ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 №4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. Саакян

Векторное волновое уравнение для неоднородной упругой среды через обобщенные потенциалы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 8/II 1989)

Представление вектора перемещения Гельмгольца ([1]) позволяет разделить векторное волновое уравнение для однородной упругой среды на независимые скалярные уравнения в прямоугольной, цилиндрической (круговой, эллиптической, параболической), сферической и конической системах координат. Путем обобщения представления вектора перемещения получено разделение векторного уравнения для слоисто-неоднородной упругой среды на независимые скалярные уравнения в декартовой, цилиндрической (круговой) и сферической системах координат ([2–4]).

В настоящей работе показано, что разделение векторного волнового уравнения для слоисто-неоднородной упругой среды на независимые скалярные уравнения можно получить и в других ортогональных системах координат.

Пусть в ортогональной системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 коэффициенты λ, μ и плотность ρ среды представляют собой произвольные дифференцируемые функции ξ^1. Допустим, что в ортогональной системе координат компонента метрического тензора g_{11} зависит только от ξ^1, а отношение g_{22}/g_{33}—от ξ^2 и ξ^3. Тогда известное векторное волновое уравнение для неоднородной изотропной упругой среды при отсутствии внешних массовых сил

$$G(\boldsymbol{u})=(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\lambda\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\mu\times$$
$$\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}+2\,\mathrm{grad}\mu\cdot\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\qquad(1)$$

представим в следующем виде:

$$G(\boldsymbol{u})\equiv\mathrm{grad}(\xi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})-\mathrm{rot}(\mu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})+\mathrm{rot}\left[\boldsymbol{u}\times\frac{\mu'}{g_{11}}\boldsymbol{e}_1\right]+\mathrm{grad}\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mu'}{g_{11}}\boldsymbol{e}_1\right)-$$
$$-\frac{\mu'}{g_{11}}\boldsymbol{e}_1\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\left(\frac{\mu'}{g_{11}}\boldsymbol{e}_1\right)+\frac{\mu'}{g_{11}}\boldsymbol{e}_1\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\times\mathrm{rot}\left(\frac{\mu'}{g_{11}}\boldsymbol{e}_1\right)-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2},\qquad(2)$$

где $\xi=\lambda+2\mu$; $\mu'=\dfrac{d\mu}{d\xi^1}$; $\boldsymbol{u}$—вектор перемещений, $\boldsymbol{e}_i$—орты системы координат.

Общее решение уравнения (2) разложим по линейно-независимым векторам

$$\boldsymbol{u}=\psi_1(\xi^1)\operatorname{grad}\Phi_1(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t)+\psi_2(\xi^1)\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\Phi_2(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t)\boldsymbol{e}_1]+$$
$$+\operatorname{rot}[\Phi_3(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t)\boldsymbol{e}_1], \tag{3}$$

где Φ_i — обобщенные потенциалы, $\psi_1(\xi^1)$, $\psi_2(\xi^1)$ — неизвестные функции, которые определяются условием разделения векторного уравнения для неоднородной упругой среды на независимые скалярные уравнения.

Подставим разложение (3) в уравнение (2). Учитывая линейность оператора $G(\boldsymbol{u})$ и следующие соотношения:

$$\operatorname{rot}(\varphi(\xi^1)\boldsymbol{e}_1)=0;\ \operatorname{grad}\Phi=\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1\times\operatorname{rot}(\Phi\boldsymbol{e}_1);$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Phi\boldsymbol{e}_1)=\operatorname{grad}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}-\left[\Delta\Phi-\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial\ln g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}\right]\boldsymbol{e}_1;$$

$$\boldsymbol{e}_1[\boldsymbol{e}_1\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Phi\boldsymbol{e}_1)]=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Phi\boldsymbol{e}_1)-\boldsymbol{e}_1\times\operatorname{rot}\left(\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}\boldsymbol{e}_1\right),$$

получим уравнение

$$G(\boldsymbol{u})=\rho\psi_1\operatorname{grad}[v_1^2L_1(\Phi_1)]+\rho\psi_2\operatorname{rot}\operatorname{rot}[v_2^2L_2(\Phi_2)\boldsymbol{e}_1]+\operatorname{rot}[v_2^2L_3(\Phi_3)\boldsymbol{e}_1]=0, \tag{4}$$

при соблюдении условий

$$\gamma(p_1+p_\rho)=p_1+2p_\mu;\ \gamma(p_1+p_\rho)=p_1+p_\mu; \tag{5}$$

$$(p_1+p_\rho)[-(\gamma-1)p_1+2p_\mu]=2\left[(p_1+p_\mu)'+p_\mu^2-(p_1+p_\mu)\frac{\partial\ln g_{11}\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial\xi^1}\right]; \tag{6}$$

$$(p_1+p_\rho)\left[-(\gamma-1)p_1'-(\gamma-1)p_1^2+p_1p_\mu-p_1\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial\xi^1}-p_\mu\frac{\partial\ln g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}\right]=$$

$$=p_1p_\mu'+p_1p_\mu^2+p_1'+2p_1p_1'-(p_1p_\mu+p_\mu'+p_\mu^2)\frac{\partial\ln g_{11}^{-1}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}-p_\mu\frac{\partial^2\ln g_{11}^{-1}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^{12}}-$$

$$-2\left[3p_1p_\mu+2p_1'+2p_1^2-2(p_1+p_\mu)\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial\xi^1}-p_\mu\frac{\partial\ln g_{11}^{-1}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}+p_\mu'+\right.$$

$$\left.+p_\mu^2\right]\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial\xi^1}-2(p_1+p_\mu)\frac{\partial^2\ln g_{11}}{\partial\xi^{12}};\quad p_2+p_\rho=\gamma p_2+2p_\mu; \tag{7}$$

$$(p_2+p_\rho)\left[(\gamma-1)p_2+2p_\mu+2\frac{\partial\ln g_{11}\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial\xi^1}\right]=$$

$$=2\left[(\gamma p_2)'+(\gamma-1)p_2p_\mu+p_\mu'+p_\mu^2+p_\mu\frac{\partial\ln g_{11}\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial\xi^1}\right]; \tag{8}$$

$$(p_2+p_\rho)\left[(\gamma p_2)'+\gamma p_2p_\mu+\gamma p_2^2-\gamma p_2\frac{\partial\ln g_{11}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}-2p_\mu\frac{\partial\ln g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}\right]=$$

$$=[(\gamma p_2)'+\gamma p_2p_\mu+\gamma p_2^2]'-(\gamma p_2+p_\mu)'\frac{\partial\ln g_{11}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}-(\gamma p_2+$$

$$+p_\mu)\frac{\partial^2\ln g_{11}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^{12}}-p_\mu'\frac{\partial\ln g_{11}^{-1}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^1}-p_\mu\frac{\partial^2\ln g_{11}g_{22}g_{33}}{\partial\xi^{12}}+$$

$$+\left(p_2+p_\mu-2\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1}\right)\left[(\gamma p_2)'+\gamma p_2 p_\mu+\gamma p_2^2-(\gamma p_2+p_\mu)\frac{\partial \ln g_{11}g_{22}g_{33}}{\partial \xi^1}-\right.$$

$$\left.-p_\mu\frac{\partial \ln g_{11}^{-1}g_{22}g_{33}}{\partial \xi^1}\right]. \tag{9}$$

В формулах (4)—(9) приняты следующие обозначения:

$$L_1(\Phi_1)\equiv\Delta\Phi_1+\frac{1}{\gamma g_{11}^2}\left[(\gamma+1)p_1+2p_\mu\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi^1}+\frac{1}{\gamma g_{11}^2}\left[p_1p_\mu+p_1^2+\right.$$

$$\left.+p_1'-p_1\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1}-p_\mu\frac{\partial \ln g_{22}g_{33}}{\partial \xi^1}\right]\Phi_1-\frac{1}{v_1^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t_2}; \tag{10}$$

$$L_2(\Phi_2)\equiv\Delta\Phi_2+\frac{1}{g_{11}^2}\left[(\gamma+1)p_2+2p_\mu-\frac{\partial \ln g_{22}g_{33}}{\partial \xi^1}\right]\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi^1}+\frac{1}{g_{11}^2}\left[(\gamma p_2)'+\right.$$

$$\left.+\gamma p_2p_\mu+\gamma p_2^2-\gamma p_2\frac{\partial \ln g_{11}g_{22}g_{33}}{\partial \xi^1}-2p_\mu\frac{\partial \ln g_{22}g_{33}}{\partial \xi_1}\right]\Phi_2-\frac{1}{v_2^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}; \tag{11}$$

$$L_3(\Phi_3)\equiv\Delta\Phi_3+\frac{1}{g_{11}^2}\left(p_\mu-\frac{\partial \ln g_{22}g_{33}}{\partial \xi^1}\right)\frac{\partial\Phi_3}{\partial\xi^1}-\frac{p_\mu}{g_{11}^2}\frac{\partial \ln g_{22}g_{33}}{\partial \xi^1}\Phi_3-\frac{1}{v_2^2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}; \tag{12}$$

$$\Delta\equiv\frac{1}{g_{11}g_{22}g_{33}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}\frac{\partial}{\partial\xi^3}\right)\right]; \tag{13}$$

$$p_i=\frac{1}{\psi_i}\frac{d\psi_i}{d\xi^1};\quad p_\mu=\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\xi^1};\quad p_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\xi^1};\quad v_1^2=\frac{\xi}{\rho};\quad v_2^2=\frac{\mu}{\rho}. \tag{14}$$

Векторное уравнение (4) разделяется на следующие независимые скалярные дифференциальные уравнения для обобщенных потенциалов Φ_i:

$$L_i(\Phi_i)=0;\quad i=1,2,3. \tag{15}$$

Условие разделения (5)—(9), при выполнении которых векторное волновое уравнение для неоднородной упругой среды разделяется на независимые уравнения (15), можно привести к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$p_1+p_2+p_\rho=0;\quad \mu p_1+\xi p_2+2\mu'=0; \tag{16}$$

$$(\mu p_1)'+\mu p_1^2-\mu p_1\frac{\partial \ln g_{11}\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial \xi^1}=(\xi p_2)'+\xi p_2^2-\xi p_2\frac{\partial \ln g_{11}\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial \xi^1}\equiv K; \tag{17}$$

$$K'+\left[3\frac{\partial \ln g_{11}\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial \xi^1}-p_\rho-2\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1}\right]K+\left\{(2\mu p_1+\xi p_2)\frac{\partial \ln g_{11}\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial \xi^1}+\right.$$

$$+(\xi+2\mu)p_1p_2\frac{\partial \ln\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial \xi^1}+(\mu p_1-2\mu')\frac{\partial^2 \ln\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial \xi^{12}}+\left[(\mu p_1+\mu')p_\rho-\right.$$

$$-2(\mu p_1-2\mu')\frac{\partial \ln\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\partial \xi^1}+2(\mu p_1+\mu')\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1}\left.\right]\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1}-$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left[(\mu p_1+\mu')\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial \xi^1}\right]\right\}=0; \tag{18}$$

Система уравнений (16)—(18) незамкнута, и ее решение можно получить при дополнительных предположениях относительно p_1, p_2, p_ρ, μ и ξ. Решение системы (16)—(18) определяет параметры μ, ξ и ρ неоднородной упругой среды и функции $\psi_1(\xi^1)$, $\psi_2(\xi^1)$, при которых разделение векторного уравнения (2) на независимые уравнения (15) возможно.

Рассмотрим условие разделения (16)—(18) в некоторых ортогональных системах координат.

I. Пусть λ, μ, ρ неоднородной упругой среды являются функциями от координаты z. Тогда в декартовой, цилиндрической (круговой, эллиптической, параболической) и бицилиндрической системах координат условие разделения (16)—(18) принимает следующий вид:

$$p_1 + p_2 + p_\rho = 0; \qquad 2\frac{d\mu}{dz} + \mu p_1 + \xi p_2 = 0;$$

$$\frac{d(\mu p_1)}{dz} + \mu p_1^2 = C\rho; \qquad \frac{d(\xi p_2)}{dz} + \xi p_2^2 = C\rho,$$

где C—некоторая постоянная.

II. Пусть λ, μ, ρ радиально-неоднородной упругой среды являются функциями от координаты r. В этом случае в сферической и конической системах координат условие разделения (16)—(18) записывается системой

$$p_1 + p_2 + p_\rho = 0; \qquad 2\frac{d\mu}{dr} + \mu p_1 + \xi p_2 = 0;$$

$$\frac{d(\mu p_1)}{dr} + \mu p_1^2 - \frac{\mu p_1}{r} = \frac{d(\xi p_2)}{dr} + \xi p_2^2 - \frac{\xi p_2}{r} = K;$$

$$\frac{dK}{dr} - \left(p_\rho - \frac{3}{r}\right)K + \frac{\xi + 2\mu}{r} p_1 p_2 = 0.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Անհամասեռ առաձգական միջավայրի վեկտորական ալիքային հավասարումը ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով

Անհամասեռ առաձգական միջավայրի համար, որի Լամեի գործակիցները և խտությունը կախված են օրթոգոնալ համակարգի միայն մեկ կոորդինատից, տեղափոխությունների վեկտորը ներկայացված է ոչ կոմպլանար վեկտորների գումարի տեսքով՝ արտահայտված երեք ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով։ Տեղափոխությունների վեկտորի այդպիսի ներկայացումը հնարավորություն է տալիս որոշ անհամասեռ միջավայրի համար վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհել անկախ, սկալյար, երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների՝ ընդհանրացված պոտենցիալների նկատմամբ։ Դեկարտյան, գլանական (շրջանային, էլիպտիկ, պարաբոլային), սֆերիկ և կոնական կոորդինատների համակարգերում ուսումնասիրված են այն պայ-

ժանները, որոնց դեպքում անհամասեռ միջավայրի համար վեկտորական ալիքային հավասարումը հնարավոր է տրոհել։ Այդպիսի անհամասեռ միջավայրերի համար արտածված են առաձգական ալիքների տարածման հավասարումները ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Н. Морс, Г. Фешбих,* Методы теоретической физики. Т. 2, ИЛ. М., 1960. [2] ***J. F. Hook,*** The Journal of the Acoustbical Society of America, v. 33. p. 302–313 (1961). [3] ***С. Г. Саакян,*** ДАН СССР, т. 263, № 3 (1983). [4] *С. Г. Саакян,* ДАН АрмССР, т. 85, № 4 (1987).