ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 90 1990 №4

УДК 519.7

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

К. В. Задоян

Полная булева функция

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ю. Г. Шукуряном 11/VI 1990)

В работе рассматривается задача построения дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) для булевой функции f, заданной перечислением нулевых наборов $\alpha_i=(\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$, $i=\overline{1, k}$, или совершенной конъюнктивной нормальной формой (КНФ):

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\mathop{\&}_{i=1}^{k}(x_1^{\bar{\alpha}_i^1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\alpha}_i^n}).$$

При этом требуется построить либо кратчайшую ДНФ, реализующую функцию f, либо ДНФ, достаточно близкую к кратчайшей по сложности.Такая задача возникает, в частности, в алгоритмах распознавания комбинаторно-логического характера, основанных на переборе конъюнкций или выделении представительных наборов, если описания объектов заданы бинарными признаками, а также в различных алгоритмах минимизации булевых функций. Прямое перемножение скобок совершенной КНФ с применением системы упрощающих тождеств булевой алгебры практически невыполнимо даже при сравнительно небольшом числе нулевых наборов.

В настоящей статье в качестве отправной точки используется подход, изложенный в работе ([1]).

Множество булевых функций, зависящих от n переменных и имеющих ровно k нулевых наборов, обозначается через $P_2^k(n)$. Функция $f\in P_2^k(n)$ задается матрицей нулей $M_f=\|\alpha_i^j\|_{k\times n}$, строки которой—нулевые наборы f. Без ограничения общности можно рассматривать лишь так называемые приведенные матрицы нулей, в которых нет нулевых и единичных столбцов, нет противоположных столбцов, а все одинаковые столбцы расположены последовательно. Данное предположение основывается на следующих двух предпосылках:

1. Переменные, соответствующие нулевым и единичным столбцам матрицы нулей, могут быть вынесены в совершенной КНФ из-под знака произведения. Такие переменные в соответствующих степенях суть конъюнкции ранга 1, ядровые для f. Они, следовательно, входят во все тупиковые ДНФ функции f.

2. Преобразования $x_i\to x_{j(i)}^{\sigma_i}$, $i\to j(i)$—подстановка, $\sigma_i\in\{0, 1\}$, $i=\overline{1, n}$ оставляют инвариантными все свойства ДНФ, связанные с задачами минимизации.

Совокупности одинаковых столбцов матрицы нулей M_f нумеруются последовательно, а переменные, соответствующие столбцам q-й совокупности, обозначаются через x_{qj},

$$j=\overline{1, n_q}, \quad \sum_{q=1}^{l} n_q = n, \quad \lceil \log_2 k \rceil \leqslant l \leqslant 2^{k-1}-1.$$

Функции $f\in P_2^k(n)$ сопоставляется функция $\varphi\in P_2^k(l)$, зависящая от переменных $z_1, \ldots, z_l$, матрица нулей которой состоит из всех различных столбцов матрицы M_f так, что столбец, соответствующий переменной z_q, совпадает со столбцами, соответствующими переменным x_{qj}. Данное сопоставление позволяет свести построение коротких ДНФ функции f к построению коротких ДНФ функции φ. Пусть $S_\varphi(Q_l)=S_\varphi \cap Q_l$, где S_φ — множество номеров всех столбцов, входящих во все тупиковые тесты матрицы M_φ, Q_l — множество номеров совокупностей одинаковых столбцов матрицы M_f, содержащих более одного столбца. Пусть, далее, $D(\varphi)$ — произвольная ДНФ, реализующая функцию φ, $D_3(\varphi)$ — ДНФ, полученная из $D(\varphi)$ преобразованием переменных:

$$\{z_q^{\sigma_q} \to x_{qj(\sigma_q)}^{\sigma_q} : j(\sigma_q)=\operatorname{sgn}(1-\sigma_q) + \sigma_q \cdot n_q\}.$$

Тогда ДНФ

$$D(f)=D_1(f)\vee D_2(f)\vee D_3(\varphi)$$

реализует функцию f, где

$$D_1(f)=\bigvee_{q\in S_\varphi(Q_l)} x_{qn_q} \cdot \overline{x}_{q1}, \quad D_2(f)=\bigvee_{q=1}^{l}\bigvee_{j=1}^{n_q-1} x_{qj}\cdot \overline{x}_{q(j+1)},$$

причем если $D(\varphi)$ — тупиковая ДНФ функции φ, то $D(f)$ — тупиковая ДНФ функции f. Следовательно,

$$|D_{\text{кр}}(f)| \leqslant n-l+|S_\varphi(Q_l)|+|D_{\text{кр}}(\varphi)|,$$

$$L(D_{\text{мин}}(f)) \leqslant 2((1-\alpha(f)/2)n-l+|S_\varphi(Q_l)|)+L(D_{\text{мин}}(\varphi)),$$

где $\alpha(f)\in[0, 1]$ — доля нулевых и единичных столбцов в матрице нулей M_f.

В работе (2) разработан редукционный алгоритм построения коротких ДНФ булевых функций с малым числом нулей, при помощи которого для произвольной функции $f\in P_2^k(n)$, $k\geqslant 2$, получены следующие оценки:

$$|D_{\text{кр}}(f)| \leqslant n+m(k), \quad m(2)=0, \quad m(3)=1, \quad m(4)=3,$$

$$m(k)=2^{k-1}-3+m(\lfloor k/2 \rfloor)+m(\lceil k/2 \rceil), \quad k\geqslant 5;$$

$$L(D_{\text{мин}}(f)) \leqslant 2n+p(k), \quad p(2)=0, \quad p(3)=3, \quad p(4)=9,$$

$$p(k)=2^{k+1}-10+p(\lfloor k/2 \rfloor)+p(\lceil k/2 \rceil)+m(\lfloor k/2 \rfloor)+m(\lceil k/2 \rceil), \quad k\geqslant 5.$$

В работе (2) установлено также, что при малом числе нулей ($k \leqslant \log_2 n - \log_2 \ln n + 1$) почти все булевы функции устроены одинаково в том смысле, что им сопоставляется одна и та же функция, называемая полной.

Определение (2). *Функция $\varphi\in P_2^k(l)$ называется полной, ес-*

ли $l=2^{k-1}-1$, т. е. матрица нулей M_{φ} состоит из максимально возможного числа столбцов.

Таким образом, полная функция играет важную роль в задаче минимизации булевых функций с малым числом нулей. Полную функцию с k нулями будем обозначать через $\varphi_k(z_1, \ldots, z_{2^{k-1}-1})$, $k \geq 2$, считая при этом, что столбцы матрицы нулей M_{φ_k} являются двоичными разложениями чисел $1, \ldots, 2^{k-1}-1$ и расположены в (лексикографическом) порядке возрастания. Полная функция с двумя нулями тождественно равна нулю.

Теорема 1. *Расстояние Хэмминга между произвольными двумя нулями полной функции φ_k равно 2^{k-2}.*

Следствие 1. *Все нули полной функции φ_k, кроме 0, расположены в 2^{k-2}-м (верхнем среднем) слое $(2_{k-1}-1)$-мерного единичного куба.*

Следствие 2. *При $k>3$ $D_{\text{сокр}}(\varphi_k)=\varnothing$ (все простые импликанты полной функции φ_3 являются ядровыми).*

Следствие 3. *При $k>2$ $S_{\varphi_k}=\varnothing$ $(S_{\varphi_2}=\{1\})$.*

Для произвольного $K\in D_c(\varphi_k)$, $k>2$, имеет место: $2\leq \operatorname{rank}(K)\leq k$, причем существует единственный простой импликант полной функции φ_k максимального ранга.

Теорема 2 *Если $k_1<k_2$, то $D_c(\varphi_{k_1})\subset D_c(\varphi_{k_2})$.*

Простейшие реализации полной функции φ_k известны лишь при $k=2, 3, 4$ [3]).

Теорема 3. *Для длины кратчайшей ДНФ полной функции φ_k, $k>3$, имеет место следующая нижняя оценка:*

$$|D_{\text{кр}}(\varphi_k)|\geq 2^{k-1}+k-2.$$

Следствие. *Для буквенной сложности минимальной ДНФ полной функции φ_k $k>3$ имеет место следующая нижняя оценка:*

$$L(D_{\text{мин}}(\varphi_k))>2^k+2k-4.$$

Теорема 4. *Полную функцию φ_k можно реализовать тупиковой ДНФ, состоящей из простых импликантов, ранг которых не больше трех, и имеющей длину $2^{k-1}-1+a(k)$,* где

$$a(k)=C_{k-1}^{[(k-1)/2]}+k-4.$$

Следствие 1. *Полную функцию φ_k можно реализовать тупиковой ДНФ, состоящей из простых импликантов, ранг которых не больше трех, и имеющей буквенную сложность $2^k-2+b(k)$,* где

$$b(k)=2^{k-1}-1+3(C_{k-1}^{[(k-1)/2]}-2).$$

Следствие 2. *Любую функцию $f\in P_2^1(n)$, которой сопоставляется полная функция φ_k, можно реализовать тупиковой ДНФ, состоящей из простых импликантов, ранг которых не больше трех, и имеющей длину и буквенную сложность, соответственно, $n+a'(k)$ и $2(1-\tau(f)/2)n+b'(k)$,* где

$$a'(2)=|S_c(Q_f)|+a(2),\ a'(k)=a(k),\ k\geq 3;$$

$$b'(2)=2|S_{\cdot}(Q_f)|+b(2),\ b'(k)=b(k),\ k\geq 3.$$

Таким образом, для длины кратчайшей и буквенной сложности минимальной ДНФ полной функции φ_k имеют место следующие асимптотические оценки:

$$|D_{\text{кр}}(\varphi_k)| = (2^{k-1}-1)(1+o(1)),$$

$$(2^k-2)(1+o(1)) \leqslant l(D_{\text{мин}}(\varphi_k)) \leqslant 1.5(2^k-2)(1+o(1)).$$

Между функциями $m(k)$ и $a(k)$, $p(k)$ и $b(k)$ имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$m(k) = \sqrt{\frac{\pi(k-1)}{2}}\, a(k)(1+o(1)),$$

$$p(k) = 4'(k)(1+o(1)).$$

Приведем значения функций $m(k)$, $a(k)$, $p(k)$, $b(k)$ при $k=\overline{2,10}$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m(k)$	0	1	3	14	31	65	131	270	537
$a(k)$	−1	1	3	7	12	23	39	75	132
$p(k)$	0	3	9	58	126	262	526	1098	2182
$b(k)$	−2	3	10	27	55	117	226	459	883

Автор выражает благодарность Ю. И. Журавлеву за постановку задачи и поддержку при ее решении.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Կ. Վ. ՉԱԴՈՅԱՆ

Լրիվ բուլյան ֆունկցիա

Աշխատանքում դիտարկվում է քիչ թվով զրոներ ունեցող բուլյան ֆունկցիաների մինիմիզացիայի խնդիրը դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի դասում։ Հայտնի է, որ այդպիսի ֆունկցիաների մինիմիզացիան $k \leq \log_2 n - \log_2 \ln n + 1$ պայմանի դեպքում, որտեղ k-ն զրոների քանակն է, n-ը՝ փոփոխականների, համարյա միշտ հանգեցվում է լրիվ բուլյան ֆունկցիայի մինիմիզացմանը։ Ցույց է տրված, որ

$$2^{k-1}+k-2 < |D_{\text{кр}}(\varphi_k)| < 2^{k-1} + C_{k-1}^{[(k-1)/2]} + k-5, \quad k>3,$$

որտեղ $|D_{\text{кр}}(\varphi_k)|$-ն k հատ զրոներ ունեցող լրիվ բուլյան ֆունկցիայի կարճագույն դիզյունկտիվ նորմալ ձևի երկարությունն է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Ю. И. Журавлев, А. Ю. Коган*, ДАН СССР, т. 285, № 4, с. 795—799 (1985).
2 *А. Ю. Коган*, Методы минимизации бинарных функций с малым числом нулей, канд. дис., М., ВЦ АН СССР, 1987.