}$$

так как имеет место оценка $M_N=N/2\,(r-3)+2$ ([6]). Из (10) и (11) следует, что $M^2_{N,N}/M_{N,N}\approx 4/3$, поэтому предлагаемый алгоритм по сравнению с алгоритмом Брейсуэлла сокращает число операций на 1/3.

Приведем сравнение и с другим известным алгоритмом Боуссакта и Холта [2], в котором для $N\times N$-точечного ДДПХ, где N произвольное простое, получена оценка умножений

$$M^1_{N,N}=N^2+2N-3. \tag{12}$$

Из теоремы 2 получаем, что для простого N

$$M_{N,N}=(N+1)M_N=N^2-1, \tag{13}$$

если учесть, что N-точечное ДПХ можно вычислить, как показано в [7], используя числовые преобразования Ферма, с помощью $(N-1)$ умножений. Из оценок (12) и (13) следует, что если в алгоритме Боуссакта и Холта в среднем на отсчет требуется более 1 операции умножения, то в предлагаемом векторном алгоритме требуется таких операций не более чем 1. Аналогичные сравнения имеют место и для других значений N.

Нужно отметить, что предлагаемый алгоритм можно улучшить, если исключить многие пересечения в группах неприводимого покрытия $\sigma_{N,N}$. Действительно, если L некоторый множитель числа N, то нетрудно проверить, что

$$\sigma^1=\{T_{p,s}\setminus T_{Lp,Ls};\ (p,s)\in J\} \tag{14}$$

является разбиением дополнения $X_{N,N}\setminus LX_{N/L,N/L}$. Поэтому можно вычислить $N\times N$-точечное ДДПХ посредством $N/L\times N/L$-точечного ДДПХ и $\mathrm{card}\,\sigma_{L/N,N/L}$ одномерных N/L-точечных ДПХ. В результате мы получаем улучшенный рекуррентный алгоритм, в котором число умножений сокращается почти в 1,5 раза по сравнению с векторным. Так, для $N=2^r$, $r>1$, получаем следующую оценку умножений в рекуррентном алгоритме:

$$M'_{N,N}=4^r/6(3r-7)+8/3\approx 2/3\,M_{N,N}. \tag{15}$$

Таким образом относительно сравниваемых алгоритмов Боуссакта и Холта, Брейсуэлла число умножений сокращается почти в два раза.

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН Армении

Ա. Մ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Հարթլիի երկչափանի դիսկրետ ձևափոխության վեկտորական ալգորիթմներ

Ներկա աշխատանքում ցույց է տրված, որ Հարթլիի երկչափանի դիսկրետ ձևափոխությունը կարելի է արդյունավետ հաշվարկել, եթե օգտագործվի նրա վեկտորական ներկայացումը։ Բազմապատկումների քանակի համար բերված համեմատական գնահատականները ցույց են տալիս, որ առաջարկված վեկտորական և բարելավված անդրադարձ ալգորիթմները Բրեյսուելի, ինչպես նաև Բուսակտի և Հոլթի ալգորիթմից մոտավորապես երկու անգամ արդյունավետ են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] R. N. Bracewell, O. Buneman, H. Hao e. a., Proc. IEEE, v. 74, p. 1282—1283 (1986). [2] S. Boussakta, A. G. J. Holt, IEE Proc. G, v. 135, № 6, p. 253—257 (1988).

[3] А. М. Григорян, Журн. вычислительной математики и мат. физики, т. 26, с. 1407—1412 (1986). № 9. [4] А. М. Григорян, Журн. вычислительной математики и мат. физики, т. 30. № 10, с. 1576—1581 (1991). [5] С. С. Агаян, в кн.: Распознавание. Классификация. Прогнозирование. Математические методы и их применения. М., Наука, с. 146—215. 1992. [6] А. В. Усачев, IX Всесоюзн. конф. по теории кодирования и информации. Одесса, Тезисы докл. ч. 2. с. 49—52, 1988. [7] S. Boussakta, A. G. J. Holt, IEE Proc. G., v. 135, № 3, p. 101—103 (1988)